Algorithm 1. TPaxos in PaxosStore

```
1  Procedure Prepare(b)
2    if S_p^p.m < b then
3      S_p^p.m ← b
4      foreach remote replica node q do
5  send M_{p→q}
6  Procedure Accept(P_i)
7    if |{ ∀S_q^p ∈ S^p | S_q^p.m = P_i.b }|×2>|S^p| then
8      if |{ ∀S_q^p ∈ S^p | S_q^p.P.v ≠ null }|>0 then
9      P′←the proposal with maximum P.b in S^p
10     S_p^p.P ← (P_i.b, P′.v)
11     else
12       S_p^p.p ← P_i
13     foreach remote replica node q do
14       send M_{p→q}
15 Procedure OnMessage(M_{p→q})
16   UpdateStates(q, S_p^p)
17     if S_q^p.m < S_q^q.m or S_p^p.P.b < S_q^q.P.b then
18       send M_{q→p}
19     if S_q^q is changed then
20       if IsValueChosen(q) is true then commit
21 Function UpdateStates(q, S_p^p)
22   If S_p^q.m < S_p^p.m then S_p^q.m ← S_p^p.m
23   If S_p^q.P.b < S_p^p.P.b then S_p^q.P ← S_p^p.P
24   If S_q^q.m < S_p^p.m then S_q^q.m ← S_p^p.m
25   If S_q^q.m < S_p^p.P.b then S_q^q.P ← S_p^p.P
26 Function IsValueChosen(q)
27   n′←occurrence count of the most frequent P.b in S^q
28 return n′×2>|S^q|
```

Fig.2 Pseudo-code of TPaxos

图 2 TPaxos 伪代码

(1) 准备阶段

- Phase1a 子阶段:参与者 p 选取一个大于 $S_p^p.m$ 的提议编号 b,更新 $S_p^p.m$ 至 b,然后向其他所有参与者 $q\neq p$ 发送消息 $M_{p\to q}=(S_p^p,S_q^p)$ (即 Prepare 请求).
- 消息处理(OnMessage)子阶段:参与者 q 收到并处理来自 p 的消息 $M_{p\to q}=(S_p^p,S_q^p)$.
  - 首先,q 根据 S_p^p 更新本地状态 S_p^q 与 S_q^q .此处重点关注 S_q^q 的更新:
    1) 作承诺:如果 $S_q^q.m<S_p^p.m$,则将 $S_q^q.m$ 更新为 $S_p^p.m$.这模拟了 Paxos 中的 Phase1b 阶段.
    2) 接受提议:如果 $S_q^q.m<S_p^p.P.b$,则将 $S_q^q.P$ 更新为 $S_p^p.P$.这模拟了 Paxos 中的 Phase2b 阶段.

    消息处理阶段(的核心)是 Phase1b 与 Phase2b 子阶段的合并.需要注意看到,根据 TPaxos 的伪代码,q 先作承诺后接受提议(此时,第 2)步 $S_q^q.m<S_p^p.P.b$ 中的 $S_q^q.m$ 可能已被更新).第 3 节将讨论另一种方案,即 q 先接受提议后作承诺.
  - 然后,q 根据本地状态向量 S^q 判断是否有值已被选中,见 *IsValueChosen*(q).
  - 最后,如果 S_q^p 比更新后的 S_q^q 状态要旧,那么 q 向 p 发送消息 $M_{q\to p}=(S_q^q,S_p^q)$.

(2) 接受阶段

- Phase2a 子阶段:参与者 p 根据本地状态向量 S^p 判断是否可以发起针对提议 $P=\langle b,v\rangle$的 Accept 请求.

它要求存在某个议会 Q,使得对于 Q 中的每个参与者 q,都满足 $S_q^p.m = b$.这表明,p 观察到 Q 中每个参与者都回复了编号为 b 的 Prepare 请求.在这种情况下,p 将根据 S^p 确定提议值 v:如果对于所有的参与者 q,都满足 $S_q^p.P.b = -1$(即 p 未观察到某参与者接受过任何提议),则 v 可以为任意值;否则,v 是所有 $S_q^p.P$ 中最大提议编号对应的提议值.然后,p 更新本地状态 $S_p^p.P$ 为$\langle b,v\rangle$,并向其他所有参与者 $q\neq p$ 发送消息 $M_{p\to q} = (S_p^p, S_q^p)$(即 Accept 请求).

在该阶段,有两点需要特别注意:第一,在 TPaxos 中,p 根据它对所有参与者的观察状态确定 v,而不仅限于议会 Q 中的参与者,第 4 节将讨论如何处理这种差别;第二,p 在确定 v 之后,立即将本地状态 $S_p^p.P$ 设置为$\langle b,v\rangle$,第 3 节将论述它可能带来的问题.

- 消息处理子阶段:与准备阶段中的消息处理子阶段相同.

2.2 从Paxos推导TPaxos

如前所述,TPaxos 采用统一的状态与统一的消息类型.这有助于精简而高效的工程实现.但是,这个特点也带来了 TPaxos 与 Paxos 之间的诸多差异,给理解 TPaxos 造成了障碍.本节分 4 个步骤论证如何从 Paxos 推导出 TPaxos,使得 TPaxos 可看作 Paxos 的一种自然变体,更易于理解.

I. 统一状态类型

TPaxos 之所以能够采用统一的状态类型,是因为在 TPaxos 中,每个参与者都同时具有提议者、接受者与学习者的角色.一方面,由于参与者 p 既是提议者也是接受者,所以 p 需要维护状态(m,P),其中,m 是 p 承诺可以接受提议的最小编号,$P=\langle b,v\rangle$是 p 最近一次接受的提议;另一方面,由于 p 也是学习者,它需要在本地判断是否有值/提议已被选中,所以 p 还需要维护它对其他所有参与者的观察状态.综上所述,在 TPaxos 中,每个参与者 p 需要维护一个大小为 N 的状态向量,即 S^p.

II. 统一消息内容

在状态类型统一的基础上,我们进一步要求,每次 p 与 q 通信时,p 将它的真实状态 S_p^p 发送出去.需要注意的是,该步骤并未统一消息类型.这是因为协议还需要在消息中添加类似“1a”,“2a”等标志信息,以区分多个子阶段.第 III 步推导将论述如何统一消息类型.另外,这步推导不要求发送 p 对 q 的观察状态 S_q^p.TPaxos 采用的消息类型 $M_{p\to q} = (S_p^p, S_q^p)$ 中,S_q^p 的作用将在第 IV 步推导中论述.

III. 统一消息类型

Paxos 使用了消息类型以区分 4 个子阶段,为了统一这 4 种消息类型,我们先论证如何统一某些子阶段,然后讨论如何避免通过消息类型区分子阶段.

a) 将子阶段 Phase1b 与 Phase2b 统一为消息处理阶段.

- 一方面,在 Paxos 规约的 *Phase*2*b*(a)动作中,接受者 a 在接受类型为“2a”并且携带提议$\langle m.bal, m.val\rangle$的消息 m 时,不仅更新了$\langle maxVBal[a], maxVVal[a]\rangle$,也同时将 $maxBal[a]$更新为 $m.bal$(条件 $m.bal \geqslant maxBal[a]$成立).也就是说,接受者 a 在接受某提议时,可以同时作出“不再接受具有更小编号的提议”的承诺.
- 另一方面,经过第 II 步的推导,接受者 q 收到的来自 p 的信息 S_p^p 不仅包含提议编号 m,还包含 p 最近接受的提议 $P=\langle b,v\rangle$.根据 Paxos 的 Phase1b 阶段,如果条件 $S_q^q.m < S_p^p.m$ 成立,q 就将 $S_q^q.m$ 更新为 $S_p^p.m$.然而我们注意到,若条件 $S_q^q.m < S_p^p.P.b$ 成立(注意,$S_q^q.m$ 可能已被更新),那么 q 也可以接受提议 $S_p^p.P$.

综上所述,在 Phase1b 与 Phase2b 子阶段,接受者都可以(在各自条件成立的情况下)既作承诺又接受提议.因此,我们可以将这它们统一为一个阶段,即消息处理阶段.需要注意看到,由于在第 II 步推导中,p 不需要发送它对 q 的观察状态 S_q^p,因此第 II 步推导得出的消息处理阶段只包含对 S_q^q 的更新,而不包含对 S_p^q 的更新.此外,q 需要将 S_q^q 回复给 p.与 TPaxos 最终版本不同的是,该回复是无条件执行的.这将在第 IV 步推导中论述.

b) 消除消息标志.

经过前面的推导,目前我们得到的协议包含 3 个阶段,分别是准备阶段、接受阶段与消息处理阶段.为了区分各个阶段,(统一内容的)消息中仍需携带标志信息.下面我们说明这些标志信息是可以避免的.

- 首先,在 Paxos 中,接受者通过判断收到的消息类型是“1*a*”还是“2*a*”来确定进入 Phase1b 还是 Phase2b 子阶段.由于在第 III-a)步推导中,Phase1b 与 Phase2b 被统一成消息处理阶段,所以不需要再区分消息类型“1*a*”与“2*a*”.
- 其次,在 Paxos 的 *Phase*2*a*(*b*,*v*)阶段,提议者需要收集类型为“1*b*”且携带提议编号 *b* 的消息.它们是由接受者发送的针对编号为 *b* 的 *Prepare* 请求的回复.在 TPaxos 中,参与者 *p* 可以通过 $S_q^p.m=b$ 是否成立来判断 *q* 是否发送了这样的回复.
- 最后,在 Paxos 中,接受者使用类型为“2*b*”的消息,将它最新接受的提议通知给学习者.由于在 TPaxos 中,参与者同时具有 3 种角色,因此不再需要发送该类消息.参与者可以根据本地状态向量判断是否有提议已被选中.

