ω 幂上下文无关语言及其封闭性质*

郭清泉

(山东大学计算机科学系,济南 250100)

摘要 本文定义了 ω 幂上下文无关语言 $\omega-p-cfl$ 和一类 ω 下推自动机 $\omega-pda$,给出了它们的关系,借助于 ω 时序转换器 $\omega-ST$,讨论了 $\omega-p-cfl$ 类的某些封闭性质,证明了对于 $\omega-p-cfl$ 类 $\mathscr{L}$,$\mathscr{M}(\mathscr{L})=\{S'(A)\mid A\in\mathscr{L},S'$ 是一个 $\omega-ST\}=\{h_2(h_1^{-1}(A)\cap R)\mid A\in\mathscr{L},R$ 是一个 ω 正规语言,h_1 是一个同态,以及 h_2 是一个 λ 无关同态$\}$.

关键词 ω 幂上下文无关语言,ω 下推自动机,ω 时序转换器,封闭性.

1 一类 $\omega-pda$ 及其与 $\omega-p-cfl$ 之间的关系

ω 语言研究无穷长字构成的集合性质是近年来形式语言研究中相当活跃的一个重要方向. ω 语言的生成一般有 3 种方式:第 1,带有指定状态重复集 F 的短语结构文法 $G=(N,\Sigma,P,S,F)$ 控制生成的 ω 语言,文献[1]中定义并研究了这类 ω 语言的重要性质. 第 2,文献[2]中定义了另一类 ω 语言——语言的附着 $Adh(L)=\{u\in\Sigma^\omega\mid FG(u)\subseteq FG(L)\}$,类似于“极限”的描述方法,使得易于引入 ω 语言的距离、连续等概念,为这类 ω 语言的研究提供了有效工具. 第 3,生成 ω 语言的直观方法是有穷长语言的无穷次幂,文献[3]中研究了有理 ω 幂语言及其生成子问题,指出了 ω 语言研究的另一条有效途径.

本文定义并研究 ω 幂上下文无关语言类,以指定状态重复集的包含关系定义一类 $\omega-pda$,讨论两者的关系,借助于 ω 时序转换器,导出 ω 幂上下文无关语言类封闭性的若干重要结果.

定义 1.1. 设 Σ 为一有穷字母表,$A\subseteq\Sigma^\omega$. 如果存在上下无关语言 $L\subseteq\Sigma^*$,使得 $A=L^\omega$. 则称 A 为 ω 幂上下文无关语言,记为 $\omega-p-cfl$.

定义 1.2. 设 $G=(N,\Sigma,P,S)$ 是一个上下文无关文法,称 $G'=(N,\Sigma,P,S,F)$ 是一个 ω 上下文无关文法,记为 $\omega-cfg$,其中 $F\subseteq N$ 是一指定的非终止符集合.

如果存在无穷最左派生 d:

$$S\underset{G}{\Rightarrow}a_1\gamma_1\underset{G}{\Rightarrow}a_1a_2\gamma_2\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}(\prod_{i=1}^{n}a_i)\gamma_n\underset{G}{\Rightarrow}\cdots,$$

且派生 d 中出现无穷多次的非终止符集合 $INF(d)\supseteq F$,则 $\sigma=\prod_{i=1}^{\infty}a_i$ 是 G' 的一个生成字,所

* 本文 1993-06-22 收到,1994-03-30 定稿

本课题受到中国科学院自然科学基金资助. 作者郭清泉,1941 年生,副教授,主要研究领域为形式语言及应用,专家系统.

本文通讯联系人:郭清泉,济南 250100,山东大学计算机科学系

有 G' 的生成字集合，记为 $L(G')$，称为 G' 以非终止符重复集 F 生成的 ω 语言.

定义 1.3. 设 $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0)$ 是一个下推自动机，称 $M'=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$ 是一个 ω 下推自动机，记为 $\omega-pda$，其中 $F\subseteq Q$ 是一指定的状态集.

