1000-9825/2002/13(11)2183-05 ©2002 Journal of Software 软 件 学 报 Vol.13, No.11

三维矩形块布局的序列三元组编码方法*

陆一平, 查建中

(北方交通大学 机械与电子控制工程学院,北京 100044)

E-mail: luyiping@cad.tcc.com.cn; jzcha@center.njtu.edu.cn

http://www.njtu.edu.cn

摘要: 解空间的序列对编码方法是解二维矩形体聚块布局问题的完整且有限(P-admissible)的编码方法.它产生于直观的分划过程(gridding procedure).受二维序列对编码方法的启示,对三维矩形聚块布局问题,也应该存在序列三元组编码方法.然而将直观分划过程直接推广到三维空间是困难的.通过对序列和部分序列的运算和分析,得到了三维矩形块聚块布局的序列三元组编码方法,此编码方法是完整且有限的.

关 键 词: 布局;序列;编码;模拟退火

中图法分类号: TP182 文献标识码: A

二维的矩形布局问题已经被证明是 NP 完全问题,三维矩形块布局则更为复杂.目前解决这些问题的主要途径是采用计算智能方法(如模拟退火方法)对问题解空间进行有限的合理搜索[1,2].包含问题全局最优解的解空间是问题的完整解空间.以往有很多搜索方法使算法运行于非完整解空间中,例如,文献[3~6]的空间分割方法和文献[7~9]的启发式方法.搜索问题的完整解空间并不等于精确地求解该问题,但是有理由认为运行于完整解空间的有限合理搜索方法要好.假如采用编码方式表达问题的解空间,一个有效的搜索解空间起码应该符合如下几项条件[1]:

(1) 编码空间是有限的;

(2) 每个编码的解都是可行的;

(3) 编码的实现(即编码对应的具体几何布局及其优化目标值的获得)能在多项式时间内完成;

(4) 存在一个编码对应于问题的全局最优解.

文献[1]称上述解空间是 P-Admissible 的,并给出使用序列对(sequence-pair)对二维矩形聚块布局问题进行编码的方法.为证明其方法的 P-Admissible 性,文献[1]描述了一种直观的分划过程.在三维矩形块布局中,很难实现这个分划过程,妨碍了这种方法向三维问题的推广.与分划过程相区别,本文主要通过对“序列”、“部分序列”的概念定义和表达运算,找出了对三维空间矩形块聚块布局解空间的序列三元组编码方法,此方法是 P-Admissible 的.

1 矩形块布局问题及解决方法

1.1 问 题

本文讨论矩形块聚块布局问题,优化目标是使聚块布局的占用空间的体积(长×宽×高)最小,也即空间占用率最高.矩形块布局问题有一个隐含约束,即所有矩形块的边或面平行于布局空间.这样,各个矩形块朝向还可以自由绕各个边做 90°旋转.假定待布矩形块的朝向固定(朝向不固定的问题可以被平凡地实现[1]).聚块问题主

* 收稿日期: 2001-03-16; 修改日期: 2001-06-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69974002);北方交通大学论文基金资助项目(PD119)

作者简介: 陆一平(1965－),男,广西上林人,博士,副教授,主要研究领域为布局自动化,CAD,CAD/CAM;查建中(1947－),男,江苏南京人,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为智能工程,布局自动化,先进制造技术.

要出现在产品的设计问题中.

1.2 求解方法

解决途径:使用模拟退火方法.

编码系统:将待布置的三维矩形块编号为连续自然数 $1,\ldots,n$;所谓序列即是矩形块编号的一个次序排列 $\Gamma=(k_1,k_2,\ldots,k_u,\ldots,k_v,\ldots,k_n)$,其中任意 $k_u,k_v\in\{1,2,\ldots,n\}$,且 $k_u\neq k_v$;使用 3 个相互独立的序列即序列三元组($\Gamma1,\Gamma2,\Gamma3$)来表达聚块优化布局的解空间.下面我们将说明这种编码方式是 P-Admissible 的.