IV. 优化消息处理阶段

在第 III-a)步推导中,参与者在消息处理阶段会将自身真实状态无条件地回复给消息的发送者,这导致任意两个参与者之间都会无休止地互相发送消息,交换各自的状态信息.为了避免这种情况,TPaxos 作了如下优化:首先,*p* 发送给 *q* 的消息会携带 *p* 对 *q* 的观察状态,也就是说,统一的消息类型变成 $M_{p\to q}=(S_p^p,S_q^p)$;其次,在 *q* 的消息处理阶段,只有当观察状态 S_q^p 比更新后的 S_q^q 状态要旧时,*q* 才回复消息 $M_{q\to p}=(S_q^q,S_p^q)$ 给 *p*.

3 TPaxos 与 TPaxosAP 的 TLA+规约及证明

本节使用 TLA+描述 TPaxos.我们发现,TPaxos 协议描述中存在至关重要但并未充分阐明的微妙之处:在消息处理阶段,参与者是先作出“不再接受具有更小编号的提议”的承诺还是先接受提议?这可能导致对 TPaxos 的两种不同理解,并促使我们提出 TPaxos 的一种变体,称为 TPaxosAP.在 TPaxosAP 中,参与者先接受提议后作承诺.虽然在 TLA+规约层面,TPaxosAP 与 TPaxos(先作承诺后接受提议)相差甚小,但它却体现了不同的投票机制.具体来讲,Paxos 协议的投票机制 Voting[13]仍适用于 TPaxos,却不能完整刻画 TPaxosAP 的行为.在本节,我们将举例说明 TPaxosAP 与 TPaxos 的不同之处,并论证 TPaxosAP 的正确性.

3.1 TPaxos的TLA+规约

3.1.1 常 量

与 Paxos 对应,TPaxos 的 TLA+规约也包含 3 个常量.

- *Value*:所有可能的提议值构成的集合(例如$\{v_1,v_2,v_3\}$),*None* 表示不属于 *Value* 的某个值.
- *Participant*:所有参与者构成的集合(例如$\{p_1,p_2,p_3\}$),每个参与者都同时是提议者、接受者与学习者.
- *Quorum*:由参与者形成的议会系统.

为了避免多个参与者使用相同的提议编号发起多个 Accept 请求,我们使用 *Bals*(*p*)为参与者预分配可用的提议编号[3](如,p_1 使用{1,4},p_2 使用{2,5},p_3 使用{3,6})(Paxos 规约未采用预分配提议编号的方式.这有两个原因:第一,在 *Phase*1*a*(*b*)与 *Phase*2*a*(*b*,*v*)阶段,提议者并不改变自身状态,所以可由任意提议者执行;第二,它在 *Phase*2*a*(*b*,*v*)中,通过消息类型限制了最多只会产生一个针对提议编号 *b* 的 Accept 请求).其中,*Ballot* 是所有可能的提议编号构成的集合,*NP* 是参与者数目,PIndex 为参与者分配了索引.

3.1.2 变 量

在 TPaxos 中,每个参与者都维护一个状态向量,包含自身的实际状态以及它对其他参与者的观察状态.参与者之间交换具有统一类型的消息,不断更新状态向量,进而达成共识.因此,TPaxos 的 TLA+规约需要维护如下变量.

- *state*:全局状态矩阵.其中,*state*[*p*][*q*]表示参与者 *p* 对参与者 *q* 的观察状态(即 S_q^p),*state*[*p*]则表示 *p* 维护的状态向量(即 S^p).每个状态(定义见 state)包含 3 个分量(*maxBal*,*maxVBal*,*maxVVal*),含义与第 2.1 节

中的(*m*,*b*,*v*)一一对应.

- *msgs*:所有已发送消息构成的集合.*Message* 表示所有可能的消息,它定义了格式统一的消息.需要注意看到,为了简化消息广播过程,我们选择每次发送整个状态向量.消息接收者可以根据需要提取协议规定的部分状态信息进行处理.

TypeOK 给出了变量 *state* 与 *msgs* 的类型约束.*Init* 给出了初始状态下变量 *state* 与 *msgs* 的值.

```
MODULE TPaxos
EXTENDS Integers, FiniteSets

CONSTANTS
        Participant,    参与者集合
        Value,          参与者提出的值集合
        Quorum
None ≜ CHOOSE b : b ∉ Value 不属于集合 Value 的特殊值
NP ≜ Cardinality(Participant) 参与者数量
Quorum ≜ {Q ∈ SUBSET Participant : Cardinality(Q) * 2 ≥ NP + 1}
ASSUME QuorumAssumption ≜
          ∧ ∀ Q ∈ Quorum : Q ⊆ Participant
          ∧ ∀ Q1, Q2 ∈ Quorum : Q1 ∩ Q2 ≠ {}
Ballot ≜ Nat
Max(m, n) ≜ IF m > n THEN m ELSE n
Injective(f) ≜ ∀ a, b ∈ DOMAIN f : (a ≠ b) ⇒ (f[a] ≠ f[b])
PIndex ≜ CHOOSE f ∈ [Participant → 1 .. NP] : Injective(f)
Bals(p) ≜ {b ∈ Ballot : b%NP = PIndex[p] − 1} 将编号 b 分配给每个参与者

State ≜ [maxBal : Ballot ∪ {−1},
         maxVBal : Ballot ∪ {−1}, maxVVal : Value ∪ {None}]
InitState ≜ [maxBal ↦ −1, maxVBal ↦ −1, maxVVal ↦ None]
Message ≜ [from : Participant,
           to : SUBSET Participant, state : [Participant → State]]

VARIABLES
        state,    state[p][q]: 参与者 p 对参与者 q 的观察状态
        msgs      所有发送消息的集合
vars ≜ ⟨state, msgs⟩
TypeOK ≜ ∧ state ∈ [Participant → [Participant → State]]
         ∧ msgs ⊆ Message
Init ≜   ∧ state = [p ∈ Participant ↦ [q ∈ Participant ↦ InitState]]
         ∧ msgs = {}
Send(m) ≜ msgs′ = msgs ∪ {m}
```

3.1.3 动 作

TPaxos 包含 3 个动作,分别是发起准备请求、消息处理以及发起接受请求.

- *Prepare*(*p*,*b*):参与者 *p* 选取提议编号 *b*,发起 Prepare 请求.它要求 *b* 是预分配给 *p* 的编号,并且 *b*>*state*[*p*][*p*].*maxBal*.*p* 先将 *state*[*p*][*p*].*maxBal* 更新为 *b*,然后广播当前本地状态向量 *state*′[*p*].

```
参与者 p 选择一个大于 state[p][p].maxBal 的编号值 b 开始 Prepare 阶段
Prepare(p, b) ≜
          ∧ b ∈ Bals(p)
          ∧ state[p][p].maxBal < b
          ∧ state′ = [state EXCEPT ![p][p].maxBal = b]
          ∧ Send([from ↦ p, to ↦ Participant, state ↦ state′[p]])
```

- *OnMessage*(*q*):参与者 *q* 处理收到的消息 *m*∈*msgs*.消息 *m* 的发送者记为 *p*≜*m*.*from*.表达式 *m*.*state*[*p*]从消息 *m* 中抽取 *p* 发送的自身真实状态.*q* 先根据 *m*.*state*[*p*]更新本地状态向量,包括 *q* 的真实状态

state[*q*][*q*]以及 *q* 对 *p* 的观察状态 *state*[*q*][*p*],见 *UpdateState*(*q*,*p*,*pp*≜*m.state*[*p*]).其中,前 3 条更新观察状态,后 3 条更新真实状态,如第 2.1 节所述,包括“先作承诺(将 *state*[*q*][*q*].*maxBal* 更新为 *pp.maxBal*)后接受(分别将 *state*[*q*][*q*].*maxVBal* 与 *state*[*q*][*q*].*maxVVal* 更新为 *pp.maxVBal* 与 *pp.maxVVal*)”这两个步骤.然后,如果 *p* 对 *q* 的观察状态 *m.state*[*q*]比更新后的 *state′*[*q*][*q*]状态要旧,则 *q* 广播当前本地状态向量 *state′*[*q*].最后,为了避免 *q* 不必要地重复处理消息 *m*,该规约将 *q* 从 *m.to* 中移除.

```
参与者 q 收到来自 p 的消息, 根据消息中携带的 pp 信息来更新自身状态 state[q], 该函数被函数
OnMessage(q) 调用.(pp = m.state[p], pp 可能不等于此时 p 的真实状态 state[p][p])
UpdateState(q, p, pp) ≜
    LET maxB ≜ Max(state[q][q].maxBal, pp.maxBal)
    IN  state′ = [state EXCEPT
                  ![q][p].maxBal = Max(@, pp.maxBal),   作承诺
                  ![q][p].maxVBal = Max(@, pp.maxVBal),
                  ![q][p].maxVVal = IF state[q][p].maxVBal < pp.maxVBal
                                    THEN pp.maxVVal ELSE @,
                  ![q][q].maxBal = maxB,   先承诺后接受
                  ![q][q].maxVBal = IF maxB ≤ pp.maxVBal   接受
                                    THEN pp.maxVBal ELSE @,
                  ![q][q].maxVVal = IF maxB ≤ pp.maxVBal   接受
                                    THEN pp.maxVVal ELSE @]
参与者 q 收到消息并处理
OnMessage(q) ≜
    ∃ m ∈ msgs :
      ∧ q ∈ m.to
      ∧ LET p ≜ m.from
        IN  UpdateState(q, p, m.state[p])
      ∧ LET qm ≜ [from ↦ m.from, to ↦ m.to \ {q}, state ↦ m.state]
            nm ≜ [from ↦ q, to ↦ {m.from}, state ↦ state′[q]]   新消息
        IN  IF ∨ m.state[q].maxBal < state′[q][q].maxBal
               ∨ m.state[q].maxVBal < state′[q][q].maxVBal
            THEN msgs′ = (msgs \ {m}) ∪ {qm, nm}
            ELSE msgs′ = (msgs \ {m}) ∪ {qm}
```

