

基于插值的 Bernstein 多项式复合及其曲线曲面应用*

冯结青, 彭群生

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

E-mail: {jqfeng; peng}@cad.zju.edu.cn

http://www.cad.zju.edu.cn

摘要: 在曲线曲面造型中, Bernstein 多项式复合被广泛用于许多几何操作, 因而具有重要的理论和实际意义. 基于多项式插值和符号计算的思想, 研究了 Bernstein 多项式函数复合问题, 并将其应用于曲线曲面的情形. 与两种已有方法相比, 新方法具有速度快、易于编程实现、占用存储空间少的特点, 但数值精度低于基于广义 de Casteljau 算法的多项式复合结果.

关键词: Bernstein 多项式; 函数复合; 多项式插值; 符号计算; 数值精度

中图法分类号: TP391 **文献标识码:** A

在曲线曲面造型中, Bernstein 多项式复合被广泛应用于求值、剖分、自由变形、Trimmed 曲线曲面表示、Bézier 单形和张量积 Bézier 形式之间的相互转换、升阶、Bézier 曲面的自然延拓等几何操作, 因此研究 Bernstein 多项式的复合算法具有重要的理论和实践意义.

DeRose 等人首先研究了基于广义 de Casteljau 算法和 Blossoming 算法的复合方法^[1,2], 这两种算法在本质上是一样的, 以下我们简称为广义 de Casteljau 算法. 虽然它们都是数值稳定的, 但计算量非常大, 而且编程实现也比较复杂. Liu 和 Mann 在分析了广义 de Casteljau 算法计算复杂性的基础上^[3], 通过基函数变换和重用广义 de Casteljau 算法中间计算结果的技巧, 提出了优化的广义 de Casteljau 算法(以下简称为优化算法). 但是, 这种加速是以占用更多的存储空间、复杂的程序代码以及结果的数值精度降低为代价的. 所以文献^[3]指出: 如果用户不追求计算速度, 那么最好采用广义 de Casteljau 算法. 胡事民等人将广义 de Casteljau 算法应用于 Bézier 曲面的相互转化、广义离散和 Trimmed 曲面表示^[4-7], 并对边界情形做了进一步的优化. 本文对于 Bézier 曲面提出了基于移位算子的复合算法^[8], 得到了广义 de Casteljau 算法的简洁表示, 在计算量、编程复杂性、存储空间和数值精度方面与文献^[1,2]方法类似.

本文提出了一种基于多项式插值和符号计算的快速 Bernstein 多项式复合算法, 以下简称插值法. 在新方法中, 复合所得到的 Bernstein 多项式的系数通过采样和插值计算得到. 通过适当地选取采样点, 使得对于给定的多项式次数、插值矩阵为常数矩阵. 这些常数矩阵的逆矩阵可以在预处理过程中通过符号计算的方法得到. 最后我们对广义 de Casteljau 算法、优化算法和本文的插值法在计算量、可编程性、存储空间、数值精度方面进行了详细的分析和比较, 指出了各自的优、缺点.

1 基于多项式插值和符号计算的 Bernstein 多项式复合

Bernstein 多项式的函数复合可以简单地表示为: 给定两个 Bernstein 多项式 $G: X \rightarrow Y$ 和 $F: Y \rightarrow Z$, 其中 X, Y, Z 为仿射空间. 当 G 和 F 为定义在单形上的 Bernstein 多项式时, 我们记 G 和 F 的次数分别为 $\deg(G)$ 和

* 收稿日期: 2001-01-11; 修改日期: 2001-08-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69903008); 国家创新研究群体科学基金资助项目(60021201)

作者简介: 冯结青(1970 -), 男, 江苏宜兴人, 博士, 副研究员, 主要研究领域为计算机辅助几何造型, 计算机动画; 彭群生(1947 -), 男, 湖南新化人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为真实感图形, 计算机动画, 三维几何造型, 红外图像, 工程图纸扫描识别.