2 序列与部分序列

2.1 基本定义

定义 **1**(序列的矩阵表达). 使用二值矩阵 A 表示序列Γ:$A=\{a_{ii}\}$是一个 $n\times n$ 的二值(binary,即任意 a_{ii} 只能取 0 值或 1 值)矩阵;如果在序列Γ中,编号 j 在 i 之后,则元素 $a_{ij}=1$,否则 $a_{ij}=0$,并规定所有对角线元素 $a_{ii}=0$.

定义 **2**(部分序列). $n\times n$ 矩阵 $P=\{p_{ij}\}$所定义的次序关系是一个部分序列,如果:(1) p_{ij} 的取值为 0 或 1(即 P 为二值矩阵);(2) 对角线元素 $p_{ii}=0$;(3) $p_{ij}\cdot p_{ji}=0$;(4) 传递性:如果 $p_{ik}=1$ 且 $p_{kj}=1$,则必有 $p_{ij}=1$.

定义 **3**(满阵、单位阵). 满阵是所有元素都为 1 的 $n\times n$ 矩阵,记为 F;单位阵是对角线元素为 1 而其余元素为 0 的 $n\times n$ 矩阵,记为 I.

定理 **1**. $n\times n$ 二值矩阵 A 是序列矩阵的充分必要条件是:(1) $A+A'=F-I$;(2) 传递性:如果 $a_{ik}=1$ 且 $a_{kj}=1$,则必有 $a_{ij}=1$.

证明略.

2.2 序列的三元分解

2.2.1 定 义

定义 **4**(部分序列的正交). 如果 3 个部分序列矩阵 $P1,P2,P3$ 使得 $P1+P2+P3+(P1+P2+P3)'=F-I$,则称 $P1,P2,P3$ 是正交的.

定义 **5**(序列的三元分解). 如果 3 个部分序列矩阵 $P1,P2,P3$ 使得 $P1+P2+P3$ 是序列,则称 $P1,P2,P3$ 是序列的三元分解.显然,序列的三元分解是正交的.

2.2.2 序列三元分解的构造方法

说明:以下将使用 $A1\cdot A2$ 表示二矩阵对应元素相乘形成的新矩阵.设 $A1,A2$ 是部分序列矩阵,则其元素乘 $A1\cdot A2$ 也是部分序列矩阵.

定理 **2**. 如果 $A1,A2,A3$ 是序列矩阵,则如下矩阵 $G1,G2,G3$ 是序列的三元分解:

$$\left.\begin{aligned} G1&=A1\cdot A2\cdot A3,\\ G2&=A1\cdot A2',\\ G3&=A1\cdot A2\cdot A3'.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

证明:首先,$G1,G2,G3$ 是部分序列.其次,

$$G1+G2+G3=A1\cdot A2\cdot A3+A1\cdot A2'+A1\cdot A2\cdot A3'=A1\cdot A2\cdot(A3+A3')+A1\cdot A2'=A1\cdot(A2+A2')=A1.$$

即 $G1+G2+G3$ 是序列,根据定义 5,$G1,G2,G3$ 是序列的三元分解. □

2.3 序列三元分解的序列三元组表达

定理 **3**. 设 $G1,G2,G3$ 是序列的三元分解,且 $G1+G2,G2+G3,G3+G4$ 是部分序列,则一定可以找到 3 个序列 $A1,A2,A3$,使得通过 $A1,A2,A3$,按照定理 2 的运算公式得出 $G1,G2,G3$.