- *Accept*(*p*,*b*,*v*):参与者 *p* 发起针对提议⟨*m*,*b*,*v*⟩的 Accept 请求.
  - 第 1 个前置条件要求提议编号 *b* 是参与者 *p* 的预分配编号,从而避免多个参与者使用相同的提议编号 *b* 发起多个 Accept 请求.
  - 第 2 个前置条件避免参与者接受违背其承诺的提议.下面我们通过示例论述该条件的必要性.假设有 5 个参与者 p_1~p_5,见图 3.首先,p_1 执行 *Prepare*(1).p_2~p_5 收到该 Prepare 请求后,更新状态并回复 p_1.此时,所有参与者的状态如图 3 第 1 行所示.接着,p_2 执行 *Prepare*(2).p_1 和 p_3 收到该 Prepare 请求后,更新状态并回复 p_2,见图 3 第 2 行.然后,p_2 执行 *Accept*(2,v_1).p_1 收到该 Accept 请求并更新状态,见图 3 第 3 行.此时,p_1 观察到存在议会 p_3~p_5,它们的 *maxBal* 为 1.如果没有前置条件 2=*state*[*p*][*p*].*maxBal*≤*b*=1,则 p_1 可以执行 *Accept*(1,v_1),并接受提议⟨1,v_1⟩.这违背了它“不再接受编号小于 *state*[*p*][*p*].*maxBal*=2 的提议”的承诺.
  - 前 3 个前置条件共同保证 *OneValuePerBallot* 成立,证明见第 3.3 节.其中,如果第 3 个前置条件不成立,即 *state*[*p*][*p*].*maxVBal*=*b*,则表示 *p* 已经执行过一个 *Accept*(*p*,*b*,*v*).然而,仅有第 3 个前置条件并不能避免 *p* 多次执行 *Accept*(*p*,*b*,*v*).这是因为,*p* 可能会在之后的 *OnMessage* 动作中接受具有更大编号的提议,从而使得 *state*[*p*][*p*].*maxVBal*>*b*.
  - 第 4 个前置条件要求存在某个议会 *Q*∈*Quorum*,使得 *Q* 中的每个参与者 *q* 都回复了针对 *b* 的 Prepare 请求,即有 *state*[*p*][*q*].*maxBal*=*b*.
  - 第 5 条合取式描述了根据本地状态向量 *state*[*p*]确定值 *v* 的方法.第 6 条合取式更新 *p* 的真实状态,

即 p 接受了提议$\langle b,v\rangle$.第 7 条合取式表示向其他参与者广播本地状态向量 $state'[p]$.

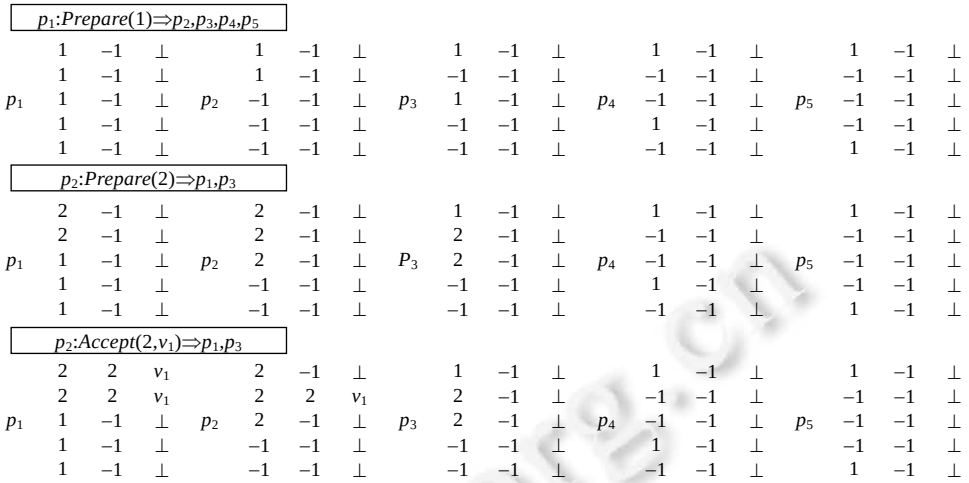


Fig.3 An illustration for the second precondition $state[p][p].maxBal \leqslant b$ of $Accept(p,b,v)$

图 3 针对 $Accept(p,b,v)$的第 2 个前置条件 $state[p][p].maxBal \leqslant b$ 的示例

```
参与者 p 选择提议编号 b(b 应该等于 Prepare 阶段的 b) 和值 v,v 的选择和 Paxos 选择方式是相同的.
Accept(p, b, v) ≜
    ∧ b ∈ Bals(p)
    ∧ state[p][p].maxBal ⩽ b      对应于 Voting 中第 1 条合取式
    ∧ state[p][p].maxVBal ≠ b     对应于 Voting 中第 2 条合取式
    ∧ ∃ Q ∈ Quorum :              收集到了" 足够" 的针对 Prepare(p, b) 的回复
          ∧ ∀ q ∈ Q : state[p][q].maxBal = b
      从本地所有状态选值
    ∧ ∨ ∀ q ∈ Participant : state[p][q].maxVBal = −1   选择自己的值
      ∨ ∃ q ∈ Participant :       v 是提议编号最大的提议对应的值
          ∧ state[p][q].maxVVal = v
          ∧ ∀ r ∈ Participant : state[p][q].maxVBal ⩾ state[p][r].maxVBal
    ∧ state' = [state EXCEPT ![p][p].maxVBal = b,
                             ![p][p].maxVVal = v]
    ∧ Send([from ↦ p, to ↦ Participant, state ↦ state'[p]])
```

3.1.4 行 为

Next 定义了次态关系.*Spec* 定义了完整的行为规约.

```
Next ≜ ∃ p ∈ Participant : ∨ OnMessage(p)
                           ∨ ∃ b ∈ Ballot : ∨ Prepare(p, b)
                                            ∨ ∃ v ∈ Value : Accept(p, b, v)
Spec ≜ Init ∧ □[Next]_vars
```

3.2 TPaxosAP的TLA+规约

TPaxosAP 与 TPaxos 的唯一不同在于:在消息处理阶段,*OnMessage*(*q*)的 *UpdateState*(*q*,*p*,*pp*)中,参与者 *q* 先接受提议$\langle pp.maxVBal,pp.maxVVal\rangle$后作承诺.

需要注意看到,在 TLA+规约中,判断 *q* 能否接受提议的条件 $state[q][q].maxBal \leqslant pp.maxBal$ 中使用的是当前值 $state[q][q].maxBal$,而不是像 TPaxos 那样使用了先作承诺而更新后的 *maxB*.

```
参与者 q 收到来自 p 的消息, 根据消息中携带的 pp 信息来更新自身状态 state[q], 该函数被函数
OnMessage(q) 调用.(pp = m.state[p], pp 可能不等于此时 p 的真实状态 state[p][p])
UpdateState(q, p, pp) ≜
  state' = [state EXCEPT
            ![q][p].maxBal = Max(@, pp.maxBal),   作承诺
            ![q][p].maxVBal = Max(@, pp.maxVBal),
            ![q][p].maxVVal = IF state[q][p].maxVBal < pp.maxVBal
                              THEN pp.maxVVal ELSE @,
            ![q][q].maxBal = Max(@, pp.maxBal),   作承诺
            ![q][q].maxVBal = IF state[q][q].maxBal ≤ pp.maxVBal   接受
                              THEN pp.maxVBal ELSE @,
            ![q][q].maxVVal = IF state[q][q].maxBal ≤ pp.maxVBal   接受
                              THEN pp.maxVVal ELSE @]
```

下面我们举例说明 TPaxosAP 与 TPaxos 的不同之处.假设某参与者 *q* 收到了来自 *p* 的消息,消息内容包含⟨*m*,*b*,*v*⟩≜⟨*state*[*p*][*p*].*maxBal*,*state*[*p*][*p*].*maxVBal*,*state*[*p*][*p*].*maxVVal*⟩,且 *m*>*b*.如果 *p* 的状态“领先”于 *q*,比如 *p* 比 *q* 多执行过几次 *Prepare* 与 *Accept*,则对 TPaxos 与 TPaxosAP 来说,*q* 都可以在 *OnMessage*(*q*)中既作承诺又接受提议.具体而言,在 TPaxosAP 中,⟨*state*[*q*][*q*].*maxBal*,*state*[*q*][*q*].*maxVBal*,*state*[*q*][*q*].*maxVVal*⟩被更新为⟨*m*,*b*,*v*⟩.这可以看作 *q* 先将其更新为⟨*b*,*b*,*v*⟩,然后再更新为⟨*m*,*b*,*v*⟩,相当于 *q* 先处理了针对提议⟨*b*,*v*⟩的 Accept 请求,然后处理了针对提议编号 *m* 的 Prepare 请求.然而在 TPaxos 中,*q* 会将它的真实状态更新为⟨*m*,–,–⟩(–表示相应分量保持不变).这相当于 *q* 先处理了针对提议编号 *m* 的 Prepare 请求,从而导致它不能再接受提议⟨*b*,*v*⟩.