$\deg(F)$;当 G 和 F 为张量积形式的 Bernstein 多项式时(本文只限于对二元张量积的讨论),记其次数分别为 $(\deg(G)_u, \deg(G)_v)$ 和 $(\deg(F)_u, \deg(F)_v)$. Bernstein 多项式的函数复合问题就是计算复合函数 $H = F \circ G: X \rightarrow Z$ 的 Bernstein 多项式形式的显式表达式.

根据文献[2]中的证明,我们要知道复合所得的多项式 H 仍为 Bernstein 多项式,并且它的形式自然地依赖于多项式 G 的形式.这里我们注意复合问题中的两个特点:首先,我们可以通过分别计算 G 和 F 的方法得到多项式 H 在其参数域中的任意一点的值;其次,复合结果 H 仍为 Bernstein 多项式.根据以上特点并结合数值分析中多项式插值理论,启发我们可以用多项式插值技术实现 Bernstein 多项式的函数复合.

1.1 复合结果 H 为 Bézier 曲线的情形

当 Bernstein 多项式 G 为平面 Bézier 曲线时,无论多项式 F 的形式为空间 Bézier 曲线、空间三角 Bézier 曲面还是空间张量积 Bézier 曲面,复合结果 H 均为一条空间 Bézier 曲线,其次数为 $\deg(G) \cdot \deg(F)$ 或 $\deg(G) \cdot (\deg(F)_u + \deg(F)_v)$. 众所周知,单位区间 $[0, 1]$ 上的 n 次 Bernstein 基函数是该区间上的 n 次多项式空间的一组基.根据数值分析中多项式插值定理可知:对于 n 次 Bernstein 多项式 H ,可以通过插值 $(n+1)$ 个不同采样点精确地重建.我们记 Bézier 曲线 H 的形式为 $H(t) = \sum H_i B_{i,n}(t)$,这里,曲线 $H(t)$ 的控制顶点 $\{H_i\}$ 未知.通过计算 Bézier 曲线 $H(t)$ 在 $t_i = i/n (i=0, 1, \dots, n)$ 处的 $(n+1)$ 采样点的值,我们可以建立如下 $(n+1)$ 维线性方程组:

$$\begin{pmatrix} B_{0,n}(t_0) & B_{1,n}(t_0) & \cdots & B_{n,n}(t_0) \\ B_{0,n}(t_1) & B_{1,n}(t_1) & \cdots & B_{n,n}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{0,n}(t_n) & B_{1,n}(t_n) & \cdots & B_{n,n}(t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H(t_0) \\ H(t_1) \\ \vdots \\ H(t_n) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

求解式(1),我们可以得到 Bézier 曲线 $H(t)$ 的控制顶点 $\{H_i\}$. 记式(1)左边的矩阵为 $B_n^{(1)}$,其中上标“(1)”表示单变元,下标“ n ”表示 Bézier 曲线的次数.易知:对于给定的次数 n ,矩阵 $B_n^{(1)}$ 是固定的.这说明,我们只需在预处理过程中计算一次该矩阵及其逆,并将结果存储起来.在实际应用中,我们计算了 $B_n^{(1)} (i=1, 2, 3, \dots, 12)$.

由 Bernstein 基函数的性质可知,矩阵 $B_n^{(1)}$ 的元素值位于 $[0, 1]$ 之间,并且每一行元素之和为 1.对于这类矩阵,通过计算其条件数可知(见表 1),随着次数 n 的增大,矩阵 $B_n^{(1)}$ 的行列式值逐渐减小,条件数逐渐增大.这说明,随着次数 n 的增大,矩阵 $B_n^{(1)}$ 呈病态性逐步增强.此时,对于较大的 $n (n > 6)$,如果用传统的数值方法计算 $B_n^{(1)}$ 的逆,可能会引入较大的数值误差.为了避免矩阵求逆过程中的数值误差,我们采用符号计算的方法来计算矩阵 $B_n^{(1)}$ 的逆.在符号计算中,矩阵的元素被当作无舍入误差的符号,这里为有理分数的形式 $a/b (b \geq a \geq 0)$,而不是有舍入误差的浮点数,所以逆矩阵计算是精确的.虽然符号计算的计算量较大,但我们只需在预处理过程中计算一次.所以,这部分计算量可以忽略不计.