证明:事实上,只要取

$$A1=G1+G2+G3,\ A2=G1+G2'+G3,\ A3=G1+G2+G3',$$

代入式(1)的右端,就分别有

$$A1\cdot A2\cdot A3=(G1+G2+G3)\cdot(G1+G2'+G3)\cdot(G1+G2+G3')=G1,$$

$$A1\cdot A2'=(G1+G2+G3)\cdot(G1+G2'+G3)'=G2,$$

$$A1\cdot A2\cdot A3'=(G1+G2+G3)\cdot(G1+G2'+G3)\cdot(G1+G2+G3')'=G3.$$

可以证明,这样计算出来的 $A1,A2,A3$ 是序列(限于篇幅,具体证明过程略). □

3 矩形块布局的序列三元分解表达

在矩形块聚块布局中,每一个矩形块的边都是沿三维笛卡尔坐标 x,y 或 z 放置的.沿 x 方向考虑矩形块布局,对于一个优化的布置,如果任意两矩形块 $i,j(i\neq j)$在 x 方向上相邻,则我们可以沿 x 方向找出它们的次序,这种次序关系有传递性,于是沿 x 方向可以定义出部分序列 $G1$.同样,沿 y,z 方向分别可以定义出部分序列 $G2,G3$.考察三维空间两个矩形块 i,j,如果它们紧密相邻,则矩形块 j 或者在矩形块 i 的左、右,或者在其上、下,或者在其前、后,六者选且只能选其一,否则就不是一个优化的布局.于是,紧密相邻的两个矩形块之间的次序关系只能是六者选且只能选其一.如果 i,j 并非紧密相邻,i,j 之间通过紧密相邻产生的次序传递关系,也必然在六者之间选且只能选其一.因此 $G1,G2,G3$ 是正交的.我们再来说明在优化布局中,$G1+G2,G2+G3,G3+G1,G1+G2+G3$ 中不存在递推循环(递推矛盾),即 $G1+G2,G2+G3,G3+G1$ 应该是部分序列.让我们分析一下在前述各加法等式中存在循环的情况.因为我们要考察当 $G1,G2,G3$ 关系绝对成立时矩形块的布局状态,所以我们可以把 $G1,G2,G3$ 所定义的关系看成是约束.如果我们将上述各加法等式中存在循环的约束施加到矩形块布局中,则可以发现所有这些布局方式都不是矩形块的紧凑布局方式(限于篇幅,详细说明略).于是,$G1,G2,G3$ 是序列的三元分解,即对每一个可能是优化布局矩形块聚块布局,都可以定义出一个三元部分序列组 $G1,G2,G3$,满足 $G1,G2,G3$ 是一个序列的三元分解.

4 部分序列三元组约束下的优化布局

设 $G1,G2,G3$ 是序列的三元分解,将其看成是聚块布局的约束,那么聚块的包容矩形空间的 x,y,z 方向的紧凑布局分别可以从 $G1,G2,G3$ 计算出来.以 x 方向为例,步骤如下:

使用 $G1=\{g_{ij}\}$定义一个有向图 $D1(V,E)$:

V:点集——包括:源 s;宿 t;所有待布矩形块的编码 $1,2,\ldots,i,\ldots,j,\ldots,n$;

E:边集——包括:(s,i),如果 $g_{1i}+g_{2i}+\ldots+g_{ni}=0$;$(i,j)$,如果 $g_{ij}=1$;(i,t),如果 $g_{i1}+\ldots+g_{in}=0$;

W:权——对节点加权:s,t 的权为 0,节点 i 的权为矩形块 i 的水平长度.

矩形块 i 的 x 坐标为 s 到 i 的最大点加权路径的长度.三维包容矩形空间在 x 方向的尺寸为点加权有向图 $D1$ 由 s 到 t 的最大路径长度.计算 s 到所有其他点的点加权最大路径的时间复杂度为 $O(n^2)$[1].其他两个方向上的布局坐标以及空间占用尺寸可以同理得到.由于三向坐标和尺寸分别由 $G1,G2,G3$ 独立得到,因此计算优化目标函数的时间复杂度为 $O(n^2)$.

5 基于序列三元组的模拟退火算法

5.1 编 码

采用序列三元组$(\Gamma1,\Gamma2,\Gamma3)$对布局模式进行编码,译码过程如下:

