有理 Bézier 曲线的降阶*

康宝生[1], 石 茂[2+], 张景峤[3]

[1](西北大学 计算机科学系,陕西 西安 710069)
[2](陕西师范大学 数学与信息科学院,陕西 西安 710062)
[3](上海大学 计算机工程与科学学院,上海 200436)

Degree Reduction of Rational Bézier Curves

KANG Bao-Sheng[1], SHI Mao[2+], ZHANG Jing-Qiao[3]

[1](Department of Computer Engineering and Science, Northwest University, Xi'an 710069, China)
[2](College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)
[3](College of Computer Engineering and Science, Shanghai University, Shanghai 200072, China)
+ Corresponding author: E-mail: shimao@china.com.cn
Received 2003-06-04; Accepted 2003-11-12

Kang BS, Shi M, Zhang JQ. Degree reduction of rational Bézier curves. *Journal of Software*, 2004,15(10): 1522~1527.
http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/1522.htm

Abstract: By means of optimization methods, degree reduction of rational Bézier curves is changed to an optimization problem so that both weights and vertices are considered respectively. Using programming method and Genetic Algorithms, a new method on the reduction of rational Bézier curves is presented. The method has the following virtues: Firstly, it is simply to get the result by fitness function, copy process, crossover process, mutation process, and selection process. Secondly, the rational Bézier Curves can be reduced many times and interpolated. Finally, the reduced Bézier curves can be represented explicitly.
Key words: Bézier curve; degree reduction; genetic algorthm

摘 要: 从最优化思想出发,把有理Bézier曲线的降阶问题转化为求解优化问题,这样使得权因子和控制顶点能被分开考虑,从而保证了权因子的非负性.同时,结合智能计算中的仿生学方法和程序设计方法,给出有理 Bézier 曲线降阶的一种新方法.该方法首先计算简单,应用适应值函数和简单的循环执行复制、交叉、变异、选择求出最优值或次优值,其次实现了有理 Bézier 曲线的保端点插值的多次降阶,降阶后的有理 Bézier 曲线直接以显式给出.
关键词: 有理 Bézier 曲线;降阶;遗传算法
中图法分类号: TP391 **文献标识码**: A

参数曲线曲面降阶是计算机辅助几何设计与制造中的研究热点之一[1],不仅具有重要的理论意义,而且也

* Supported by the Foundation of Shaanxi Education Committee of China under Grant No.00JK119 (陕西省教育厅专项基金)

作者简介: **康宝生**(1961－),男,陕西礼泉人,博士,教授,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学;**石茂**(1974－),男,助教,主要研究领域为计算机几何,计算机图形学;**张景峤**(1975－),女,讲师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学.

有着重要的实际应用价值.首先,不同的造型系统其多项式基的最高次数不尽相同,为了在不同造型系统间进行有效的数据传递,就需要在数据传递时把高次曲线曲面进行降阶逼近;其次,在几何造型中,一条参数曲线的等距线、一张曲面的裁剪边界线、两张曲面片求交后产生的交线等都会产生高次曲线,为了减少信息数据的存储量,需要对曲线进行降阶处理;第三,降阶处理也应用于曲线的光顺处理过程中.

由于 Bézier 曲线应用的广泛性和代表性,国内外许多学者研究了 Bézier 曲线的降阶问题.其方法大致可以分为 3 类:基于控制顶点的几何方法、基于基转换的代数方法及以上两种方法的混合使用.Forrest、Farin 等利用升阶的逆过程来求降阶曲线的控制顶点[2,3];Watkins 和 Worsey 利用 Chebyshev 基转换实现 Bézier 曲线的降阶[4];Eck 则取降阶曲线 $p(t)$的顶点为

$$\overline{p}_i=(1-\lambda_i)p_i^I+\lambda_i p_i^{II},$$

然后利用降阶逼近误差公式计算 λ_i,以求得降阶曲线[5];胡事民从 Bézier 曲线的退化条件出发,利用扰动控制顶点和约束最小二乘法来实现降阶,并将这种方法推广到其他曲线曲面降阶问题[6];陈国栋和王国瑾利用 Bézier 曲线本身的几何性质并结合广义逆矩阵、最佳一致逼近和最小二乘理论,给出了 3 种不同的降阶方法,同时讨论了保端点插值问题[8~10].对于有理 Bézier 曲线的降阶,目前公开并能被找到的只有 Sederberg 和常庚哲以 Chebyshev 多项式理论为基础,寻找最高次为 n 的摄动多项式集

$$\varepsilon^n(t)=\left\{\varepsilon_x^n(t),\varepsilon_y^n(t),\varepsilon_z^n(t)\,|\,t\in[a,b]\right\},$$