Table 1 The determinations and conditional numbers of matrix $B_n^{(1)}$ and $B_n^{(2)}$ ($n=1, 2, \dots, 12$)

表 1 矩阵 $B_n^{(1)}$ 和 $B_n^{(2)}$ 的行列式值与条件数 ($n=1, 2, \dots, 12$)

Curve degree	Determinant of $B_n^{(1)}$	Conditional number of $B_n^{(1)}$	Curve degree	Determinant of $B_n^{(2)}$	Conditional number of $B_n^{(2)}$
1	1.0000e+000	1.0000	1	1.0000e+000	1.0000
2	5.0000e-001	2.3187	2	1.2500e-001	2.6180
3	1.4815e-001	5.0541	3	7.2256e-004	5.7620
4	2.6367e-002	11.8023	4	6.0418e-008	13.3993
5	2.8312e-003	28.6420	5	2.2737e-014	32.5457
6	1.8376e-004	71.1466	6	1.1975e-023	80.4269
7	7.2171e-006	179.4526	7	2.7454e-036	202.5492
8	1.7163e-007	457.5213	8	8.5221e-053	514.9040
9	2.4723e-009	1175.7767	9	1.1144e-073	1321.7220
10	2.1578e-011	3040.1715	10	1.9102e-099	3411.7199
11	1.1413e-013	7899.2645	11	1.3357e-130	8858.0478
12	3.6590e-016	20606.3184	12	1.1858e-167	23082.9550

曲线次数, $B_n^{(1)}$ 行列式值, $B_n^{(1)}$ 条件数.

复合结果为 Bézier 曲线的例子,如图 1 所示,其中 G 为 2 次 Bézier 曲线, F 为 3×3 次 Bézier 曲面,复合结果

H 为位于 F 上的 12 次 Bézier 曲线.在本文的图 1~图 3 中,图左半部分为复合结果,右半部分为参数域.



Fig.1
图 1

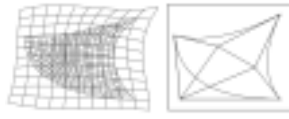


Fig.2
图 2

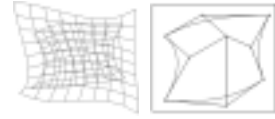


Fig.3
图 3

1.2 复合结果 H 为三角 Bézier 曲面的情形

当 G 为平面三角 Bézier 曲面时,不论 F 为空间三角 Bézier 曲面还是空间张量积 Bézier 曲面,复合结果 H 均为曲面 F 上的三角 Bézier 曲面,其次数为 $\deg(G) \cdot \deg(F)$ 或者 $\deg(G) \cdot (\deg(F)_u + \deg(F)_v)$. 下面给出如何计算三角 Bézier 曲面 H 的控制顶点的方法.记曲面 $H(u, v, w)$ 的形式为

$$H(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} H_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w).$$

我们根据三角 Bézier 曲面 $H(u, v, w)$ 的控制顶点下标 i 和 j 、按字典顺序对二维 Bernstein 基函数 $\{B_{ijk}^n(u, v, w)\}$ 进行如下排序(从左到右,从上到下):

$$\begin{matrix} B_{0,0,n}^n(u, v, w) & B_{0,1,n-1}^n(u, v, w) & B_{0,2,n-2}^n(u, v, w) & \cdots & B_{0,n,0}^n(u, v, w) \\ & B_{1,0,n-1}^n(u, v, w) & B_{1,1,n-2}^n(u, v, w) & \cdots & B_{1,n-1,0}^n(u, v, w) \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & B_{n-1,0,1}^n(u, v, w) & B_{n-1,1,0}^n(u, v, w) \\ & & & & & B_{n,0,0}^n(u, v, w) \end{matrix},$$