如果存在无穷推导 r：

$$(q_0,\prod_{i=1}^{\infty}a_i,Z_0)\underset{M'}{\vdash}(q_1,\prod_{i=2}^{\infty}a_i,\gamma_1)\underset{M'}{\vdash}(q_2,\prod_{i=3}^{\infty}a_i,\gamma_2)\underset{M'}{\vdash}\cdots,$$

且推导 r 中出现无穷多次的状态集合 $INS(r)\supseteq F$，则 $\sigma=\prod_{i=1}^{\infty}a_i$ 是 M' 接受的一个字，所有 M' 接受的字的集合，记为 $T(M')$，称为 M' 以状态重复集 F 接受的 ω 语言.

定理 1.1. 对于任意的 $\omega-p-cfl$ A，存在一个 $\omega-cfg$ G'，使得 $L(G')=A$.

证明：设 $A=L^{\omega}$，$G=(N,\Sigma,P,S)$ 是生成 L 的上下文无关文法. 令 $G'=(N',\Sigma,P',S',\{S'\})$，其中 $N'=N\cup\{S'\}$，S' 是一个新符号；$P'=P\cup\{S'\to SS'\}$. 则 $L(G')=L^{\omega}=A$.

定理 1.2. 对于任意的 $\omega-p-cfl$ A，存在一个 $\omega-pda$ M'，使得 $T(M')=A$.

证明：设 $A=L^{\omega}$，$M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$ 是以终止状态集 F 接受 L 的下推自动机. 令 $M'=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',Z'_0,\{q'_0\})$，其中 $Q'=Q\cup\{q'_0\}$，q'_0 是一个新符号；$\Gamma'=\Gamma\cup\{Z'_0\}$，$Z'_0$ 是一个新符号；以及 δ'：

(1) $\delta\subseteq\delta'$；

(2) $\delta'(q'_0,\lambda,Z'_0)=(q_0,Z_0Z'_0)$；

(3) $(q'_0,\lambda)\in\delta'(q,a,Z)$，如果 $(q',\gamma)\in\delta(q,a,Z)$ 且 $q'\in F$；

(4) $\delta'(q'_0,\lambda,Z)=(q'_0,\lambda)$，如果 $Z\in\Gamma$.

则 $T(M')=L^{\omega}=A$.

下面的结果是明显的：

定理 1.3. 对于任意的 $\omega-pda$ $M'=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,\{q_0\})$，$T(M')$ 是一个 $\omega-p-cfl$.

2 $\omega-p-cfl$ 类的某些封闭性质

定理 2.1. $\omega-p-cfl$ 类对交运算不封闭.

证明：设 $\omega-p-cfl$ $A=\{a^nb^nc^i\mid n\geq1,i\geq0\}^{\omega}$ 和 $B=\{a^jb^nc^n\mid n\geq1,j\geq0\}^{\omega}$，但 $A\cap B=\{a^nb^nc^n\mid n\geq1\}^{\omega}$ 不是 $\omega-p-cfl$.

定理 2.2. $\omega-p-cfl$ 类对并运算不封闭.

证明：设 $\omega-p-cfl$ $A=\{a\}^{\omega}$ 和 $B=\{b\}^{\omega}$，但 $A\cup B=\{a^{\omega},b^{\omega}\}$ 不是 ω 幂语言.

定义 2.1. 设 $S=(Q,\Sigma,\Delta,\delta,p_0)$ 是一个时序转换器，称 $S'=(Q,\Sigma,\Delta,\delta,p_0,F)$ 是一个 ω 时序转换器，记为 $\omega-ST$，其中 $F\subseteq Q$ 是一指定的状态集.

如果 $\delta\subseteq Q\times\Sigma\cup\{\lambda\}\times\Delta\cup\{\lambda\}\times Q$，则称 S' 是一个 1－限制型 $\omega-ST$，如果 $\delta\subseteq Q\times\Sigma^{*}\times\Delta^{+}\times Q$，则称 S' 是一个 λ 无关的 $\omega-ST$.