使得分子与分母具有一个最佳线性公因子来达到有理 Bézier 曲线的降阶[11].但文献[11]给出的方法计算繁琐,涉及到符号运算和多项式方程求根,且没有讨论降多阶的问题及保端点的情况.本文给出有理 Bézier 曲线降阶的退化条件,并应用遗传算法实现了有理 Bézier 曲线保端点插值的多次降阶.

1 问题的描述

给定一组控制顶点 $\{p_i\}_{i=0}^n\in R^3$ 及相应的权因子 $\{\omega_i\ge 0\}_{i=0}^n$,由其定义的 n 次有理 Bézier 曲线为

$$x(t)=\frac{\sum_{i=0}^n p_i\omega_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)},\ t\in[0,1],$$

其中,$B_i^n=C_n^i t^i(1-t)^{n-i}$ 是 n 次 Bernstein 基函数.

所谓有理 Bézier 曲线 $x(t)$的 m 次降阶,是指找一组控制顶点 $\{\overline{p}_i\}_{i=0}^{n-m}\in R^3$ 和相应的权因子 $\{\overline{\omega}_i\ge 0\}_{i=0}^{n-m}$ ($m<n$),使其确定的 $n-m$ 次有理 Bézier 曲线

$$\overline{x}(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n-m}\overline{p}_i\overline{\omega}_i B_i^{n-m}(t)}{\sum_{i=0}^{n-m}\overline{\omega}_i B_i^{n-m}(t)},\ t\in[0,1],$$

满足条件:

$$\max_{0\le t\le 1} d(x(t),\overline{x}(t))=\max_{0\le t\le 1}\|x(t)-\overline{x}(t)\|=\min.$$

有理 Bézier 曲线的降阶分为退化和非退化两种形式.退化的形式是曲线的分子和分母有相同的 m 次公因式[11],或分子分母的最高项系数同时为 0,即 $\min=0$.

不失一般性,本文只讨论平面有理 Bézier 曲线降阶的非退化形式,所给出的方法可推广到空间曲线中.上述问题可以转化为如下的带约束优化问题[12]:

$$f(P,\overline{P},t,\omega,\overline{\omega})=\min\max_{0\le t\le 1} d(x(t),\overline{x}(t))$$

$$\text{s.t.}\quad P,\overline{P}\in R^n,\ \omega,\overline{\omega}\in R^{n+},\ t\in[0,1],$$

其中 $P,\overline{P}$ 分别为降阶前后的控制顶点向量,$\omega,\overline{\omega}$ 分别为降阶前后的权因子向量,t 为参数.

传统解优化问题是基于迭代原理的各种数值方法,如单纯形法、共轭方向法、罚函数法等[14],但传统的优

化方法存在以下缺点:1) 一般对目标函数都有较强的限制要求,如连续、可微、单峰等.大多数优化方法都是根据目标函数的局部展开性质来确定下一步搜索的方向,这与求函数的整体最优解的目标有一定的抵触.2) 在实现算法之前,要进行大量的准备工作,如求函数的一阶和二阶导数、某些矩阵的逆等.在目标函数较为复杂的情况下,这一工作是很困难的,有时甚至是不可能的.3) 算法结果一般与初始值的选取有较大的关系,不同的初值可能导致不同的结果.初始值的选取较大地依赖于优化者对问题背景的认识以及所掌握的知识.4) 算法缺乏简单性和通用性.针对一个问题,优化方法的使用者需要有相当多的知识去判断使用哪一种方法较为适合,这一困难是使优化方法得到更为广泛应用的主要障碍之一.5) 对某些约束问题较难处理.近年来,遗传算法等智能计算中的仿生学方法在优化领域取得了较好的应用.遗传算法是一类以 Darwin 自然进化论与 Mendel 遗传变异理论为基础的求解复杂全局优化问题的仿生性算法[13~15].它模拟生物进化过程,通过向自然学习来求解问题.它具有以下独特特性:

a．算法的基本作用对象是多个可行解的集合而非单个可行解,使算法具有良好的并行性.

b. 算法只利用函数的适应值信息,而无须应用梯度等其他辅助信息,从而可广泛应用于目标函数不可微及其复杂或无解析表达式类优化问题.

c. 算法通过作用于一个初始种群并循环执行复制、杂交、变异、选择等类似生物进化过程的简单随机操作,具有很强的稳健性和整体优化性.