将这些基函数重新记作 $(B_i(\mathbf{u}))_{i=0}^{\tilde{n}}$, 其中 $\mathbf{u} = (u, v, w)$, $\tilde{n} = (n+1)(n+2)/2$ 为曲面 $H(u, v, w)$ 的控制顶点的个数.此时,三角 Bézier 曲面可以重写为

$$H(\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{\tilde{n}} H_i B_i^n(\mathbf{u}).$$

要插值曲面 $H(\mathbf{u})$, 需要 \tilde{n} 个采样点.这 \tilde{n} 个有效采样点的充分性问题已超出本文所研究范围,在此不加以讨论,有兴趣的读者可以参考文献[9].这里根据文献[9]的结论给出一种“标准”的采样方式:即对所有可能的下标 $\{i, j, n-i-j\}$ (共 \tilde{n} 个),取 $\mathbf{u}_i = \{i/n, j/n, (n-i-j)/n\}$. 类似于 Bézier 曲线情形,我们可以建立一个线性方程组,记该方程组的系数矩阵为 $B_n^{(2)}$, 这里,上标“(2)”表示双变元,下标“ n ”表示次数.根据多元样条插值理论^[9],矩阵 $B_n^{(2)}$ 是可逆的.类似于矩阵 $B_n^{(1)}$ 的情形,我们发现矩阵 $B_n^{(2)}$ 也具有以下特点:首先,矩阵 $B_n^{(2)}$ 对于给定的次数 n 而言是固定的;其次,矩阵 $B_n^{(2)}$ 的行列式的值随着次数 n 的增大而减小,其条件数也随着次数 n 的增大而增大(见表 1).这表明,随着次数 n 的增大,在计算逆矩阵的过程中,矩阵 $B_n^{(2)}$ 的病态性逐渐增强.所以,这里同样采用符号计算的方法计算 $B_n^{(2)}$ 的逆矩阵,以消除数值误差.图 2 是复合结果为三角 Bézier 曲面的例子,其中 F 为 3×3 次 Bézier 曲面, G 为平面 2 次三角 Bézier 曲面,复合结果 H 为位于曲面 F 上的 12 次三角 Bézier 曲面片.

1.3 复合结果 H 为张量积 Bézier 曲面的情形

当函数 G 为平面张量积 Bézier 曲面时,无论 F 为空间三角 Bézier 曲面还是空间张量积 Bézier 曲面,复合结果 H 均为张量积 Bézier 曲面,其次数为 $(\deg(G)_u, \deg(G)_v) \cdot \deg(F)$ 或者 $(\deg(G)_u, \deg(G)_v) \cdot (\deg(F)_u + \deg(F)_v)$. 记张量积 Bézier 曲面 H 的表达式为

$$H(u, v) = \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=0}^{n_v} H_{ij} B_{i,n_u}(u) B_{j,n_v}(v).$$

类似于计算机辅助几何设计中张量积曲面的插值方法,我们采用按方向插值的方法计算曲面 H 的控制顶点.具体方法如下:我们首先计算曲面 H 上 $(n_u + 1) \cdot (n_v + 1)$ 个采样点 $\{H(i/n_u, j/n_v)\}_{i=0}^{n_u} \}_{j=0}^{n_v}$, 然后采用第 1.1 节中插值 Bézier 曲线的方法插值 u 方向 ($j = 0, 1, \dots, n_v$):

$$\left(\tilde{H}_{0j} \quad \tilde{H}_{1j} \quad \dots \quad \tilde{H}_{n_u j}\right)^T = \left(B_{n_u}^{(1)}\right)^{-1} \left(H(0/n_u, j/n_v) \quad H(1/n_u, j/n_v) \quad \dots \quad H(n_u/n_u, j/n_v)\right)^T.$$

