

基于有向包围盒树的定量咬合分析*

张弛^{1,2+}, 张凤军¹, 陈磊³, 冯海兰³, 戴国忠¹

¹(中国科学院 软件研究所 人机交互技术与智能信息处理实验室,北京 100190)

²(中国科学院 研究生院,北京 100049)

³(北京大学口腔医学院 口腔医院 修复科,北京 100081)

Quantitative Occlusion Analysis Based on Oriented Bounding Box Trees

ZHANG Chi^{1,2+}, ZHANG Feng-Jun¹, CHEN Lei³, FENG Hai-Lan³, DAI Guo-Zhong¹

¹(Intelligence Engineering Laboratory, Institute of Software, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

²(Graduate University, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

³(Department of Prosthodontics, Peking University School & Hospital of Stomatology, Beijing 100081, China)

+ Corresponding author: E-mail: zhangchi05@ios.cn

Zhang C, Zhang FJ, Chen L, Feng HL, Dai GZ. Quantitative occlusion analysis based on oriented bounding box trees. Journal of Software, 2008,19(Suppl.):182-189. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/19/s182.htm>

Abstract: Occlusion analysis is a primary function of a mandibular movement simulation system. In this paper, the advantages and drawbacks of concurrent occlusion analysis algorithms are reviewed, and a novel occlusion analysis algorithm based on oriented bounding box trees is proposed by generalizing the Separating Axis Theorem. By means of Heuristic Search, Branch and Bound method and Voronoi Diagram, the algorithm analyzes occlusion on complicated denture models precisely and quickly, which solved the practical problem in the application of VR technologies in dentistry.

Key words: occlusion analysis; oriented bounding box; minimum distance calculation; mandibular movement simulation

摘要: 虚拟下颌运动仿真系统的核心功能之一就是为用户提供快速、准确的咬合分析.首先回顾了现有的咬合分析算法的优势和不足,然后在有向包围盒树的基础上提出了新的咬合分析算法.通过推广基于分离轴定理的经典碰撞检测算法,借助启发式搜索、分支定界和 Voronoi 图等手段,算法可以在较短的时间内对复杂牙列模型完成高精度的定量咬合分析任务,解决了虚拟现实技术在口腔医学领域应用中的实际问题.

关键词: 咬合分析;有向包围盒;最短距离计算;下颌运动仿真

下颌运动和咬合情况是口腔功能的重要表征,一直以来是口腔医学的重要研究方向.自从 1805 年 Gariot 发明机械合架以来,口腔医学研究往往采用机械合架和石膏模型等工具,这些工具既存在着难以完全反映真实组织结构、实际运动细节以及个体间差异的缺点,同时又由于物理限制,难以充分展示咬合运动内在的和深层的性质和状态.而虚拟现实技术的引入可以有效地解决这两个问题.通过采集 CT 数据、咬合运动数据并扫描石膏

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60673188, U0735004 (国家自然科学基金); the National High-Tech Research and Development Plan of China under Grant Nos.2006AA01Z328, 2006AA01Z338 (国家高技术研究发展计划(863))

Received 2008-05-03; Accepted 2008-11-14

模型数据,虚拟下颌运动仿真系统可以真实地重现人体下颌运动的准确情况,并为用户提供测量、分析功能.这为下颌运动与咬合接触的研究以及口腔种植修复的手术规划提供了更为有力的手段.

虚拟下颌运动仿真系统的核心功能之一就是为用户提供快速准确的咬合分析.咬合分析的任务就是分析上下牙齿之间的接触情况,包括接触点的分布、位置、接触面积以及在咀嚼过程中接触点如何移动,并将这些信息有效地向用户展示.咬合分析的核心过程就是快速计算两个相对牙列上各点到对侧牙列的最短距离,并且使用适当的方式在显示的模型上标出的过程.尽管咬合分析算法在虚拟下颌运动仿真系统中具有举足轻重的地位,然而目前在这一方面的研究仍然相当缺乏.