关于遗传算法的基本概念和收敛性等理论问题可参考文献[13～15].

2 算法描述

基于遗传算法的有理 Bézier 曲线降阶的算法如下[13~15]:

(1) 编码的表示

遗传算法的一个重要的步骤是对所解问题变量的编码表示,主要有二进制编码和实数编码.此处采用实数编码,这是因为对于大部分实数值优化问题采用实数编码比采用二进制编码时算法的平均效率要高.

(2) 群体的初始化

本文中群体由降阶后控制顶点可行解组成.首先产生一个随机数 $\alpha_i \in [0,1], i=0,\dots,n-m$,然后应用

$$\overline{p}_i = p_{\min} + \alpha_i (p_{\max} - p_{\min}), \overline{\omega}_i = \omega_{\min} + \alpha_i (\omega_{\max} - \omega_{\min}), i=0,\dots,n-m$$

求得区间 $[p_{\min}, p_{\max}]$ 和 $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ 上的点.其中 $\overline{p}_i$ 为降阶后的控制顶点分量, $p_{\min}, p_{\max}$ 为可取到的最小实数值和最大实数值, $\omega_{\min}, \omega_{\max}$ 为可取到的最小正实数值和最大正实数值.为了保证端点的插值性,可令 $\overline{p}_0 = p_0$, $\overline{p}_{n-m} = p_n$.

(3) 适应值函数

群体的每个个体都有一个适应值,个体的性质越优,适应值越大,其繁殖下一代的可能性也越大.此处适应值函数选为

$$f(t) = \frac{1}{1 + \max\limits_{0 \le t \le 1} \| x(t) - \overline{x}(t) \|}.$$

在算法实现中采用的是适应值函数的离散形式:

$$f(t) = \frac{1}{1 + \max\limits_{\substack{0 \le t_j \le 1 \\ j=0,1,\cdots,s}} (d(x(t_j), \overline{x}(t_j))},$$

其中,S 为用户指定的任意非负整数.

(4) 选择

选择的目的是为了从当前群体中选择出优良的个体,使它们有机会作为父代繁殖子孙,较大的选择压力会使最优个体具有较高的复制数目.本文采用常用的转盘方法(roulette wheel selection)来进行选择.

(5) 杂交

双亲的染色体以杂交的方式产生出子代染色体,从而使子代个体继承了双亲的遗传特性.这里采用算术杂

交,即设两个父向量为

$$s_1=(u_0^1..u_{n-m}^1),s_2=(u_0^2..u_{n-m}^2),$$

它们通过算术杂交 $v_i^1=\alpha_i u_i^1+(1-\alpha_i)u_i^2,v_i^2=\beta_i u_i^1+(1-\beta_i)u_i^2$ 产生两个后代

$$s_1'=(v_0^1\cdots v_{n-m}^1),s_2'=(v_0^2\cdots v_{n-m}^2),$$

其中 α_i,β_i 为[0,1]上的随机数.在实际应用时,把降阶后的控制顶点分量、权因子分别带入上式进行计算.

(6) 变异

在实数编码时,变异算子的作用主要体现在搜索上.这里采用一般的随机对应法,即从 $[p_{\min},p_{\max}]$ 和 $[\omega_{\min},\omega_{\max}]$ 中选择 $\overline{b}_i'$ 和 $\overline{\omega}_i'$,替换子解向量中的对应位置的 $\overline{b}_i$ 和 $\overline{\omega}_i$.

(7) 收敛条件

当满足下列条件之一时,遗传算法结束:(a) 已经处理完所有代群体;(b) 已经达到需要的误差范围.

(8) 控制参数

在遗传算法中,有群体的大小、遗传运算的终止进化代数、交叉变异及变异概率等 4 个控制参数需要预先给定.通过实验,本文采用的参数值分别为 80~120,180~250,0.5~0.9,0.02~0.15.

3 实现步骤

Step 1. 输入降阶前的有理 Bézier 曲线的次数及控制顶点 $p_i,i=0,...,n$.

Step 2. 绘制降阶前的控制多边形及曲线.

Step 3. 初始化群体代数和控制参数及误差.

Step 4. 产生初始群体.