矩阵 $\left(B_{n_u}^{(1)}\right)^{-1}$ 如第 2.1 节中所定义.此时可得到中间控制顶点网格 $\{\tilde{H}_{ij}\}$.然后,我们再对中间控制顶点 $\{\tilde{H}_{ij}\}$ 沿 v 方向进行插值,即对 $i=0,1,\dots,n_u$ 有

$$\left(H_{i0} \quad H_{i1} \quad \dots \quad H_{i,n_v}\right)^T = \left(B_{n_v}^{(1)}\right)^{-1} \left(\tilde{H}_{i0} \quad \tilde{H}_{i1} \quad \dots \quad \tilde{H}_{i,n_v}\right)^T,$$

此时,我们就得到张量积 Bézier 曲面的控制顶点 $\{\tilde{H}_{ij}\}$.

采用按不同方向来插值张量积 Bézier 曲面的方法具有以下优点:首先,可以克服直接插值方法中由于分块稀疏矩阵引起的效率不高的问题;其次,我们无须额外计算重建矩阵,而是直接应用 Bézier 曲线的结果 $\left(B_n^{(1)}\right)^{-1}$,从而减少了不必要的存储空间.复合结果为张量积 Bézier 曲面的例子如图 3 所示,其中 G 为 2×2 次平面张量积 Bézier 曲面, F 为 3×3 次张量积 Bézier 曲面,复合结果 H 为一张 12×12 次 Bézier 曲面.

2 算法分析和比较

下面,我们将从计算量、是否容易编程实现、存储空间、数值精度这 4 个方面对本文的插值法与广义 de Casteljau 算法和优化算法进行比较.

在计算量方面,我们首先比较曲线曲面情形的插值法与广义 de Casteljau 算法.对于常见的 3 种情形的计算量见表 2.这 3 种情形是:将三角 Bézier 曲面转化为张量积 Bézier 曲面(简称 BBtoTPB)、将张量积 Bézier 曲面转化为三角 Bézier 曲面(简称 TPBtoBB)、张量积 Bézier 曲面上的曲线(简称 CurveonTPB).从结果可见,插值法的计算量的数量级总低于广义 de Casteljau 算法.

Table 2 The comparison of computational cost between the generalized de Casteljau algorithm and interpolation algorithm

表 2 广义 de Casteljau 算法与插值法的计算量比较

Composition cases	Composition through generalized de Casteljau algorithm	Proposed algorithm
TPBtoBB	$(n_u + 1) \cdot (n_u + 2) \cdot (n_v + 1) \cdot (n_v + 2) \cdot V_F(n_u, n_v) / 4$	$(n_u + n_v + 1) \cdot (n_u + n_v + 2) \cdot V_F(n_u, n_v) / 2 + M((n_u + n_v + 1) \cdot (n_u + n_v + 2) / 2)$
BBtoTPB	$(n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3) \cdot V_F(n) / 6$	$(n + 1) \cdot (n + 1) \cdot V_F(n) + 2 \cdot (n + 1) \cdot M(n + 1)$
CurveonTPB	$(n_u + 1) \cdot (n_v + 1) \cdot V_F(n_u, n_v)$	$(n_u + n_v + 1) \cdot V_F(n_u, n_v) + M(n_u + n_v + 1)$

复合情形, 基于广义 de Casteljau 算法的复合算法, 本文的算法.

插值法与优化算法之间计算量的比较又如何呢?由于文献[1~3]只给出了 Bézier 单形之间复合的计算量分析.所以,我们将比较 3 种方法在 Bézier 单形之间复合的计算量.通过分析计算,广义 de Casteljau 算法、优化算法的复合算法、插值法的计算量分别为:

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{de Casteljau}} &= \left[\binom{\#G + \deg(F) + K_F}{\deg(F)} - \binom{\deg(F) + K_F}{\deg(F)} \right] V_F(\deg(F)), \\ \Psi_{\text{Optimal}} &= \left[\binom{\#G + \deg(F) - 1}{\deg(F)} + \binom{\deg(F) + 2K_F + 1}{\deg(F)} - 2 \binom{\deg(F) + K_F}{\deg(F)} \right] V_F(\deg(F)), \\ \Psi_{\text{interpolation}} &= \binom{\deg(F) \cdot \deg(G) + K_G}{K_G} (V_F(\deg(F)) + V_G(\deg(G))) + M(\#F), \end{aligned}$$