本文第 1 节回顾了现有的多种咬合分析算法,分析了它们的特点和问题,作为新算法的借鉴.第 2 节从相近似的碰撞检测领域中吸取经验,参考了其中有价值的研究,并以此作为新算法的基础.在此基础上,第 3 节、第 4 节提出了基于有向包围盒树的咬合分析新算法,以基于有向包围盒树的快速最近点搜索算法为框架,在其中加入了最短距离求解与穿透处理过程,从而实现了在较短的时间内完成高精度的咬合分析的任务.最后,给出了一些实验结果,以反映算法的性能与效果.

1 现有的咬合分析算法

为了解决机械合架在用于下颌运动模拟和分析时的种种局限,随着计算机技术尤其是虚拟现实和可视化技术的发展,许多人开始设计和制作虚拟合架系统.在现有的虚拟合架系统中,学者们各自提出和使用了不同的咬合分析算法.

Hayashi 等人^[1]首先设计了一种利用激光扫描的三维数据和光学记录的下颌运动数据来模拟下颌运动并进行咬合分析的系统.在该系统中,他们采用了一种基于高度图(height map)的距离计算算法,来近似求解牙列之间的最短距离^[2].他们先选取一个适当的坐标系,使得槽牙的牙面近似可以被认为是关于 x, y 坐标的二元函数(高度图).以适当的固定间隔沿 x, y 轴对牙面在该处的 z 坐标值进行二维等间距采样,并记录在一个二维数据结构中,从而获得牙面的一个二维离散表示.这样就完成了预处理的过程.

计算最短距离时,算法在预先生成的二维数据结构中,沿 x, y 轴进行遍历,为其中每一个采样点 $P(x_p, y_p, z_p)$ 计算其到对侧牙面的最短距离,如图 1 所示.首先检查对侧牙面上对应于坐标 (x_p, y_p) 的采样点 $Q_0(x_0, y_0, z_0)$.若这样的采样点不存在,则在一个尽可能小的偏移量上限 r 限定的范围内寻找一个存在的采样点 $Q_0(x_0, y_0, z_0)$ 满足 $x_0 \in [x_p - r, x_p + r], y_0 \in [y_p - r, y_p + r]$.若这样的 Q_0 仍不存在,则表示 P 与对侧牙面距离太远,超出了计算的必要范围.否则计算 Q_0 到 P 的距离 $d_0(P)$,并令 $d_m(P)$ 的初始值等于 $d_0(P)$.以这个距离作为半径,以 (x_p, y_p) 点为圆心在 $x-y$ 平面上构造一个圆形区域.将这个区域沿 z 轴方向投影到对侧牙面上,构成了不规则形状区域 $S(P, d_m(P))$.因为在此区域外的点到 P 的距离必定大于 $d_m(P)$,因此只需在这个区域中搜索新的最近点.先沿 x, y 轴方向依次遍历 $S(P, d_m(P))$ 中的每个采样点 $Q(x_q, y_q, z_q)$,计算 Q 到 P 的距离 $d(P, Q)$,并以此来更新 $d_m(P)$ 和 $S(P, d_m(P))$,缩小后续的计算范围.当最终 $S(P, d_m(P))$ 中所有的采样点均被访问,此时的 $d_m(P)$ 即为所需要的最短距离.在预先生成的二维数据结构中反复进行如上的步骤,即可求得每一个采样点到对侧牙面的最短距离.

这一算法的计算速度较快,可以实现与运动仿真同步的实时咬合分析,但作为其基础的高度图假设实际上只对槽牙适用,而且二维等间距采样的过程降低了数据的精度,使得结果误差增大,也不便于分析结果在用于浏览的模型上展示.

其后,Okamoto 等人^[3]也设计了类似的系统,并提供了动态咬合模拟与咬合面积估算的功能(如图 2 所示).系统中采用了穷举法计算上下牙列之间的最短距离.他们对上下牙列上的点组成的点对进行了穷举,并计算每一对点之间的距离,以此求出每一个点到对侧牙面的最短距离.该算法受到穷举性质的影响,不能获得理想的计算速度,分析过程中存在大量冗余计算,效率很低.但与文献[2]的算法相比,因为并未进行重采样,保留了输入系统的原始数据,因此能够得到高质量的结果,同时也可以将结果显示在网格模型之上.