我们将在第 4 节中论述 TPaxosAP 和 TPaxos 代表两种不同的投票机制.然而除了上述情况,TPaxosAP 与 TPaxos 在实际应用中没有较大区别.

3.3 TPaxos与TPaxosAP的正确性

我们证明 TPaxos 与 TPaxosAP 满足第 1.5 节介绍的两个条件 *OneValuePerBallot* 与 *SafeAt*(*b*,*v*),从而保证了一致性(consistency)条件.*SafeAt*(*b*,*v*)由 *Accept* 动作的第 4 个和第 5 个合取式(确定值 *v*)保证,其证明与 Lamport 使用 TLAPS 证明 Paxos 的子阶段 Phase2a 保证了 *SafeAt*(*b*,*v*)[21]类似.下面我们证明 TPaxos 与 TPaxosAP 满足 *OneValuePerBallot*.该证明仅用到 *Accept* 动作的前 3 个前置条件,因此对 TPaxos 与 TPaxosAP 都适用.我们先介绍两个简单的引理.

引理 1. 对任意参与者 *p*,它接受过的提议编号 *state*[*p*][*p*].*maxVBal* 是(非严格)单调递增的.

引理 2. 对任意参与者 *p*,它承诺可以接受提议的最小编号始终大于等于它接受过的提议编号,即满足:

$$state[p][p].maxBal \geqslant state[p][p].maxVBal.$$

OneValuePerBallot 保证对于任意提议编号 *b*,最多对应一个提议⟨*b*,*v*⟩,即最多执行一次 *Accept*(_,*b*,_)(_表示该分量可为任意值).注意到 *Accept*(_,*b*,_)的第 1 个前置条件 *b*∈*Bals*(*p*)要求,只有 *b* 的拥有者 *p* 才能使用 *b* 执行 *Accept*(*p*,*b*,_),故只需要保证参与者 *p* 最多执行一次 *Accept*(*p*,*b*,_)即可保证 *OneValuePerBallot*.

假设在时刻 *t*,参与者 *p* 执行了 *Accept*(*p*,*b*,_),此时 *state*[*p*][*p*].*maxVBal*=*b*.由 *Accept*(*p*,*b*,_)的第 3 个前置条件 *state*[*p*][*p*].*maxVBal*≠*b* 可知,*p* 不能在 *state*[*p*][*p*].*maxVBal*=*b* 的情况下执行 *Accept*(*p*,*b*,_).

根据引理 1,在任意时刻 *t'*≥*t*,都有 *state*[*p*][*p*].*maxVBal*≥*b*.当 *state*[*p*][*p*].*maxVBal*>*b* 时,根据引理 2 可得,*state*[*p*][*p*].*maxBal*≥*state*[*p*][*p*].*maxVBal*>*b*.由于 *Accept*(*p*,*b*,_)的第 2 个前置条件 *state*[*p*][*p*].*maxBal*≤*b* 的限制,*p* 在时刻 *t'*≥*t* 也不能执行 *Accept*(*p*,*b*,_).综上所述,对于提议编号 *b*,它的拥有者 *p* 最多只能使用 *b* 执行一次 *Accept*(*p*,*b*,_),从而保证了 *OneValuePerBallot*.

4 TPaxos 与 TPaxosAP 的精化

本节建立从 TPaxos 到 Consensus 以及 TPaxosAP 到 Consensus 的精化关系.对于 TPaxos,我们仍采用 Paxos 所使用的 Voting[13]机制(第 1.5 节),建立了从 TPaxos 到 Voting 的精化关系.对于 TPaxosAP,我们发现 Voting 并不

能完整刻画 TPaxosAP 的行为,因此,我们首先提出了一种新的投票机制,称作 EagerVoting.EagerVoting 允许参与者在接受提议的同时,作出比 Paxos/TPaxos 更“激进”的“不再接受具有更小编号的提议”的承诺.然后,我们建立了从 TPaxosAP 到 EagerVoting 以及从 EagerVoting 到 Consensus 的精化关系.

需要注意看到,在 TPaxos 与 TPaxosAP 规约的 *Accept*(*p*,*b*,*v*)动作中,参与者 *p* 在前置条件满足的情况下,需要根据本地状态向量 *state*[*p*]确定值 *v*.然而,在 Voting(第 1.5 节)与 EagerVoting(将在第 4.2.1 节介绍)的 *VoteFor*(*a*,*b*,*v*)动作中,参与者需要根据某个议会的状态(而不是所有参与者)确定值 *v*.这并不会影响协议的正确性.但是不难论证:存在某些情况,使得两种方案确定的 *v* 值不同.这给构建从 TPaxos 到 Voting 以及从 TPaxosAP 到 EagerVoting 的精化关系造成了障碍.为此,在本节,我们修改 TPaxos 与 TPaxosAP 的 *Accept*(*p*,*b*,*v*)动作,改用“从议会确定值 *v*”的方案(我们将如下两个相关问题列入未来工作:第一,如何修改 Voting 的 *VoteFor* 动作,使其采用“从全体参与者确定值 *v*”的方案?第二,如何在采用不同(“确定值 *v*”的)方案的 Voting 之间建立精化关系?).修改后的 *Accept*(*p*,*b*,*v*)动作如下所示.

$$
\begin{array}{l}
\text{参与者 } p \text{ 选择提议编号 } b(b \text{ 应该等于 Prepare 阶段的 } b) \text{ 和值 } v,v \text{ 的选择和 Paxos 选择方式是相同的} \\
Accept(p,\ b,\ v)\ \triangleq \\
\quad \land\ b \in Bals(p) \\
\quad \land\ state[p][p].maxBal \leqslant b \quad \text{对应于 } Voting \text{ 中第 1 条合取式} \\
\quad \land\ state[p][p].maxVBal \neq b \quad \text{对应于 } Voting \text{ 中第 2 条合取式} \\
\quad \text{从本地一个议会中的状态选值} \\
\quad \land \exists\, Q \in Quorum : \quad \text{收集到了“足够”的针对 } Prepare(p,\ b) \text{ 的回复} \\
\qquad \land \forall\, q \in Q : state[p][q].maxBal = b \\
\qquad \land\ \lor \forall\, q \in Participant : state[p][q].maxVBal = -1 \quad \text{自己的值} \\
\qquad\quad \lor \exists\, q \in Participant : \quad v \text{ 是提议编号最大的提议对应的值} \\
\qquad\qquad \land\ state[p][q].maxVVal = v \\
\qquad\qquad \land \forall\, r \in Participant : state[p][q].maxVBal \geqslant state[p][r].maxVBal \\
\quad \land\ state' = [state \text{ EXCEPT } ![p][p].maxVBal = b, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad ![p][p].maxVVal = v] \\
\quad \land\ Send([from \mapsto p,\ to \mapsto Participant,\ state \mapsto state'[p]])
\end{array}
$$

4.1 TPaxos的精化

TPaxos 采取了与 Paxos 相同的投票机制,都可以用 Voting[21]规约(第 1.5 节)来刻画.本节构建从 TPaxos 到 Voting 的精化关系.TPaxos 中的动作与 Voting 中的动作存在着明确的对应关系.具体而言,

- 在 TPaxos 的 *Preapare*(*p*,*b*)中,参与者 *p* 将 *state*[*p*][*p*].*maxBal* 增加至更大的提议编号 *b*.这对应于 Voting 中的 *IncreaMaxBal*(*a*,*b*)动作(此处 *a*=*p*).具体而言,*Prepare*(*p*,*b*)中的前置条件 *state*[*p*][*p*].*maxBal*<*b* 对应于 *IncreaMaxBal*(*a*,*b*)中的前置条件 *maxBal*[*a*]<*b*.另外,*Prepare*(*p*,*b*)中的状态更新(将 *state*[*p*][*p*].*maxBal* 更新为 *b*)也对应于 *IncreaMaxBal*(*a*,*b*)中的状态更新(将 *maxBal*[*a*]更新为 *b*).
- 在 TPaxos 的 *Accept*(*p*,*b*,*v*)中,参与者 *p* 在确定值 *v* 之后,随即接受了提议⟨*b*,*v*⟩.这对应于 Voting 中的 *VoteFor*(*a*,*b*,*v*)动作(此处 *a*=*p*).具体而言,
  - *Accept*(*p*,*b*,*v*)中的第 2 个前置条件 *state*[*p*][*p*].*maxBal*≤*b* 与第 3 个前置条件 *state*[*p*][*p*].*maxVBal*≠*b* 分别对应于 *VoteFor*(*a*,*b*,*v*)中的第 1 个前置条件 *maxBal*[*a*]≤*b* 与第 2 个前置条件:
    $$\forall vt \in votes[a]: vt[1] \neq b.$$
  - *VoteFor*(*a*,*b*,*v*)中的第 3 个前置条件$\forall c \in Acceptor \setminus \{a\}: \forall vt \in votes[c]: (vt[1]=b) \Rightarrow (vt[2]=v)$与第 2 个前置条件共同保证 *OneValuePerBallot*.在 *Accept*(*p*,*b*,*v*)中,*OneValuePerBallot* 由它的前 3 个前置条件共同保证.
  - *Accept*(*p*,*b*,*v*)“从议会 *Q*∈*Quorum* 确定值 *v*”的方法与 *VoteFor*(*a*,*b*,*v*)中的 *ShowsSafeAt*(*Q*,*b*,*v*)对应.
  - *Accept*(*p*,*b*,*v*)中的状态更新(分别将 *state*[*p*][*p*].*maxVBal* 与 *state*[*p*][*p*].*maxVVal* 更新为 *b* 与 *v*)对应于 *VoteFor*(*a*,*b*,*v*)中对 votes 的更新(将提议⟨*b*,*v*⟩加入到 *votes*[*a*]中),表示参与者 *a*(即 *p*)接受了提议⟨*b*,*v*⟩.
  - *VoteFor*(*a*,*b*,*v*)会将 *max*[*a*]更新为 *b*.对于 TPaxos,参与者 *p* 可以执行 *Accept*(*p*,*b*,*v*),表明 *p* 已执行

过 *Prepare*(*p*,*b*)并更新了 *state*[*p*][*p*].*maxBal*=*b*.根据第 3.1.3 节对前置条件 *state*[*p*][*p*].*maxBal*≤*b* 的分析可知:在 *p* 执行 *Accept*(*p*,*b*,*v*)时,*state*[*p*][*p*].*maxBal*=*b* 仍然成立.