其中, $\#G$ 和 $\#F$ 表示单形 G 和 F 的控制顶点个数, K_G 和 K_F 表示单形 G 和 F 的参数空间的维数.当 $K_G = K_F = 2, \deg(F) = \deg(G) = 3$ 时,

$$\Psi_{\text{de Casteljau}} = \left[\binom{10 + 3 + 2}{3} - \binom{3 + 2}{2} \right] V_F(3) = 435V_F(3),$$

$$\Psi_{\text{Optimal}} = \left[\binom{10+3-1}{3} + \binom{3+2 \cdot 2+1}{3} - 2 \binom{3+2}{3} \right] V_F(3) = 256V_F(3),$$

$$\Psi_{\text{interpolation}} = \binom{3 \cdot 3+2}{2} (V_F(3) + V_G(3)) + M(10) = 110V_F(3) + M(10).$$

由于矩阵向量的乘法 $M(10) < 3V_F(3)$,所以在上述情形下,本文算法比优化算法加速 1 倍以上.而且随着次数的增加,加速倍数也随之增加.

在编程的难易程度方面,本文所提插值法的优越性是显然的.这是因为在插值算法中,用户所要做的只是编写一个标准的 de Casteljau 算法和矩阵向量乘法的程序.对于广义 de Casteljau 算法而言,当 G 呈线性函数时,还可以较为方便地编程实现;当 G 高于 2 次的函数、或为张量积函数时,程序就会变得很复杂.对于优化算法,其可编程性最差:它需要进行基函数变换,同时优化的核心——广义 de Casteljau 算法中间步骤结果的重用最为复杂,以至于该方法的作者在其文献[3]中指出:如果用户不追求计算速度,建议不要采用该方法.

在占用存储空间方面,新方法所需的额外开销为重建矩阵 $(B_n^{(1)})^{-1}$ 和 $(B_n^{(2)})^{-1}$ 的存储;在广义 de Casteljau 算法中,用户所需的额外开销为预先计算好的组合数和中间计算结果.在优化算法中,算法的加速是以存储空间的代价来换取计算时间的,所以其存储空间所需最大.文献[3]指出:当不进行基函数变换时,在存储空间增加 $\text{deg}(F)$ 结果的条件下,计算速度可以有所提高.如果首先进行基函数变换,那么可以实现存储空间一定程度的减少和计算速度的提高,当然这是在以牺牲数值精度的条件下实现的.

在数值精度方面,无疑广义 de Casteljau 算法是最好的,因为算法是数值稳定的.优化算法的数值精度在很大程度上取决于基函数变换方法,这是因为基函数变换会引入数值误差,而且会在后面的计算中扩散.如果采用多项式插值进行基函数变换,其数值精度将等同于或低于插值法.在本文的插值法中,只有矩阵与向量的乘法会引起数值误差.这是因为虽然计算逆矩阵的数值误差可以通过符号计算的方法消除,但是随着复合结果次数的增加,矩阵的病态性增强,在进行矩阵向量乘法时,引入数值误差是不可避免的.在图 4 ~ 图 6 中,我们给出了插值法和广义 de Casteljau 算法之间在数值精度上的具体比较数值.数值误差的计算是这样实现的:假设函数 F 于某一平面上,那么复合结果 H 应当位于该平面上.这里,相对误差即为复合结果的控制顶点到该平面的最大距离与精确值的比.其中,纵坐标均为相对误差取 \log_{10} 的结果,当相对误差为 0 时,我们取其值 10^{-17} 是有意义的.图 4 为 CurveonTPB 的情形,横坐标为复合后曲线的次数;图 5 为 TPBtoBB 的情形,横坐标为复合后三角 Bézier 曲面的次数;图 6 为 BBtoTPB 的情形,横坐标为复合后张量积 Bézier 曲面的次数.从图中可以看出,新方法的误差大于广义 de Casteljau 算法的误差.当复合结果 H 次数低于 3(或 3×3)次时,插值法与广义 de Casteljau 算法的误差相当;当 H 的次数低于 6(或 6×6)次时,精度为 $10^{-15} \sim 10^{-12}$,当 H 的次数为 12(或 12×12)次时,精度为 $10^{-12} \sim 10^{-8}$.