Kordaß 等人^[4,5]使用激光扫描和超声运动测量,在基于 DOP(discrete oriented polytope)树的碰撞检测算法^[6,7]的基础上开发了虚拟合架系统 DentCAM,为用户提供了丰富的分析功能.然而文献中并未具体介绍他们

如何在碰撞检测算法的基础上开发了咬合分析算法,也没有对其咬合分析算法进行描述,因此难以作为研究的参考.

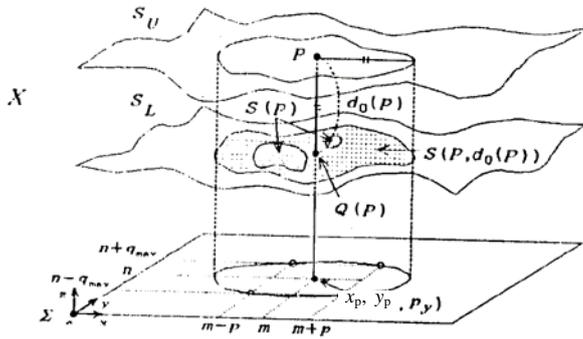


图1 Hayashi 等人的最短距离搜索^[2]

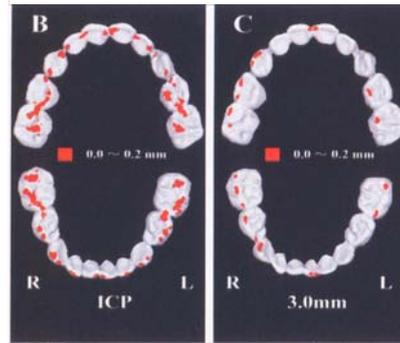


图2 Okamoto 等人的咬合分析效果^[3]

2 基于有向包围盒树的碰撞检测

咬合分析与碰撞检测同样都需要在网格模型之间搜索足够邻近的面片对,这使得现有成熟的碰撞检测方法对于咬合分析算法的设计具有重要的借鉴意义.常见的网格模型碰撞检测算法主要基于两种类型的数据结构,分别是空间分解(spatial decomposition)和包围体层次结构(bounding volume hierarchy)^[8,9].前者主要包括 BSP 树、 $k-d$ 树、八叉树、栅格(grid)等,以空间的分割和图元的重复包含冗余为特征;后者主要包括包围球树、AABB 树、OBB 树、 $k-DOP$ 树、DOP 树等,以图元的划分和空间的冗余为特征.

在这些碰撞检测方法中,基于有向包围盒树(oriented bounding box tree,简称 OBB 树)的碰撞检测算法可以作为一个很好的参考.选择 OBB 树主要基于如下理由:

- (1) 与部分碰撞检测方法要求对象满足某些特定性质(如凸体)不同,基于 OBB 树的算法对输入模型没有特殊要求,即使是在牙列这样形状复杂的不规则模型上也可以很好地工作,同时也不需要额外的拓扑信息作为辅助;
- (2) OBB 树比其他多数的表示方法更紧贴模型本身,在更少的层次中更快地逼近原始模型的表面.在类似咬合的场景中,模型表面之间高度贴近,此时层次结构的紧致性对算法的计算代价更有着显著的影响;
- (3) OBB 树对于刚体变换具有不变性,在运动过程中基本保持不变,省去了更新数据结构的时间.在类似牙列模型这样包含大量面片的模型之上,时间的节约显得更为突出;
- (4) 成熟的 RAPID(rapid and accurate polygon interference detection)碰撞检测库为基于 OBB 树的算法开发提供了很好的基础和参考.

基于 OBB 树的碰撞检测过程如下^[8,9]:

首先,进行预处理,算法需要构建 OBB 树结构.在 RAPID 中,OBB 树的构建过程自上而下进行.先为整个模型计算一个近似最优化的 OBB.然后找到 OBB 最长的一组平行边,以一个经过这组边中点并垂直于它们的平面将其中包含的面片分割为两部分.此后再为每一个部分计算 OBB,重复这一过程直至每个 OBB 中只包含一个面片,于是 OBB 树构建完成.过程的示意图如图 3 所示.

OBB 的快速求交测试是基于被称为分离轴定理(separating axis theorem)的原理而设计的.分离轴定理可以被表述如下:对于任意两个凸多面体 A 和 B ,它们不相交当且仅当存在这样一条轴,使得 A 和 B 在这条轴上的投影区间不相交,并且这条轴正交于以下之一: A 的一个面; B 的一个面;由 A 的一条边和 B 的一条边确定的平面.