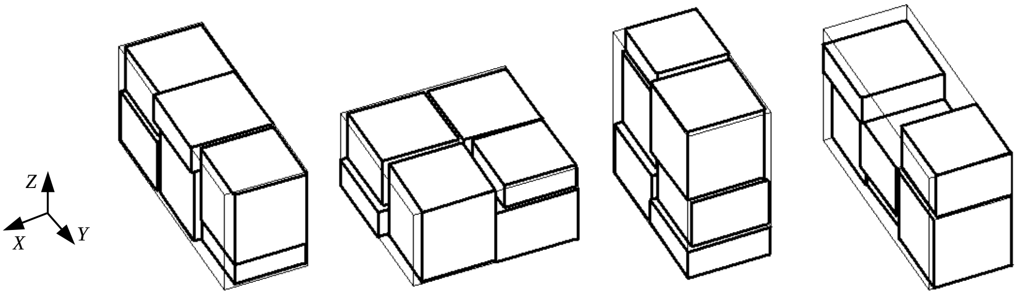
译码:将序列三元组$(\Gamma1,\Gamma2,\Gamma3)$表达成序列矩阵$(A1,A2,A3)$,按定理 2 生成序列三元分解 $G1,G2,G3$,使用第 5.1 节中叙述的方法产生 $G1,G2,G3$ 约束下的聚块空间所占用的三度优化长度 $l1,l2,l3$,优化目标函数即聚块空间体积,$V=l_1\times l_2\times l_3$.

在第 3 节中,我们已经说明任何一个紧凑布局均可以使用序列三元分解 $G1,G2,G3$ 表达;而在第 2 节中已经证明任何一个序列的三元分解一定能够由一个序列三元组$(\Gamma1,\Gamma2,\Gamma3)$通过定理 2 得到.因此,通过上述方法译码的序列三元组编码所形成的解空间中肯定包含聚块布局的优化解.上述译码过程的时间复杂度为 $O(n^2)$且每个编码均可以被实现.另外,显然编码空间是有限的.所以序列三元组编码方法是 P-Admissible 的.

5.2 算 例

例:设有 6 个矩形块,尺寸分别为(3.1,3.1,1.1),(3.2,3.2,3.6),(3.3,3.3,2.2),(3.4,3.4,3.5),(3.5,3.5,2.5),(3.6,3.6,1.3),优化聚块布局的空间占用体积.

求解:使用模拟退火方法.初始温度 $T0$=10000,线性降温系数 DT=1.0,初始序列三元组随机产生,在小于 2 秒的时间内求得如图 1(a)所示的最好方案.图 1(b)~(d)是一些典型的中间结果.表 1 列出了与这些结果相应的重要参数数值.



(a) Quasi-Optima solution (a) 近优化解 (b) Midway solution 1 (b) 中间解 1 (c) Midway solution 2 (c) 中间解 2 (d) Midway solution 3 (d) 中间解 3

Fig.1 Block cluster packing solutions
图 1 矩形块聚块布局结果

Table 1 Data of block cluster packing solutions
表 **1** 矩形块聚块布局结果数据

Solution①	Sequence triplet $\Gamma1,\Gamma2,\Gamma3$②	Block location (coordinate of point with minimum coordinate values)③	Cluster packing volume④	Space utility ratio⑤ (%)
The quasi-optima solution⑥	(5,3,4,1,6,2,7,8) (1,2,4,5,6,3,8,7) (3,6,4,2,5,1,7,8)	(0.0,6.9,0.0),(0.0,6.9,1.1),(0.0,0.0,2.5) (0.0,3.5,0.0),(0.0,0.0,0.0),(0.0,3.3,3.5)	3.6×10.1×4.8=174.528	91.29
Midway solution⑦ 1	(4,5,6,1,3,2,7,8) (5,1,4,2,6,3,8,7) (1,5,4,2,3,6,7,8)	(0.0,3.6,2.5),(3.5,3.6,0.0),(3.5,0.0,1.3) (0.0,0.0,0.0),(0.0,3.4,0.0),(3.5,0.0,0.0)	7.1×6.9×3.6=176.364	90.34
Midway solution 2	(5,2,6,3,1,4,7,8) (6,3,5,4,2,1,8,7) (1,4,2,5,3,6,7,8)	(0.0,0.0,6.1),(0.0,0.0,2.5),(0.0,3.5,1.3) (0.0,3.2,3.5),(0.0,0.0,0.0),(0.0,3.5,0.0)	3.6×7.1×7.2=432.0	86.58
Midway solution 3	(2,1,5,4,6,3,7,8) (4,1,3,5,2,6,8,7) (3,6,4,5,2,1,7,8)	(0.0,3.2,0.0),(0.0,0.0,0.0),(0.0,6.7,3.5) (0.0,6.7,0.0),(0.0,3.2,1.1),(0.0,0.0,3.6)	3.6×10.1×5.7=486.0	76.88

①解,②序列组$\Gamma1,\Gamma2,\Gamma3$,③矩形块位置(最小坐标点的坐标值),④聚块体积,⑤空间利用率,⑥近优化解,⑦中间解.