如果存在无穷序列 $p_i\in Q$，$i\geq0$；$u_i\in\Sigma^{*}$，$i\geq1$；以及 $v_i\in\Delta^{*}$，$i\geq1$，使得 $\sigma_1=\prod_{i=1}^{\infty}u_i$，$\sigma_2=\prod_{i=1}^{\infty}v_i$，以及 $(p_i,u_{i+1},v_{i+1},p_{i+1})\in\delta$，$i\geq0$，则有无穷推导 r：

$$(p_0,\sigma_1,\sigma_2)=(p_0,\prod_{i=1}^{\infty}u_i,\prod_{i=1}^{\infty}v_i)\underset{S'}{\vdash}(p_1,\prod_{i=2}^{\infty}u_i,\prod_{i=2}^{\infty}v_i)\underset{S'}{\vdash}\cdots,$$

记

$S'(\sigma_1)=\{\sigma_2\mid$存在无穷推导$r:(p_0,\sigma_1,\sigma_2)\underset{S'}{\vdash}(p_1,\prod_{i=2}^{\infty}u_i,\prod_{i=2}^{\infty}v_i)\underset{S'}{\vdash}\cdots$，且推导$r$中出现无穷多次的状态集合$INS(r)\supseteq F\}$，$S'(L)=\bigcup_{\sigma_1\in L}S'(\sigma_1)$.

易于证明，对于任意的$\omega-ST\ S'$和任意的ω语言A，存在$\vdash$限制型$\omega-ST\ S''$，使得$S''(A)=S'(A)$.

定理 2.3. 对于任意的$\omega-ST\ S'$和$\omega-p-cfl\ A$，$S'(A)$是一个$\omega-p-cfl$.

证明：不妨设$\omega-ST\ S'=(Q_1,\Sigma,\Sigma,H,P_0,F)$是$\vdash$限制型，且对于任意的$p\in Q_1$，有$(p,\lambda,\lambda,p)\in H$，由定理1.2的证明，设接受$\omega-p-cfl\ A$的$\omega-pda\ M'=(Q_2,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,\{q_0\})$，还可以假设对于任意的$q\in Q_2,Z\in\Gamma$，有$(q,Z)\in\delta(q,\lambda,Z)$. 令

$$M''=(Q,\Sigma,\Gamma',\delta',Z'_0,\{s_0\}),$$

其中$Q=\{s_0,s_1,s_2,s_3\}$；$\Gamma=\Gamma'\times Q_1\times Q_2$；$Z'_0=[Z_0,p_0,q_0]$；以及$\delta'$：

(1)存在$b\in\Sigma\cup\{\lambda\}$，使得$(p,b,a,p')\in H$，$p'\in F$且$(q',\gamma)\in\delta(q,b,Z)$，$q'=q_0$，当且仅当对于任意的$s\in Q$，

$$(s_0,[\gamma,p',q'])\in\delta'(s,a,[Z,p,q]);$$

(2)存在$b\in\Sigma\cup\{\lambda\}$，使得$(p,b,a,p')\in H$，$p'\notin F$且$(q',\gamma)\in\delta(q,b,Z)$，$q'\neq q_0$，当且仅当

$$(s_1,[\gamma,p',q'])\in\delta'(s_0,a,[Z,p,q])\text{，以及}$$
$$(s,[\gamma,p',q'])\in\delta'(s,a,[Z,p,q]),s\in\{s_1,s_2,s_3\};$$

(3)存在$b\in\Sigma\cup\{\lambda\}$，使得$(p,b,a,p')\in H$，$p'\in F$且$(q',\gamma)\in\delta(q,b,Z)$，$q'\neq q_0$，当且仅当

$$(s_0,[\gamma,p',q'])\in\delta(s_2,a,[Z,p,q]\text{，以及}$$
$$(s_3,[\gamma,p',q'])\in\delta'(s,a,[Z,p,q]),s\in\{s_0,s_1,s_3\};$$

(4)存在$b\in\Sigma\cup(\lambda\}$，使得$(p,b,a,p')\in H$，$p'\notin F$且$(q',\gamma)\in\delta(q,b,Z)$，$q'=q_0$，当且仅当

$$(s_0,[\gamma,p',q'])\in\delta'(s_3,a,[Z,p,q])\text{，以及}$$
$$(s_2,[\gamma,p',q'])\in\delta'(s,a,[Z,p,q]),s\in\{s_0,s_1,s_2\}.$$

下面证明$T(M'')=S'(T(M')$.