对于两个 OBB 而言,需要检测的轴最多有 $3+3+9=15$ 条.在 RAPID 中,先获得 OBB B 相对于 OBB A 的平移向量 T 和旋转矩阵 R .接着向量 T 被投影到每条待判断的轴 L 上,而得到两个 OBB 中心在 L 上的投影点之间的

间距 $|T \cdot L|$. 然后求出两个 OBB 在 L 上的投影区间的半长度 $r_A = \sum_i |a_i A^i \cdot L|$ 和 $r_B = \sum_i |b_i B^i \cdot L|$, 其中 $i=1,2,3$, a_i 和 b_i 分别为两个 OBB 三条正交边的半长度, A^i 和 B^i 分别为相应正交边的单位向量. 于是, 若

$$|T \cdot L| > r_A + r_B$$

成立, 则 L 即为 OBB A 和 B 的一条分离轴, 如图 4 所示.

通过最多检测 15 条轴, 算法可以很快判断出两个 OBB 是否相交. 若 A 和 B 相交, 则沿其中较大的一个 OBB (不失一般性地假设为 B) 所在的树向下前进一层, 检测 A 与 B_1 和 B_2 是否相交. 重复这样的相交检测直至包围盒不再相交; 或者两个包围盒里均只剩下一个面片, 此时直接进行三角形面片求交测试. 这样就完成了整个碰撞检测的过程.

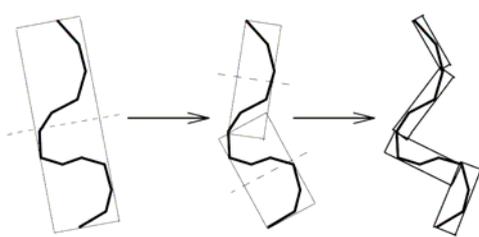


图 3 OBB 树的构造^[8]

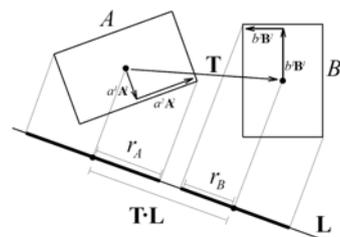


图 4 分离轴检测^[8]

3 基于有向包围盒树的快速最近点搜索

碰撞检测任务与咬合分析中需要最短距离计算的任务具有许多相似之处, 可以从中借鉴有用的方法和经验, 然而两者之间仍然存在着显著的不同. 碰撞检测任务是上下文无关的, 任何一对面片是否相交与其他面片对的相交情况没有直接联系; 而最短距离计算则不然, 求得的距离是否是所需要的最短距离, 很大程度上依赖于其他面片对的计算结果. 这使得搜索策略的优化、中间结果的保存和最终结果的正确性保障成为了影响算法设计的额外的重要因素.

在成熟的 RAPID 碰撞检测库的基础上, 本文将碰撞检测算法推广为最近点搜索算法, 以将 OBB 树应用于咬合分析中的距离计算. 修改推广的工作主要分为如下几个部分:

- (1) 推广分离轴定理, 在搜索过程中检测两个 OBB 在各条轴上投影区间的间隔, 保存各间隔的最大值来近似作为面片之间最近距离的参考度量;
- (2) 采用最佳优先(best-first)的启发式分支定界(branch and bound)算法实现搜索过程, 以保存的间隔最大值作为启发函数, 优先将间隔最小的 OBB 对拆分, 进入 OBB 树的子结点搜索, 直至找到最优解或判定不存在有意义的解;
- (3) 使用尽可能多的中间结果和先验知识进行剪枝和限界, 进一步优化 OBB 树的搜索过程.

启发函数的设计是基于包围盒的如下性质:

两个包围盒之间的最短距离不大于它们所包围的两组面片之间的最短距离.

令 $d(A, B)$ 为包围盒 A 到包围盒 B 的最短距离, $h(A, B)$ 为包围盒对 (A, B) 的启发函数, 这样对于包围盒 A, A' 和 B , 若 A 与 A' 在同一个 OBB 树 T_A 之中, 且 A' 是 A 的子结点, 只需定义:

$$h(A', B) = \max(d(A', B), h(A, B)),$$

则启发函数 $h(A, B)$ 即可使算法始终能找到相距最近的包围盒对. 这一结论的证明过程类似于 A* 算法的最优性证明, 在此不再赘述.