6 结 论

使用序列三元组可以实现对矩形块布局的解空间编码.这种编码是 P-Admissible 的.序列三元组编码方法可以保证绝对最优解在解空间之内.本文的方法可以作一般化推广.例如,四维矩形体布局可以使用序列矩阵 $A1,A2,A3$ 表示成序列的四元分解:$A1\cdot A2\cdot A3, A1\cdot A2\cdot A3', A1\cdot A2'\cdot A3, A1\cdot A2'\cdot A3'$.

References:

[1] Murata, Hiroshi, Fujiyoshi, Kunihiro, Nakatake, Shigetoshi, *et al*. VLSI module placement based on rectangle-packing by the sequence-pair. IEEE Transactions on CAD of IC&S, 1996,15(12):1518~1523.

[2] Vidal, V.V.R. Applied Simulated Annealing. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[3] Wang, Ai-hu, Zha, Jian-zhong. A heuristic algorithm for rectangular packing based on bintree expression. Journal of Software, 1996,7(4):252~257 (in Chinese).

[4] Otten, R.H.J.M. Automatic floorplan design. In: Proceedings of the 19th ACM/IEEE Design Automation Conference. New York: ACM Press, 1982. 261~267. http://www.acm.org/dl.

[5] Wong, D.F., Liu, C.L. A new algorithm for floorplan designing. In: Proceedings of the 23rd ACM/IEEE Design Automation Conference. New York: ACM Press, 1986. 101~107.

[6] George, J.A., Robinson, D.F. A heuristic for Packing boxes into a container. Computer and Operational Research, 1980,7:147~156.

[7] He Da-yong. Research on solution to container loading problem [MS. Thesis]. Beijing: Northern Jiaotong University, 2000 (in Chinese).

[8] Bischoff, E., Dowsland, W.B. An application of the micro to product design and distribution. Operational Research Society Journal, 1982,33:271~280.

[9] Liu, De-quan, Teng, Hong-fei. An improved BL algorithm for genetic algorithm of the orthogonal packing of rectangles. European Journal of Operational Research, 1999,112(2):413~420.

附中文参考文献:

[3] 王爱虎,查建中.一种基于二叉树结构表达的矩形物体布局的启发式方法.软件学报,1996,7(4):252~257.

[7] 何大勇.集装箱布局问题求解方法研究[硕士学位论文].北京:北方交通大学,1999.

Sequence Triplet Method for 3D Rectangle Packing Problem*

LU Yi-ping, ZHA Jian-zhong

(*College of Mechanical, Electrical and Control Engineering*, *Northern Jiaotong University*, *Beijing* 100044, *China*)

E-mail: luyiping@cad.tcc.com.cn; jzcha@center.njtu.edu.cn

http://www.njtu.edu.cn

Abstract: The sequence-pair method is a sufficient and finite (P-admissible) coding method for solution space representation of 2D rectangle packing problem, and is proved from a graphical demonstration called Gridding Procedure. Inspired by the 2D sequence-pair method, there should also be sequence-triplet method for 3D rectangle packing problem. But in 3D space, the gridding procedure is difficult to be realized. In this paper, a way is introduced to achieve the sequence-triplet method for 3D rectangle packing problem by analysis and deduction of matrix representation of sequence and partial sequence. This sequence-triplet coding method is P-admissible.

Key words: packing; sequence; coding; simulated annealing

* Received March 16, 2001; accepted June 21, 2001

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.69974002; the Northern Jiaotong University Paper Foundation under Grant No.PD119