- 现在考虑 TPaxos 中的 *OnMessage*(*q*)动作(第 3.1 节).参与者 *q* 收到了来自 *p*≜*m*.*from* 的消息 *m*∈*msgs*.记 *pp*≜*m*.*state*[*p*]为 *m* 中携带的 *p* 的真实状态,即(*pp*.*maxBal*,*pp*.*maxVBal*,*pp*.*maxVVal*).在 *UpdateState*(*q*,*p*,*pp*)中,*q* 需要根据 *pp* 更新自身真实状态 *state*[*q*][*q*].这里可能有两种更新结果:
  - 第 1 种是只"作承诺",即将 *state*[*q*][*q*].*maxBal* 更新至 *pp*.*maxBal*.此时,"接受提议"的条件不再成立.这种情况对应于 Voting 中的 *IncreaMaxBal*(*a*,*b*)动作(此处 *a*=*p*,*b*=*pp*.*maxBal*).
  - 第 2 种是"作承诺"且"接受提议",即将 *state*[*q*][*q*].*maxBal* 更新至 *pp*.*maxBal*,并且分别将 *state*[*q*][*q*].*maxVBal* 与 *state*[*q*][*q*].*maxVVal* 更新为 *pp*.*maxVBal* 与 *pp*.*maxVVal*.这要求 *state′*[*q*][*q*].*maxBal*=*pp*.*maxBal*=*pp*.*maxVBal* 成立(*state′*[*q*][*q*].*maxBal* 为"作承诺"更新后的值).因此,这种情况对应于 Voting 中的 *VoteFor*(*a*,*b*,*v*)动作(此处 *a*=*p*,*b*=*pp*.*maxVBal*,*v*=*pp*.*maxVVal*).

```
------------------ MODULE TPaxosWithVotes ------------------
EXTENDS TPaxos
VARIABLE votes   votes[q]: 参与者 q 接受过的提议集合
varsV ≜ ⟨vars, votes⟩
------------------------------------------------------------
InitV ≜
        ∧ Init
        ∧ votes = [q ∈ Participant ↦ {}]
TypeOKV ≜
          ∧ votes ∈ [Participant → SUBSET (Ballot × Value)]
          ∧ TypeOK
------------------------------------------------------------
PrepareV(p, b) ≜
          ∧ Prepare(p, b)
          ∧ votes′ = votes
AcceptV(p, b, v) ≜
        ∧ Accept(p, b, v)
        ∧ votes′ = [votes EXCEPT ![p] = @ ∪ {⟨b, v⟩}]   收集提议 ⟨b, v⟩
OnMessageV(q) ≜
        ∧ OnMessage(q)
        ∧ IF state′[q][q].maxVBal ≠ state[q][q].maxVBal   接受了新提议
          THEN votes′ = [votes EXCEPT ![q] = @ ∪   收集接受的新提议
                          {⟨state′[q][q].maxVBal, state′[q][q].maxVVal⟩}]
          ELSE UNCHANGED votes
------------------------------------------------------------
NextV ≜ ∃ p ∈ Participant :
            ∨ OnMessageV(p)
            ∨ ∃ b ∈ Ballot : ∨ PrepareV(p, b)
                             ∨ ∃ v ∈ Value : AcceptV(p, b, v)
SpecV ≜ InitV ∧ □[NextV]_varsV
------------------------------------------------------------
maxBal ≜ [p ∈ Participant ↦ state[p][p].maxBal]
V ≜ INSTANCE Voting WITH Acceptor ← Participant
                         votes ← votes, maxBal ← maxBal
THEOREM SpecV ⇒ V!Spec
------------------------------------------------------------
```

为了构建从 TPaxos 到 Voting 的精化关系,我们需要在 TPaxos 规约中模拟 Voting 中的变量 *maxBal* 与 *votes*,即参与者承诺可以接受提议的最小编号以及已接受的提议构成的集合,见模块 *TPaxosWithVotes*.从上面的分析可以得出,Voting 中的 *maxBal*[*p*]对应于 TPaxos 中的 *state*[*p*][*p*].*maxBal*.因此,针对 *maxBal*,我们定义精化映射为 *maxBal*≜[*p*∈*Participant*↦*state*[*p*][*p*].*maxBal*].对于 *votes*,我们在 TPaxos 的基础上添加辅助变量 *votes*[15,22](在

TPaxosWithVotes 模块中,故与 Voting 中的 *votes* 冲突),为每个参与者 *p* 收集它已接受过的提议 *votes*[*p*].具体而言,在 *Prepare*(*p*,*b*)中,参与者 *p* 未接受任何提议,所以在 *PrepareV*(*p*,*b*)中,*votes* 保持不变.在 *Accept*(*p*,*b*,*v*)中,参与者 *p* 接受了提议⟨*b*,*v*⟩,所以在 *AcceptV*(*p*,*b*,*v*)中,我们将⟨*b*,*v*⟩添加到 *votes*[*p*].在 *OnMessage*(*q*)中,如果 *state*[*q*][*q*].*maxVBal* 发生了改变,则表明 *q* 接受了新的提议(这是因为 *OneValuePerBallot* 成立).在 *OnMessageV*(*q*)中,我们将该提议添加到 *votes*[*q*].最后,*TPaxosWithVotes* 模块给出了从 TPaxos 到 Voting 的精化映射(即用辅助变量替换 Voting 中的对应变量):*V*≜INSTANCE Voting WITH *Acceptor*←*Participant*,*maxBal*←*maxBal*,*votes*←*votes*.

MODULE *EagerVoting*

EXTENDS *Sets*

CONSTANT $Value$, $Acceptor$, $Quorum$

ASSUME $QuorumAssumption \triangleq$
$\land \forall Q \in Quorum : Q \subseteq Acceptor$
$\land \forall Q1, Q2 \in Quorum : Q1 \cap Q2 \neq \{\}$

$Ballot \triangleq Nat$

VARIABLES $votes$, $maxBal$

$TypeOK \triangleq \land votes \in [Acceptor \to \text{SUBSET } (Ballot \times Value)]$
$\land maxBal \in [Acceptor \to Ballot \cup \{-1\}]$

$VotedFor(a, b, v) \triangleq \langle b, v\rangle \in votes[a]$

$DidNotVoteAt(a, b) \triangleq \forall v \in Value : \neg VotedFor(a, b, v)$

$ShowsSafeAt(Q, b, v) \triangleq$
$\land \forall a \in Q : maxBal[a] \geq b$ 承诺过
$\land \exists c \in -1 \,..\, (b-1) :$
$\land (c \neq -1) \Rightarrow \exists a \in Q : VotedFor(a, c, v)$
$\land \forall d \in (c+1) \,..\, (b-1), a \in Q : DidNotVoteAt(a, d)$

$Init \triangleq$
$\land votes = [a \in Acceptor \mapsto \{\}]$
$\land maxBal = [a \in Acceptor \mapsto -1]$

$IncreaseMaxBal(a, b) \triangleq$
$\land maxBal[a] < b$
$\land maxBal' = [maxBal \text{ EXCEPT } ![a] = b]$ 作承诺
$\land \text{UNCHANGED } votes$

EagerVoting 和 *Voting* 的唯一区别在于: 在 *Voting* 中, 我们只更新 $maxBal$ 为 b, 即 $maxBal' = [maxBal \text{ EXCEPT } ![a] = b]$.

$VoteFor(a, b, v) \triangleq$
$\land maxBal[a] \leq b$ 不违背承诺
$\land \forall vt \in votes[a] : vt[1] \neq b$
$\land \forall c \in Acceptor \setminus \{a\} :$
$\forall vt \in votes[c] : (vt[1] = b) \Rightarrow (vt[2] = v)$
$\land \exists Q \in Quorum : ShowsSafeAt(Q, b, v)$ 提议 $\langle b, v\rangle$ 是安全的, 能够投票
$\land votes' = [votes \text{ EXCEPT } ![a] = votes[a] \cup \{\langle b, v\rangle\}]$ 投票
$\land \exists c \in Ballot :$
$\land c \geq b$
$\land maxBal' = [maxBal \text{ EXCEPT } ![a] = c]$ 作承诺

$Next \triangleq$
$\exists a \in Acceptor, b \in Ballot :$
$\lor IncreaseMaxBal(a, b)$
$\lor \exists v \in Value : VoteFor(a, b, v)$

$Spec \triangleq Init \land \Box[Next]_{\langle votes, maxBal\rangle}$

4.2 TPaxosAP的精化

我们先介绍适用于 TPaxosAP 的投票机制 EagerVoting,然后建立从 TPaxosAP 到 EagerVoting 以及从 EagerVoting 到 Consensus 的精化关系.