鉴于求解空间中两个包围盒之间的最短距离的时间代价较大, 对于一组 OBB 对 (A, B) , 求解它们在每条可能的分离轴 L 上的投影区间的间隔:

$$d_L(A, B) = |T \cdot L| - r_A - r_B,$$

取这些间隔的最大值 $d_a(A,B)$ 近似代替 $d(A,B)$ 参与启发函数的计算. 对任意 OBB 对 (A,B) , 总有 $d_a(A,B) \leq d(A,B)$ 成立, 因此依然满足找到相距最近的包围盒对的条件.

算法采用传统的最小值堆的方式实现优先队列作为启发式搜索的核心数据结构. 堆中每个结点保存着一个键值/数据对, 其中键值为用于排序的启发函数值, 数据为类 CollisionPair 的一个对象, 其中包含指向对应的两个 OBB 的指针.

搜索算法的主要流程如图 5 所示.

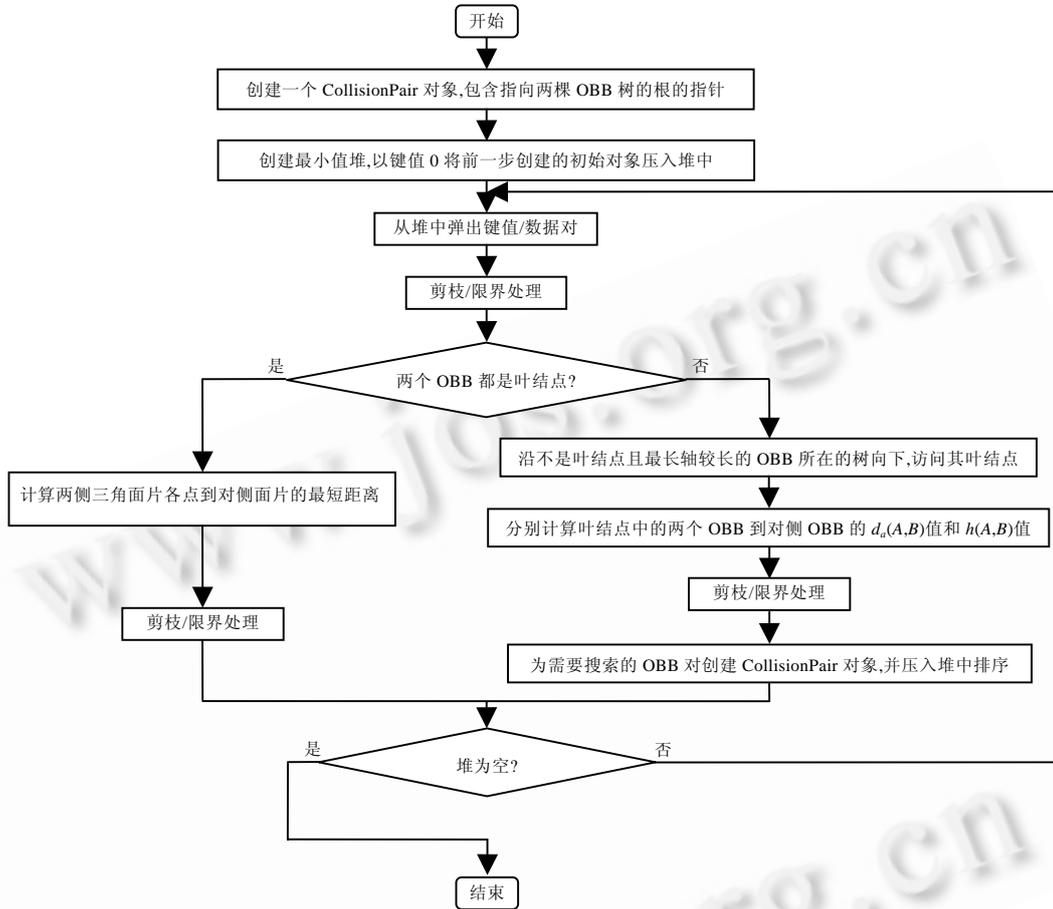


图 5 基于有向包围盒树的快速最近点搜索

为了进一步提高搜索的效率, 算法使用一些中间结果和先验知识来对搜索树进行剪枝和限界. 除了保存最短距离下限的 $h(A,B)$ 之外, 算法还为每一个 OBB 对保存其中任意一个顶点到对侧的最短距离的上限 $d_{max}(A,B)$. 对于包围盒 A, A' 和 B , 若在 OBB 树 T_A 中 A' 是 A 的子结点, 定义:

$$d_{A'}(A', B) = \sqrt{d_{A'_1}^2(A', B) + d_{A'_2}^2(A', B) + d_{A'_3}^2(A', B)},$$

$$d_B(A', B) = \sqrt{d_{B_1}^2(A', B) + d_{B_2}^2(A', B) + d_{B_3}^2(A', B)},$$

$$d_{max}(A', B) = \min(d_{A'}(A', B), d_B(A', B), d_{max}(A, B)),$$

其中, $d_{A'_1}(A', B), d_{A'_2}(A', B)$ 和 $d_{A'_3}(A', B)$ 分别为两个包围盒在平行于 A' 的各条正交边的分离轴 $L_{A'_1}, L_{A'_2}, L_{A'_3}$ 上的投影区间之间的最大距离 (即两个区间的下界较小者与上界较大者之间的差), $d_{B_1}(A', B), d_{B_2}(A', B)$ 和 $d_{B_3}(A', B)$ 分别为两个包围盒在平行于 B 的各条正交边的分离轴 $L_{B_1}, L_{B_2}, L_{B_3}$ 上的投影区间之间的最大距离. 容易证明, A' 和 B

之间的最大距离必定不超过 $d_{\max}(A',B)$,故而包围盒中任意一个顶点到对侧的最短距离也不超过 $d_{\max}(A',B)$.

然后对于每个包围盒定义:

$$d_{\max}(A) = \min(d_{\max}(A, B)),$$

其中 B 为所有已与 A 计算过 $d_{\max}(A, B)$ 的对侧 OBB 树 T_B 上的包围盒.这样定义的 $d_{\max}(A)$ 意味着对于 A 中任意一个顶点 p_A ,必定存在着对侧 OBB 树 T_B 的包围盒所包围的一个顶点 p_B ,使得 p_A 到 p_B 的距离不超过 $d_{\max}(A)$.

在此定义之下,算法为每个 OBB 维护一个 d_{\max} 值,在每步搜索过程中计算并更新这个值,并使用 $d_{\max}(A)$ 和 $d_{\max}(B)$ 对 $h(A, B)$ 进行限界.当搜索的任何时刻,若 $h(A, B) > d_{\max}(A)$ 或 $h(A, B) > d_{\max}(B)$,则表示对于 A 中任意一个顶点 p_A 或 B 中任意一个顶点 p_B ,OBB 对 (A, B) 之中不包含有与该点构成最短距离的对侧点,因此无须再深入搜索.

这样的剪枝策略可以在深入访问之前快速地剪去距离较远的 OBB 对,迅速缩小搜索规模,提高搜索效率.此外,在三角形面片之间最短距离的计算过程中,算法也使用每个顶点的最短距离 $d_{\min}(p)$ 进行限界判断,提前排除距离过大的情况,减少不必要的计算量.同时,算法也将包围盒 A 中所有的 $d_{\min}(p)$ 的最大值与 $d_{\max}(A)$ 比较,取其小者作为新的 $d_{\max}(A)$,以更好地剪去不必要的搜索分支.