Step 5. 计算群体的每个个体的适应值.

Step 6. 若迭代次数小于群体代数或每个个体的适应值大于给定误差,转 Step 7;否则,转 Step 8.

Step 7. 进行选择杂交产生新的子代,返回 Step 6.

Step 8. 绘制降阶后的有理 Bézier 曲线的控制多边形及曲线.

4 误差分析

将降阶后的有理 Bézier 曲线 $\overline{x}(t)$ 进行 m 次升阶,设所得曲线为 $x^*(t)$,相应的控制顶点及权因子分别为 p_i^*,ω_i^*,则可得降阶误差为

$$\varepsilon=\left\|x(t)-x^*(t)\right\|\le\frac{\max(\omega_i\omega_j^*\left\|p_i-p_j^*\right\|)}{\min(\omega_i\omega_j^*)},i=0,...,n,j=0,...,n.$$

5 数值实验

本文就所给出的算法进行了大量的数值实验,选用的运行环境为 PC:P4,2.4GHz;内存:256MB;操作系统为 WINDOWS XP;编程语言 Borland c++ 6.0,Visual c++ 6.0;遗传运算的终止进化代数:250 代;运行一次的时间小于 400ms(参考时间).

例 1:降 1 阶.

给定有理四次 Bézier 曲线,其控制顶点及权因子为{450,350,10},{400,200,20},{300,120,30},{130,200,10},{60,350,20}.降一阶后所得有理三次 Bézier 曲线的控制顶点及权因子为{450.000000,350.000000,402.711521},{353.085432,114.051547,691.457254},{184.098890,125.425135,258.046418},{60.000000,350.000000,407.827224},降阶前后两曲线的误差是 $\varepsilon=5.488621$(像素),如图 1 所示.

例 2:降 1 阶.

给定控制顶点及权因子为{550,400,10},{480,200,20},{400,150,30},{300,200,10},{200,350,20},{50,150,25}

的有理五次 Bézier 曲线.降一阶后所得有理四次 Bézier 曲线的控制顶点及权因子为{550.000000,400.000000,299.922898},{450.042804,138.632371,491.137616},{367.966453,74.840404,438.756569},{315.332215,480.692167,410.238285},{50.000000,150.000000, 843.177156},降阶前后两曲线的误差是 $\varepsilon=7.524102$ (像素),如图 2 所示.

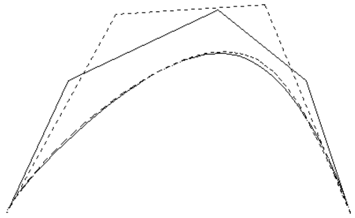


Fig.1 Degree reduction from 4 to 3

图 1 四次降为三次

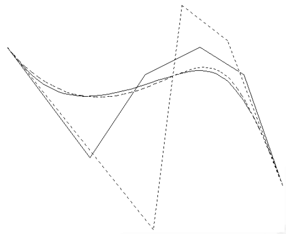


Fig.2 Degree reduction from 5 to 4

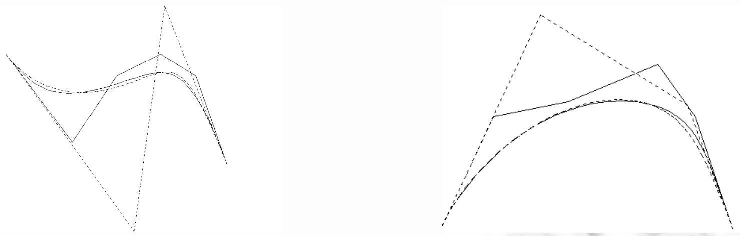
图 2 五次降为四次

例 3:降 2 阶.

图 3(a)是例 2 所给有理五次 Bézier 曲线降二阶的实例,降二阶后所得有理三次 Bézier 曲线的控制顶点及权因子为{550.000000,400.000000,341.256995},{409.654379,42.116821,632.992364},{340.038401,551.168467,269.585331},{50.000000,150.000000,527.167999},降阶前后两曲线的误差是 $\varepsilon=8.278032$ (像素).

例 4:降 2 阶.