4.2.1 EagerVoting 规约

根据第 4.1 节的分析,在 TPaxos 中,每个参与者 p 要么仅提高它承诺不再接受的最小提议编号 *state*[*p*][*p*].*maxBal*,要么在接受提议⟨*b*,*v*⟩的同时,也将 *state*[*p*][*p*].*maxBal* 更新为 *b*.这与 Voting 规约是相符的.然而,Voting 并不能完全刻画 TPaxosAP 的行为.如第 3.2 节所述,TPaxosAP 与 TPaxos 的行为在 *OnMessage*(*q*)消息处理阶段的状态更新 *UpdateState*(*q*,*p*,*pp*)方面有所不同:在 TPaxosAP 中,参与者先接受提议⟨*pp.maxVBal*,*pp.maxVVal*⟩(即更新 *state*[*q*][*q*].*maxVBal* 与 *state*[*q*][*q*].*maxVVal*)后作承诺(即将 *state*[*p*][*p*].*maxBal* 提高至 *pp.maxBal*).这可能导致更新后的 *state*[*p*][*p*].*maxBal* 不等于 *pp.maxVBal*,从而违反了 Voting 规约.

这种情况是有可能发生的.考虑如下示例.

假设有 3 个参与者 p_1~p_3,p_1 先执行 *Prepare*(1).p_2,p_3 收到该 Prepare 请求后更新状态并回复 p_1.接着,p_1 执行 *Accept*(1,v_1)以及 *Prepare*(2),并发送携带⟨2,1,v_1⟩的 Prepare 请求.如果 p_2 与 p_3 收到该请求并将自身状态更新为⟨2,1,v_1⟩,则违反了 Voting 规约.

为了弥补 Voting 的不足,我们提出一种新的适用于 TPaxosAP 的投票机制,称为 EagerVoting.EagerVoting 与 Voting 的唯一不同在于:在 *VoteFor*(*a*,*b*,*v*)动作中,我们允许参与者 *a* 在接受提议⟨*b*,*v*⟩的同时,将 *maxBal*[*a*]提高到比 *b* 更大的提议编号 $c \geqslant b$.

直观地讲,Voting 与 EagerVoting 是等价的.

- 一方面,由于 Voting 的每个动作都是 EagerVoting 所允许的,因此 Voting 的每个行为也都是 EagerVoting 所允许的.
- 另一方面,如果 EagerVoting 的动作 *VoteFor*(*a*,*b*,*v*)在更新 *maxBal*[*a*]时选择的提议编号 *c* 等于 *b*,则该动作与 Voting 中的 *VoteFor*(*a*,*b*,*v*)等价;如果 *c* 大于 *b*,则该动作可以看作 Voting 中的 *VoteFor*(*a*,*b*,*v*)与 *IncreaseMaxBal*(*a*,*c*)的组合.

因此,EagerVoting 的每个行为都可以被 Voting 中的行为所模拟(如果要使用精化技术严格证明 EagerVoting 可以被 Voting 所以模拟,需要找到从 EagerVoting 到 Voting 的精化映射.我们将其列为未来工作).

4.2.2 从 EagerVoting 到 Consensus 的精化

为了构建从 EagerVoting 到 Consensus 的精化关系,我们需要在 EagerVoting 中模拟 Consensus 规约中的变量 *chosen*,即协议已选中的值构成的集合,见 *EagerVotingWithChosen*.一个提议 *b*,*v* 以及它包含的值被选中当且仅当该存在某个议会 *Q*∈*Quorum* 的接受者都接受了该提议,见 *ChosenAt*(*b*,*v*).辅助变量 *chosen* 则收集了所有被选中的值.最后,该模块给出了从 EagerVoting 到 Consensus 的精化映射 *C*≜INSTANCE Consensus WITH *Acceptor*←*Acceptor*,*chosen*←*chosen*,即用辅助变量 *chosen* 替换 Consensus 中的变量 *chosen*.

```
MODULE EagerVotingWithChosen
EXTENDS EagerVoting

ChosenAt(b, v) ≜
    ∃ Q ∈ Quorum : ∀ a ∈ Q : VotedFor(a, b, v)
chosen ≜ {v ∈ Value : ∃ b ∈ Ballot : ChosenAt(b, v)}
Consensus ≜ chosen = {} ∨ ∃ v ∈ Value : chosen = {v}   |chosen| ≤ 1
C ≜ INSTANCE Consensus WITH chosen ← chosen, Acceptor ← Acceptor
THEOREM Refinement ≜ Spec ⇒ C!Spec
```

4.2.3 从 TPaxosAP 到 EagerVoting 的精化

第 4.1 节描述的 TPaxos 和 Voting 之间的对应关系在 TPaxosAP 和 EagerVoting 之间仍然成立.需要注意看

到,根据第 4.2.1 节的论述,TPaxosAP 的 *OnMessage*(*q*)动作对“先接受提议后作承诺”的改动对应于 EagerVoting 的 *VoteFor*(*a*,*b*,*v*)动作对“允许将 *maxBal*[*a*]提高到 $c \geq b$”的改动.因此,TPaxosAP 中的动作与 EagerVoting 中的动作也存在着明确的对应关系.从 TPaxosAP 到 EagerVoting 的精化关系与从 TPaxos 到 Voting 的精化关系相同,构建方法也相同,此处不再赘述.

5 模型检验

本节使用 TLC 模型检验工具验证 TPaxos 与 TPaxosAP 算法的正确性,并且验证了从 TPaxos 到 Voting 及从 TPaxosAP 到 EagerVoting 的精化关系的正确性.

5.1 实验设置

在所有的实验中(基于 Lamport 给出的从 Voting 到 Consensus 的 TLAPS 证明[21],我们使用 TLAPS 定理证明系统[23]证明了从 EagerVoting 到 Consensus 的精化关系的正确性[24]),我们调整了参与者集合 *Participant*、提议值集合 *Value*、提议编号集合 *Ballot* 的大小,并将前两者设置为对称集[10],以提高 TLC 的验证效率.我们使用了 10 个线程进行了实验,以下是我们的实验统计结果:已遍历(BFS 方式遍历)的系统状态图的直径、TLC 已检验的所有状态的数量、TLC 已检验的不同状态的数量以及检验时间(格式为 hh:mm:ss).当 TLC 已检验的不同状态数的数量超过某个阈值(设置为 1 亿,以 3 个提议编号、3 个提议值和 3 个参与者为例,此时,变量 *state* 总共有 27 个分量,粗略估计状态数最多有 3^{27}(约为万亿量级)),我们就人为地停止该次实验.

实验所用的机器配置如下.

- 机器 1:2.40GHz GPU,6 核以及 64GB 内存,TLC[25]版本号为 1.6.0.负责 TPaxos 相关实验.
- 机器 2:2.10GHz GPU,6 核以及 64GB 内存,TLC 版本号 1.6.0.负责 TPaxosAP 相关实验.

5.2 验证结果

5.2.1 TPaxos 与 TPaxosAP 满足 Consistency

表 1 和表 2 分别给出了在不同配置下,验证 TPaxos 及 TPaxosAP 满足一致性的结果.总体而言:在相同配置下,这两种协议的模型检验结果相似.在不同的配置下,参与者数量和提议编号个数对协议的规模影响较大.相对而言,提议值的个数对协议的规模影响较小.

Table 1 Model checking results of verifying that TPaxos satisfies consitency

表 1 TPaxos 满足一致性的模型检验结果

TLC 模型(参与者数量,提议值个数,投票轮数)	状态图直径	状态数	不同状态数	检验时间(hh:mm:ss)
(2,2,2)	20	27 809	7 991	0:00:01
(2,2,3)	31	69 954 296	12 107 912	0:06:52
(2,4,2)	20	27 945	7 991	0:00:02
(2,4,3)	31	69 966 578	12 107 912	0:18:20
(3,2,2)	21	329 426 700	100 602 814	0:44:04
(3,2,3)	19	274 590 666	101 397 482	0:42:03
(3,4,2)	21	323 929 358	100 147 908	2:40:06
(3,4,3)	17	278 887 421	100 000 024	2:28:05

Table 2 Model checking results of verifying that TPaxosAP satisfies consistency

表 2 TPaxosAP 满足一致性的模型检验结果

TLC 模型(参与者数量,提议值个数,投票轮数)	状态图直径	状态数	不同状态数	检验时间(hh:mm:ss)
(2,2,2)	20	27 809	7 991	0:00:01
(2,2,3)	31	69 954 174	12 107 912	0:07:03
(2,4,2)	20	27 945	7 991	0:00:02
(2,4,3)	31	69 966 456	12 107 912	0:17:35
(3,2,2)	21	322 114 689	100 000 019	0:45:04
(3,2,3)	18	270 946 706	100 000 022	0:42:09
(3,4,2)	22	319 890 347	100 000 023	2:38:37
(3,4,3)	17	279 673 321	100 000 031	2:28:30

5.2.2 TPaxos 与 TPaxosAP 满足 Liveness

TPaxos 与 TPaxosAP 的活性要求只有一个提议者,即只允许某个参与者 p 来执行动作 *Prepare*(*p*,*b*)及 *Accept*(*p*,*b*,*v*).以 TPaxos 为例,对于 TPaxos 的任何一个阶段,一旦其异常终止(即没有提议被选中),参与者 p 将会选择增大提议编号 b 重新开始新的 TPaxos 过程.b 将最终大于所有参与者维护的值 *maxBal*,从而,两个阶段将执行完成并且有提议最终被选中.