4 最短距离求解与穿透处理

以前述搜索算法为框架,便可以进行咬合分析的计算.当搜索树进入叶结点,即两个 OBB 中都只剩下一个三角形面片时,则算法需要求解其中每个顶点到对侧面片的最短距离,并更新保存的顶点最短距离 d_{\min} .这一过程对于两个三角形面片 F_1 和 F_2 对称,所以下面仅以求解 F_1 各点到对侧的最短距离的过程为例:

1. 首先判断是否存在三角形退化:
 - a) 若 F_2 的顶点 $q_1=q_2=q_3$,则 F_2 退化为一个点,对于 F_1 的顶点 p_1, p_2 和 p_3 ,只需计算它们到 q_1 的距离并与该点现有的最短距离 d_{\min} 比较即可;
 - b) 否则,若 F_2 中有两个点重合,不失一般性地设为 $q_1=q_2$,则 F_2 退化为 q_2 到 q_3 的边 f_2 ,对于 F_1 的顶点 p_1, p_2 和 p_3 ,只需计算它们到 f_2 的距离即可.计算一点到线段的距离分为两种情况,若该点到线段所在的直线的垂足在线段内,则垂线段长度即为所求;否则,距垂足较近的线段端点到该点的距离即为所求.将求得距离与该点现有的 d_{\min} 比较.
2. 若三角形未退化,算法计算 F_1 的顶点 p_1, p_2 和 p_3 到 F_2 所在的平面的距离,并与该点现有的最短距离比较.若到平面的距离大于该点的 d_{\min} ,则无须进一步计算.否则,继续如下步骤:
 - a) 将该点(不失一般性地设为 p_1)投影至 F_2 所在的平面.若投影点在三角形内部,则 p_1 到其投影点的距离即为所求.将此距离与 $d_{\min}(p_1)$ 比较;
 - b) 否则,构造 F_2 的二维 Voronoi 图^[10],如图 6 所示.寻找与投影点距离最近的顶点或边,计算 p_1 到该顶点或边的距离,并与 $d_{\min}(p_1)$ 比较.

依此步骤对 F_1 的顶点 p_1, p_2, p_3 和 F_2 的顶点 q_1, q_2, q_3 依次计算并更新最短距离 d_{\min} ,即可完成求解面片对之间最短距离的步骤.当整个搜索算法终止时,每个顶点的 d_{\min} 值即为最终所需要的最短距离.

另一方面,由于石膏模型的误差、扫描设备的误差、运动捕捉设备的误差、运动测量过程中的误差、配准过程中的误差以及计算的误差,上下牙面在运动仿真过程中可能出现轻微的穿透现象,算法需要识别并处理穿透,以保证咬合分析的结果正确.穿透检测的过程在求解面片对之间最短距离的过程中进行.对于 F_1 的顶点 p_1, p_2 和 p_3 ,令 m 为 F_2 的法向量,算法通过检测 $\overline{q_i p_i} \cdot m$ ($i=1, 2, 3$) 的符号来判断 p_i 在 F_2 的内侧或外侧.若 p_i 在 F_2 的内侧,因为当搜索过程结束时 F_2 是距离 p_i 最近的面片,因此 p_i 必然在 F_2 所组成的牙面模型的内侧;即 p_i 为穿透点,穿透深度即为 $d_{\min}(p_i)$,如图 7 所示.同理可以检测 q_1, q_2 和 q_3 是否为穿透点.

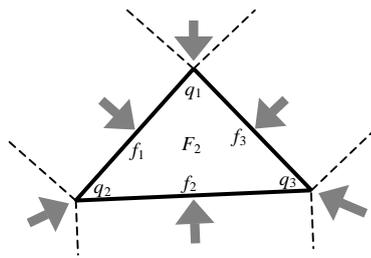


图6 二维 Voronoi 图,灰色箭头指向每个区域的最近特征

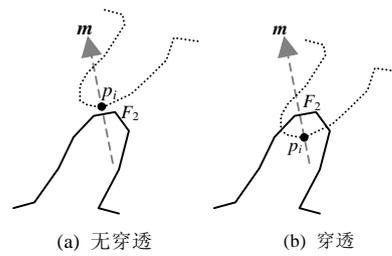


图7 穿透检测方法

5 实验与结果

算法在一台配有 P4 1.8 GHz CPU 和 512 MB RAM 的机器上进行了测试.上牙列模型有 21 086 个顶点、40 288 个面片,下牙列模型有 20 184 个顶点、38 317 个面片,以及从完整的运动数据中选取的开口运动部分帧的运动数据.测试测量了算法计算的时间,结果如图 8 及表 1 所示.