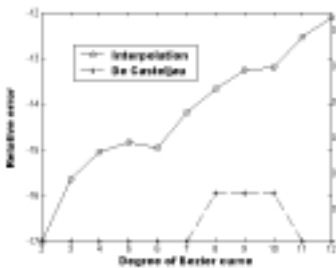


Fig.4 The relative error comparison of Bézier curve case
图 4 Bézier 曲线的相对误差比较

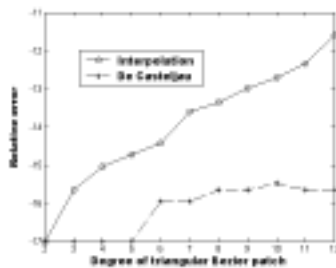


Fig.5 The relative error comparison of triangular Bézier surface case
图 5 三角 Bézier 曲面的相对误差比较

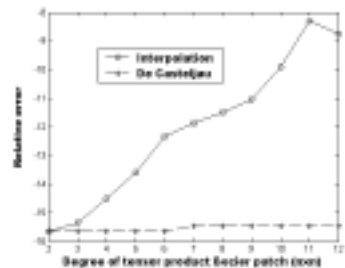


Fig.6 The relative error comparison of tensor product Bézier surface case
图 6 张量积 Bézier 曲面的相对误差比较

综上所述,3 种方法在计算量、可编程性、存储空间、数值精度方面的比较见表 3.

Table 3 The comparison of computational cost, coding efficiency, storage cost and numerical error among three methods

表 3 3 种方法在计算量、可编程性、存储空间、数值精度方面的比较

Algorithm	Computational cost	Coding efficiency	Storage cost	Numerical accuracy
Generalized de Casteljau algorithm	High	Complex	Middle	Low
Optimal algorithm	Middle	Very complex	High	Middle or Low
Interpolation algorithm	Low	Simple	Low	Middle

算法, 计算量, 可编程性, 存储空间, 数值精度, 广义 de Castelaju 算法, 优化算法, 插值算法, 大, 较繁琐, 中, 小, 繁琐, 容易, 中或较大.

3 结 论

本文提出了一种通过插值和符号计算的方法实现 Bernstein 多项式复合的方法.通过分析和比较,插值法在计算量、可编程性、存储空间方面表现较好,而数值精度低于广义 de Casteljau 算法,好于优化算法.所以,我们建议用户根据上述几方面综合选取适合的方法.例如在数值精度要求中等($\text{eps} < 10^{-8}$)的实体造型系统、动画造型系统以及曲线曲面的显示中,插值法的精度完全满足要求,而且具有速度快的优势,此时应选取插值法;而在数值精度要求较高的环境下,建议采用基于广义 de Castelaju 算法的复合算法.

References:

- [1] DeRose, T. Compositing Bézier simplex. *ACM Transactions on Graphics*, 1988,7(3):198~221.
- [2] DeRose, T., Goldman, R., Hagen, H., *et al.* Functional composition algorithms via blossoming. *ACM Transactions on Graphics*, 1993,12(3):113~135.
- [3] Liu, W., Mann, S. An optimal algorithm for expanding composition of polynomials. *ACM Transactions on Graphics*, 1997,16(2):155~178.
- [4] Hu, S.M. Conversion of a triangular Bézier patch into three rectangular Bézier patches. *Computer-Aided Geometric Design*, 1996, 13(3):219~226.
- [5] Hu, S.M., Wang, G., Jin, T. Generalized subdivision of Bézier surface. *Graphical Model and Image Processing*, 1996,58(3):218~222.
- [6] Hu, Shi-min, Sun, Jia-guang, Wang, Guo-zhao. Generalized subdivision of Bézier surface and its applications. *Chinese Journal of Computers*, 1999,22(3):290~295 (in Chinese).
- [7] Hu, Shi-min, Sun, Jia-guang, Wang, Guo-zhao. Decomposition of trimmed surface via generalized subdivision. *Chinese Journal of Computers*, 1999,22(3):296~301 (in Chinese).
- [8] Feng, Jie-qing, Peng, Qun-sheng. Functional compositions via shifting operators for Bézier patches and their applications. *Journal of Software*, 1999,10(12):1316~1322 (in Chinese).
- [9] Wang, Ren-hong. *Multivariate Splines Functions and Their Applications*. Beijing: Science Press, 1994 (in Chinese).

附中文参考文献:

- [6] 胡事民,孙家广,汪国昭. Bézier 曲面的广义离散及应用. *计算机学报*,1999,22(3):290~295.
- [7] 胡事民,孙家广,汪国昭. 基于广义离散分解 Trimmed 曲面. *计算机学报*,1999,22(3):296~301.
- [8] 冯结青,彭群生. Bézier 曲面的函数复合及其应用. *软件学报*,1999,10(12):1316~1322.
- [9] 王仁宏. *多元样条函数及其应用*. 北京:科学出版社,1994.

Bernstein Polynomial Composition Through Interpolation and Its Applications in Curves and Surfaces*

FENG Jie-qing, PENG Qun-sheng

(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

E-mail: {jqfeng,peng}@cad.zju.edu.cn

<http://www.cad.zju.edu.cn>

Abstract: In curve and surface modeling, Bernstein polynomial compositions are widely used for various geometric operations. So it is important to investigate them both in theory and practice. The problems are investigated by using polynomial interpolation and symbolic computation, and the proposed method is applied for curve and surface cases. Compared with two existing methods, the proposed method has the advantages on computational cost, coding efficiency, storage cost. However its numerical accuracy is lower than the method based on the generalized de Casteljau algorithm.

Key words: Bernstein polynomial; functional composition; polynomial interpolation; symbolic computation; numerical accuracy

* Received January 11, 2001; accepted August 27, 2001

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.69903008; the Scientific Foundation of China for Innovative Research Groups under Grant No.60021201

第 8 届中国密码学学术会议

征文通知

第八届中国密码学学术会议拟定于 2004 年 5 月中下旬在上海举行。热忱欢迎所有涉及密码学(数学的和非数学的)、信息安全理论和关键技术方面的研究论文提交本次会议交流。

征文要求:

提交论文必须是未公开发表并且未向学术刊物和其它学术会议投稿的最新研究成果,文稿可用中文书写,同时鼓励用英文书写,一般不超过 6000 字。作者应将论文全文(务必注明作者的详细通讯地址、联系电话和 E-Mail 地址)的 Word/PDF 文档,或论文全文的打印稿一式 3 份寄至以下地址:

550025 贵州大学计算机系 李祥 教授 Tel: 0851-3621767 E-mail: lixiang@gzu.edu.cn

200030 上海交通大学计算机科学与工程系 陈克非 教授 Tel: 021-62932135 E-mail: kfchen@mail.sjtu.edu.cn

重要日期:

征文截止日期: 2003 年 7 月 31 日

文章录用通知: 2003 年 10 月 31 日

录用论文定稿: 2003 年 11 月 20 日

联系信息:

欲进一步了解会议的有关信息,欢迎访问有关站点 <http://www.chinacrypt.net>, <http://www.cs.sjtu.edu.cn>,也可直接与我们联系:

上海交通大学计算机科学与工程系 陈克非 教授

Tel/Fax : 021-62932135

E-mail: chinacrypt2004@cs.sjtu.edu.cn, kfchen@mail.sjtu.edu.cn