在 TLA+中,一般使用公平性来验证活性.表达式 *Fairness* 做出了相应的限制.参与者 p 为唯一的提议者,*MaxBallot* 是最大的提议编号.参与者 p 选择 *MaxBallot* 发起 *Prepare*(*p*,*MaxBallot*)和 *Accept*(*p*,*MaxBallot*,*v*)动作,第 5 条合取式保证了议会 Q 能接受 Prepare 请求和 Accept 请求(参与者 p 是根据本地状态判断能否进入 Accept 阶段,条件 $p \in Q$ 允许 p 和 Q 中的参与者通信以更新本地状态).表达式 *Liveness* 定义了 TPaxos 的活性,即最终一定会有值被选中.

$$
\begin{aligned}
&Fairness \triangleq \\
&\quad \wedge \exists p \in Participant : \\
&\qquad \wedge MaxBallot \in Bals(p) \\
&\qquad \wedge \mathrm{WF}_{vars}(Prepare(p, MaxBallot)) \\
&\qquad \wedge \forall v \in Value : \mathrm{WF}_{vars}(Accept(p, MaxBallot, v)) \\
&\qquad \wedge \exists Q \in Quorum : \\
&\qquad\quad \wedge p \in Q \\
&\qquad\quad \wedge \forall q \in Q : \mathrm{WF}_{vars}(OnMessage(q)) \\
&Liveness \triangleq \Diamond(chosen \neq \{\})
\end{aligned}
$$

表 3 和表 4 分别给出了多种配置下,验证 TPaxos 与 TPaxosAP 满足活性的结果.由于使用公平性来验证活性的方法增加了对动作的约束,因此状态数相对而言较少.

Table 3 Model checking results of verifying that TPaxos satisfies liveness

表 3 TPaxos 满足活性的模型检验结果

TLC 模型(参与者数量,提议值个数,投票轮数)	状态图直径	状态数	不同状态数	检验时间(hh:mm:ss)
(2,2,2)	15	385	275	0:00:01
(2,2,3)	22	27 366	13 684	0:00:02
(2,4,2)	15	735	523	0:00:01
(2,4,3)	22	54 192	27 042	0:00:03
(3,2,2)	34	206 443 509	62 284 985	2:27:08
(3,4,2)	34	444 157 073	134 403 809	6:21:41

Table 4 Model checking results of verifying that TPaxosAP satisfies liveness

表 4 TPaxosAP 满足活性的模型检验结果

TLC 模型(参与者数量,提议值个数,投票轮数)	状态图直径	状态数	不同状态数	检验时间(hh:mm:ss)
(2,2,2)	15	385	275	0:00:01
(2,2,3)	22	27 372	13 684	0:00:02
(2,4,2)	15	735	523	0:00:01
(2,4,3)	22	54 204	27 042	0:00:02
(3,2,2)	34	206 248 747	62 215 595	1:17:38
(3,4,2)	34	442 881 157	133 987 469	16:28:41

5.2.3 TPaxos 与 TPaxosAP 的精化

表 5 和表 6 分别给出了多种配置下,验证从 TPaxos 到 Voting 与从 TPaxosAP 到 EagerVoting 精化关系的正确性.由于该组实验检验的性质包含时序操作符,不再是定义在单个状态上的不变式,验证算法较为复杂,所以需要消耗更多的时间.

Table 5 Model checking results of verifying that TPaxos refines Voting

表 5 TPaxos 精化 Voting 的模型检验结果

TLC 模型(参与者数量,提议值个数,投票轮数)	状态图直径	状态数	不同状态数	检验时间(hh:mm:ss)
(2,2,2)	20	27 809	7 991	0:00:02
(2,2,3)	31	69 954 174	12 107 912	0:12:32
(2,4,2)	20	27 945	7 991	0:00:02
(2,4,3)	31	69 966 456	12 107 912	0:55:24
(3,2,2)	21	321 158 078	100 000 010	0:48:36
(3,2,3)	17	268 108 874	100 000 034	1:10:50
(3,4,2)	22	316 078 356	100 000 012	12:56:45
(3,4,3)	17	278 338 521	100 000 015	11:08:10

Table 6 Model checking results of verifying that TPaxosAP refines EagerVoting

表 6 TPaxosAP 精化 EagerVoting 的模型检验结果

TLC 模型(参与者数量,提议值个数,投票轮数)	状态图直径	状态数	不同状态数	检验时间(hh:mm:ss)
(2,2,2)	20	27 809	7 991	0:00:01
(2,2,3)	31	69 954 296	12 107 912	0:15:42
(2,4,2)	20	27 945	7 991	0:00:03
(2,4,3)	31	69 966 578	12 107 912	0:59:24
(3,2,2)	21	315 969 776	100 254 890	2:09:05
(3,2,3)	17	267 572 227	100 000 032	2:11:25
(3,4,2)	22	318 518 236	100 000 012	13:13:31
(3,4,3)	17	278 245 333	100 000 036	11:31:35

6 相关工作

Paxos[3,4]协议衍生出了许多变体[26−29],如 Disk Paxos[30]、Cheap Paxos[31]、Fast Paxos[19]、Generalized Paxos[32]、Stoppable Paxos[33]、Vertical Paxos[34]、ByzantinePaxos[26]、EPaxos(egalitarian Paxos)[35]、Raft[36]、CASPaxos[37]等.本文关注腾讯开发的分布式存储系统 PaxosStore 中实现的 TPaxos 变体.TPaxos 的新颖之处在于它的“统一性”:它为每个参与者维护统一的状态类型,并采用类型统一的消息进行通信.我们从 Paxos 出发,论证了如何逐步推导出 TPaxos.基于这种推导,我们可以将 TPaxos 看作 Paxos 的一种自然变体.

使用形式化规约语言描述分布式协议并使用相应的模型检验工具进行验证,可有效提高协议的可信度[38].近年来,研究者使用 TLA+/TLC 描述并验证了 Paxos 协议及其多种变体.Lamport 等人使用 TLA+分别描述了 Paxos[13]、FastPaxos[19]、Disk Paxos[3]以及 Byzantine Paxos[39],并使用 TLC 在一定规模上验证了它们的正确性.Moraru 在博士论文中给出了 EPaxos 的 TLA+规约.最近,Sutra 发现并纠正了其中的错误[40].Ongaro 给出了 Raft 协议的 TLA+规约[41].在本文,我们使用 TLA+描述了 TPaxos.在开发规约的时候,我们发现 TPaxos 协议描述中存在至关重要但并未完全阐明的微妙之处:在消息处理阶段,参与者是先作出“不再接受具有更小编号的提议”的承诺还是先接受提议?这促使我们发现了 TPaxos 的一种变体,称为 TPaxosAP.与 TPaxos 相比,TPaxosAP 改动很小,但却体现了一种不同于 Voting[13]的投票机制.

精化(refinement)技术[14,15]有助于理解 Paxos 各种变体的正确性以及它们之间的关系.Lampson[26]提出了一个抽象的 Paxos 协议(abstract Paxos,简称 AP).AP 刻画了 Paxos 协议的核心,但是由于它使用了全局信息,无法直接在分布式系统中实现.接着,他们使用精化/模拟(refinement/simulation)技术分别建立了 Paxos,Disk Paxos 以及 Byzantine Paoxs 与 AP 的关系.在 AP 的视角下,它们都可以看作 AP 的具体实现.Lamport 等人提出了抽象的投票机制 Voting[13],用于刻画接受者“作承诺”与“接受提议”两种核心行为.Voting 可以看作分布式共识问题的集中式解决方案,而 Paxos 是 Voting 的分布式实现.实际上,Lamport 等人给出了从 Paxos 到 Voting 以及从 Voting 到 Consensus 的精化映射[13].同样基于 Voting,Lamport 还使用精化技术从 Paxos 推导出了 Byzantine Paxos[26],并使用 TLC 验证了它们之间的精化关系.Maric 等人[42]在 HO(heard-of)模型[43]下研究了多种 Paxos[42]变体.Maric 等人首先为它们建立了一个共同的抽象,也称为 Voting,根据 Voting 行为的差异,这些 Paxos 变体可以被归为 3 类;然后,他们构建了这 3 类变体之间的精化关系,并使用定理证明器 Isabelle/HOL 进行了形式化验证.在本文,我们分别建立了从 TPaxos 以及 TPaxosAP 到 Consensus 的精化关系.特别地,在 TPaxosAP 方面,我们首先在

Voting 的基础上提出了一种适用于 TPaxosAP 的投票机制 EagerVoting,然后建立了从 TPaxosAP 到 EagerVoting 以及从 EagerVoting 到 Consensus 的精化关系.

7 总结与未来工作

本文深入研究了 PaxosStore 系统中的 TPaxos 协议[8],TPaxos 的新颖之处在于它的“统一性”:它为每个参与者维护统一的状态类型,并采用统一类型的消息进行通信.

- 首先,我们从经典的 Paxos 协议出发,论证如何逐步推导出 TPaxos 协议.基于这种推导,我们可以将 TPaxos 看作 Paxos 的一种自然变体.
- 其次,我们给出了 TPaxos 的 TLA+规约.我们发现,TPaxos 协议描述中存在至关重要但并未完全阐明的微妙之处.这促使我们提出了它的一种变体,称为 TpaxosAP.
- 最后,我们分别建立了从 TPaxos 以及 TPaxosAP 到 Consensus 的精化关系.特别地,在 TPaxosAP 方面,我们在 Voting 的基础上提出了一种适用于 TPaxosAP 的投票机制 EagerVoting,并使用 TLC 模型检验工具验证了从 TPaxosAP 到 EagerVoting 以及从 EagerVoting 到 Consensus 的精化关系的正确性.