图 3(b)是有理五次 Bézier 曲线降为有理三次 Bézier 曲线的另一实例.这里,有理五次 Bézier 曲线的控制顶点及权因子为{450,350,10},{400,200,30},{350,130,15},{230,180,20},{130,200,10},{60,350,10}.降二阶后所得有理三次 Bézier 曲线的控制顶点及权因子为{450.000000,350.000000,160.635002},{390.006001,185.370648,614.811225},{193.199043,64.049354,301.068772},{60.000000,350.000000,355.684720},降阶前后两曲线的误差是 $\varepsilon=6.076010$ (像素).



(a) (b)

Fig.3 Degree reduction from 5 to 3

图 3 五次降为三次

6 结 论

从遗传算法的运行机制出发,可知整个算法执行过程中隐含着对有理 Bézier 曲线的重新参数化.本文利用有理 Bézier 曲线的几何性质,并结合智能计算中的仿生学方法和程序设计,给出了有理 Bézier 曲线降阶的一种新方法.本文的思想和方法可以方便地推广到参数曲面上的降阶逼近.

致谢 感谢浙江大学王国瑾教授、西北工业大学叶正麟教授的指导与讨论.

References:

[1] Wang GJ, Wang GZ, Zheng JM. Computer Aided Geometric Design. Beijing: China Higher Eduction Press, Berlin: Spring-Verlag, 2001 (in Chinese).

[2] Forrest AR. Interactive interpolation and approximation by Bézier curves. The Computer Journal, 1972,15(1):71~79.

[3] Farine G. Algorithms for rational Bézier curves. Computer Aided Design, 1983,15(2):73~77.

[4] Watkins M, Worsey A. Degree reduction for Bézier .Computer Aided Design, 1988,20(7):398~405.

[5] Eck MA. Degree reduction of Béziercurves. Computer Aided Geometric Design, 1993,10(4):237~257.

[6] Hu SM, Sun JG, Jin TG, Wang GZ. Approximate degree reduction of Bézier curves. Tsinghua Science and Technology, 1998,3(2): 997~1000.

[7] Yong JH, Hu SM, Sun JG. Degree reduction of B-Spline curves. Computer Aided Geometric Design, 2001,18(2):117~127.

[8] Chen GD, Wang GJ. Degree reduction approximation of Bézier curves by generalized inverse matrics. Journal of Software. 2001,12(3):435~439 (in Chinese with English abstract).

[9] Chne GD, Wang GJ. Multidegree reduction of Bézier curves with conditions of endpoint interpolations. Journal of Software, 2000,11(9):1202~1206 (in Chinese with English abstract).

[10] Chen GD.The degree reduction and offset approximation in CAGD [Ph.D.Thesis]. Hangzhou: Zhejiang University, 2001. (in Chinese with English abstract)

[11] Sederberg TW, Chang GZ. Best linear common divisor for approximation degree reduction. Computer Aided Design, 1993,25(3): 163~168.

[12] Chen BL. Optimization Theory and Algorithm. Beijing: Tsinghua University Press, 1989. (in Chinese)

[13] Pan ZJ, Kang LS. Chen YP. Evolutionary Computation. Beijing: Tsinghua Univetsity Press, 1998. (in Chinese)

[14] Xu ZB, Gao Y. Analysis of premature convergence about Genetic algorithm and How to avoid it. Science in China (Series E), 1996,26(4):364~375. (in Chinese with English abstract)

[15] Qin KH, Wu B, Guan YJ. 3D genetic tetrahedral mesh generation algorithm. Science in China (Series E), 1997,27(1):67~73. (in Chinese with English abstract)

附中文参考文献:

[1] 王国瑾,汪国昭,郑建民.计算机辅助几何设计.北京:高等教育出版社,柏林:施普林格出版社,2001.

[8] 陈国栋,王国瑾.基于广义逆矩阵的 Bézier 曲线降阶逼近.软件学报,2001,12(3):435~439.

[9] 陈国栋,王国瑾.带端点插枝条件的 Bézier 曲线降多阶逼近.软件学报,2000,11(9):1202~1206.

[10] 陈国栋.CAGD 中的降阶转换和等距变换[博士学位论文].杭州:浙江大学,2001.

[12] 陈宝林.最优化理论与算法.北京:清华大学出版社,1989.

[13] 潘正军,康立山,陈毓屏.演化算法.北京:清华大学出版社,1998.

[14] 徐宗本,高勇.遗传算法过早收敛的特征分析及其预防.中国科学(E 辑),1996,26(4):364~375.

[15] 秦开怀,吴边,关右江.三维单纯形划分的遗传算法.中国科学(E 辑),1997,27(1):67~73.