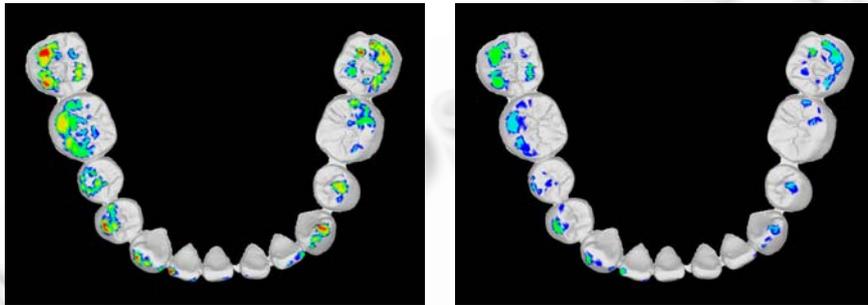


图8 咬合分析结果(左:第 15 帧,右:第 16 帧)

表1 算法计算时间

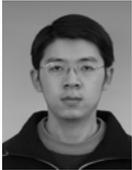
帧 计算时间	第 14 帧(0.26s) 2562ms	第 15 帧(0.28s) 1250ms
-----------	-------------------------	-------------------------

实验表明,本文提出的基于有向包围盒树的新咬合分析算法,以经典的基于有向包围盒树的碰撞检测算法为基础,通过对分离轴定理的结论的推广,借助启发式搜索、分支定界和 Voronoi 图等手段进行优化,可以在较短的时间内对复杂牙列模型进行咬合分析和计算,解决了下颌运动仿真中快速精确咬合分析的问题,有助于虚拟现实技术在口腔医学领域的应用.

References:

- [1] Hayashi T, Saitoh A, Ishioka K, Miyakawa M. A computerized system for analyzing occlusal relations during mandibular movements. *The Int'l Journal of Prosthodontics*, 1994,7(2):108-114.
- [2] Hayashi T, Hashimoto Y, Saitoh A, Miyakawa M. A method of computing the intersurface distance between opposing teeth. *Frontiers of Medical and Biological Engineering*, 1993,5(3):175-184.
- [3] Okamoto A, Hayasaki H, Nishijima N, Iwase Y, Yamasaki Y, Nakata M. Occlusal contacts during lateral excursions in children with primary dentition. *Journal of Dental Research*, 2000,79(11):1890-1895.
- [4] Kordaß B, Gärtner C. The virtual articulator—concept and development of VR-tools to analyse the dysfunction of dental occlusion. *Int'l Congress Series*, 2001,1230:689-694.
- [5] Bisler A, Bockholt U, Kordaß B, Suchan M, Voss G. The virtual articulator. *Int'l Journal of Computerized Dentistry*, 2002, 5(2-3):101-106.

- [6] Zachmann G. Optimizing the collision detection pipeline. In: Baciú G, ed. Proc. of the 1st Int'l Game Technology Conf. (GTEC). Hong Kong: Hong Kong Digital Entertainment Association, 2001. 18–21.
- [7] Zachmann G. Rapid collision detection by dynamically aligned DOP-trees. In: Larry FH, ed. Proc. of the IEEE Virtual Reality Annual Int'l Symp. (VRAIS)'98. Atlanta: The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 1998. 90–97.
- [8] Gottschalk S, Lin MC, Manocha D. OBBTree: A hierarchical structure for rapid interference detection. In: Cunningham S, ed. Proc. of the 23rd Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH'96). New Orleans: ACM, 1996. 171–180.
- [9] Lin MC. Collision detection and proximity queries. In: Hadap S, Eberle D, eds. ACM SIGGRAPH 2004 Course. Los Angeles: ACM, 2004.
- [10] Aurenhammer F. Voronoi diagrams—A survey of a fundamental geometric data structure. ACM Computing Surveys, 1991, 23(3):345–405.



张弛(1984—),男,浙江温州人,硕士生,主要研究领域为人机交互技术,虚拟现实.



张凤军(1971—),男,博士,副研究员,主要研究领域为人机交互技术,虚拟现实, CAD.



陈磊(1977—),男,博士生,主要研究领域为颌学,下颌运动生理.



冯海兰(1952—),女,教授,博士生导师,主要研究领域为下颌运动生理,咬合重建研究,先天缺牙的遗传学研究.



戴国忠(1944—),男,研究员,博士生导师,主要研究领域为人机交互技术,计算机图形学.