目前,我们正在使用 TLAPS[11,23,44]定理证明系统开发机器可检验的证明.另外,我们计划对 PaxosStore 进行更全面的研究.比如,我们将采用形式化方法(如形式化规约、精化技术、模型检验与定理证明等)研究共识层中另外两个模块的正确性:实现了 Multi-Paxos[3]功能的 PaxosLog 机制以及允许故障切换(failover)的一致性读写协议.

References:

[1] Fischer MJ, Lynch NA, Paterson MS. Impossibility of distributed consensus with one faulty process. Journal of the ACM, 1985, 32(2):374−382. [doi: https://doi.org/10.1145/3149.214121]

[2] Herlihy M. Wait-free synchronization. ACM Trans. on Programming Languages and Systems, 1991,13(1):124−149. [doi: https://doi.org/10.1145/114005.102808]

[3] Lamport L. Paxos made simple. ACM Sigact News, 2001,32(4):18−25.

[4] Lamport L. The part-time parliament. ACM Trans. on Computer Systems, 1998,16(2):133−169. [doi: https://doi.org/10.1145/279227.279229]

[5] Chandra TD, Griesemer R, Redstone J. Paxos made live: An engineering perspective. In: Proc. of the 26th Annual ACM Symp. on Principles of Distributed Computing (PODC 2007). New York: Association for Computing Machinery, 2007. 398−407. [doi: https://doi.org/10.1145/1281100.1281103]

[6] Corbett JC, Dean J, Epstein M, Fikes A, Frost C, Furman JJ, Ghemawat S, Gubarev A, Heiser C, Hochschild P, Hsieh W, Kanthak S, Kogan E, Li HY, Lloyd A, Melnik S, Mwaura D, Nagle D, Quinlan S, Rao R, Rolig L, Saito Y, Szymaniak M, Taylor C, Wang R, Woodford D. Spanner: Google’s globally distributed database. ACM Trans. on Computer Systems, 2013,31(3):Article No.9. [doi: https://doi.org/10.1145/2491245]

[7] Isard M. Autopilot: Automatic data center management. ACM SIGOPS Operating Systems Review, 2007,41(2):60−67. [doi: https://doi.org/10.1145/1243418.1243426]

[8] Zheng JJ, Lin Q, Xu JT, Wei C, Zeng CW, Yang PA, Zhang YF. PaxosStore: High-availability storage made practical in WeChat. Proc. of the VLDB Endowment, 2017,10(12):1730−1741. [doi: https://doi.org/10.14778/3137765.3137778]

[9] Zheng JJ. The PaxosStore system. 2019. https://github.com/Tencent/paxosstore

[10] Lamport L. Specifying Systems: The TLA+ Language and Tools for Hardware and Software Engineers. Boston: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 2002.

[11] Lamport L. The TLA+ hyperbook. 2019. http://lamport.azurewebsites.net/tla/hyperbook.html

[12] Lamport L. The temporal logic of actions. ACM Trans. on Programming Languages and Systems, 1994,16(3):872−923. [doi: https://doi.org/10.1145/177492.177726]

[13] Lamport L, Merz A, Doligez D. A TLA+ specification of Paxos and its refinement. 2019. https://github.com/tlaplus/Examples/tree/master/specifications/Paxos

[14] Martin A, Lamport L. The existence of refinement mappings. Theoretical Computer Science, 1991,82(2):253–284.

[15] Lamport L, Merz S. Auxiliary variables in TLA+. arXiv preprint arXiv:1703.05121, 2017.

[16] Yuan Y, Manolios P, Lamport L. Model checking TLA+ specifications. In: Proc. of the Advanced Research Working Conf. on Correct Hardware Design and Verification Methods. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999. 54–66.

[17] Lamport L. Summary of TLA+. 2019. http://lamport.azurewebsites.net/tla/summary-standalone.pdf

[18] Yuan D, Luo Y, Zhuang X, Rodrigues GR, Zhao X, Zhang YL, Jain PU, Stumm M. Simple testing can prevent most critical failures: An analysis of production failures in distributed data-intensive systems. In: Proc. of the 11th USENIX Conf. on Operating Systems Design and Implementation (OSDI 2014). USENIX Association, 2014. 249–265.

[19] Lamport L. Fast Paxos. Distributed Computing, 2006,19(2):79–103.

[20] Lamport L, Merz S. A TLA+ specification of Paxos consensus algorithm described in Paxos made simple and a TLAPS-checked proof of its correctness. 2019. https://github.com/tlaplus/v2-tlapm/blob/master/examples/paxos/Paxos.tla

[21] Lamport L, Merz S. A TLA+ specification of voting algorithm and a TLAPS-checked proof of its correctness. 2019. https://github.com/tlaplus/v2-tlapm/blob/master/examples/consensus/Voting.tla

[22] Heidi H, Mortier R. A generalised solution to distributed consensus. arXiv preprint arXiv:1902.06776, 2019.

[23] Chaudhuri K, Doligez D, Lamport L, Merz S. A TLA+ proof system. arXiv:0811.1914, 2008.

[24] Yi X, Wei H, Huang Y, Qiao L, Lu J. TLAPS proof for the refinement from EagerVoting to consensus. 2019. https://github.com/Starydark/PaxosStore-tla/blob/master/specification/EagerVoting.tla

[25] Microsoft Research. The TLA toolbox. 2019. http://lamport.azurewebsites.net/tla/toolbox.html

[26] Lamport L. Byzantizing Paxos by refinement. In: Proc. of the Int'l Symp. on Distributed Computing. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 211–224.

[27] Lampson B. The ABCD's of Paxos. In: Proc. of the 20th Annual ACM Symp. on Principles of Distributed Computing (PODC 2001). New York: Association for Computing Machinery, 2001. [doi: https://doi.org/10.1145/383962.383969]

[28] Van Renesse R, Altinbuken D. Paxos made moderately complex. ACM Computing Surveys, 2015,47(3):Article No.42. [doi: https://doi.org/10.1145/2673577]

[29] Wang J, Zhang MX, Wu YW, Chen K, Zheng WM. Paxos-like consensus algorithms: A review. Journal of Computer Research and Development, 2019,56(4):692–707 (in Chinese with English abstract).

[30] Eli G, Lamport L. Disk Paxos. Distributed Computing, 2003,16(1):1–20.

[31] Lamport L, Massa M. Cheap Paxos. In: Proc. of the Int'l Conf. on Dependable Systems and Networks. IEEE, 2004. 307–314.

[32] Lamport L. Generalized consensus and Paxos. Technical Report, MSR-TR-2005-33, Microsoft Research, 2005.

[33] Lamport L, Malkhi D, Zhou LD. Stoppable Paxos. Technical Report, Microsoft Research, 2008.

[34] Lamport L, Malkhi D, Zhou LD. Vertical Paxos and primary-backup replication. In: Proc. of the 28th ACM Symp. on Principles of Distributed Computing (PODC 2009). New York: Association for Computing Machinery, 2009. 312–313. [doi: https://doi.org/10.1145/1582716.1582783]

[35] Moraru I, Andersen DG, Kaminsky M. There is more consensus in egalitarian parliaments. In: Proc. of the 24th ACM Symp. on Operating Systems Principles (SOSP 2013). New York: Association for Computing Machinery, 2013. 358–372. [doi: https://doi.org/10.1145/2517349.2517350]

[36] Diego O, Ousterhout J. In search of an understandable consensus algorithm. In: Proc. of the USENIX Annual Technical Conf. (ATC). 2014. 305–319.

[37] Denis R. CASPaxos: Replicated state machines without logs. arXiv preprint arXiv:1802.07000, 2018.

[38] Clarke EM, Emerson EA, Sifakis J. Model checking: Algorithmic verification and debugging. Communications of the ACM, 2009, 52(11):74–84. [doi: https://doi.org/10.1145/1592761.1592781]

[39] Lamport L. The PlusCal code for Byzantizing Paxos by refinement. Technical Report, Microsoft Research, 2011.

[40] Pierre S. On the correctness of egalitarian Paxos. arXiv preprint arXiv:1906.10917, 2019.

[41] Diego O. A TLA+ specification of raft. 2019. https://github.com/ongardie/raft.tla

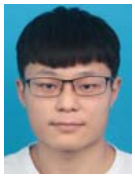
[42] Ognjen M, Sprenger C, Basin D. Consensus refined. In: Proc. of the 45th Annual IEEE/IFIP Int'l Conf. on Dependable Systems and Networks. IEEE, 2015. 391–402.

[43] Bernadette CB, Schiper A. The heard-of model: computing in distributed systems with benign faults. Distributed Computing, 2009, 22(1):49−71.

[44] Microsoft Research. TLAPS Website. 2019. http://tla.msr-inria.inria.fr/tlaps/

附中文参考文献:

[29] 王江,章明星,武永卫,陈康,郑纬民.类 Paxos 共识算法研究进展.计算机研究与发展,2019,56(4):692−707.



易星辰(1996－),男,硕士生,主要研究领域为分布数据一致性,形式化方法.

魏恒峰(1986－),男,博士,CCF 专业会员,主要研究领域为分布数据一致性,形式化方法.

黄宇(1982－),男,博士,教授,博士生导师,CCF 专业会员,主要研究领域为分布式算法,分布式系统,网络化软件系统.

乔磊(1982－),男,博士,研究员,CCF 专业会员,主要研究领域为航天器嵌入式操作系统设计及验证.

吕建(1960－),男,博士,教授,博士生导师,CCF 会士,主要研究领域为软件方法学.