如果$\sigma_2=\prod_{i=1}^{\infty}a_i\in T(M'')$，则有无穷推导$r$，$s_0\in INS(r)$：

$$(s_0,\prod_{i=1}^{\infty}a_i,[Z_0,p_0,q_0])\overset{*}{\underset{M''}{\vdash}}(s'_1,\prod_{i=2}^{\infty}a_i,[\gamma_1,p_1,q_1])\overset{*}{\underset{M''}{\vdash}}(s_0,\prod_{i=n+1}^{\infty}a_i,[\gamma_n,p_n,q_n])\overset{*}{\underset{M''}{\vdash}}\cdots,$$

由M''的构造可知，存在$\sigma_1=\prod_{i=1}^{\infty}b_i$，使得有$M'$的无穷推导$r_2$，$q_0\in INS(r_2)$：

$$(q_0,\prod_{i=1}^{\infty}b_i,Z_0)\overset{*}{\underset{M'}{\vdash}}(q_1,\prod_{i=2}^{\infty}b_i,\gamma_1)\overset{*}{\underset{M'}{\vdash}}(q_0,\prod_{i=n_2+1}^{\infty}b_i,\gamma_{n_2})\overset{*}{\underset{M'}{\vdash}}\cdots,(n_2\leqslant n)$$

以及 S' 的无穷推导 $r_1, F\subseteq INS(r_1)$：

$$(p_0,\prod_{i=1}^{\infty}b_i,\prod_{i=1}^{\infty}a_i)\overset{*}{\underset{S'}{\vdash}}(p_1,\prod_{i=2}^{\infty}b_i,\prod_{i=2}^{\infty}a_i)\overset{*}{\underset{S'}{\vdash}}(p_{n_1},\prod_{i=n_1+1}^{\infty}b_i,\prod_{i=n_1+1}^{\infty}a_i)\overset{*}{\underset{S'}{\vdash}}\cdots,(p_{n_1}\in F,n_1\leqslant n)$$

即 $\sigma_1\in T(M'),\sigma_2\in S'(\sigma_1)$，从而 $\sigma_2\in S'(A)$.

反之亦然，于是 $S'(A)=S'(T(M'))=T(M'')$ 是一个 $\omega-p-cfl$.

定理 2.4. $\omega-p-cfl$ 类对与 ω 正规语言的交封闭.

证明：任给 ω 正规语言 R，设接受 R 的 ω 有穷自动机 $M'=(Q,\Sigma,\delta',q_0,F),T(M')=R$. 构造 $\omega-ST$

$$S'=(Q,\Sigma,\Sigma,\delta',q_0,F),$$

其中 $\delta'=\{(q,a,a,q')\mid q'\in\delta(q,a),a\in\Sigma,q\in Q\}$，则对于任意的 $\omega-p-cfl\ A, A\cap R=S'(A)$ 是一个 $\omega-p-cfl$.

3 $\mathscr{M}(\mathscr{L})$ 的表征定理

定理 3.1. 对于任意的有穷集 $T\subseteq Q\times\Sigma_1^*\times\Sigma_2^+\times Q$ 和指定的状态集合 $F\subseteq Q$，

$$R=\{\sigma=\prod_{i=0}^{\infty}(p_i,w_i,y_i,p_{i+1})\mid(p_i,w_i,y_i,p_{i+1})\in T,i\geqslant 0,\text{且 }INS(\sigma)\supseteq F\}$$

是 ω 正规语言，其中 $INS(\sigma)$ 表示 σ 中出现无穷多次的状态集合.

证明：令 ω 有穷自动机 $A=(Q,T,\delta,p_0,F)$，其中 $p'\in\delta(p,(p,w,y,p'))$ 当且仅当 $(p,w,y,p')\in T$，则 $R=T(A)$ 是一个 ω 正规语言.

定理 3.2. 对于任意的 λ 无关 $\omega-ST\ S'$，存在 ω 正规语言 R，同态 h_1 和 λ 无关同态 h_2，使得对于任意的 $\omega-p-cfl\ A$，有 $S'(A)=h_2(h_1^{-1}(A)\cap R)$.

证明：设 $S'=(Q,\Sigma_1,\Sigma_2,H,p_0,F)$，$R=(\sigma=\prod_{i=0}^{\infty}(p_i,w_i,y_i,p_{i+1})\mid(p_i,w_i,y_i,p_{i+1})\in H,i\geqslant 0$ 且 $INS(\sigma)\supseteq F\}$ 是一个 ω 正规语言，令

$$h_1:\Sigma_3^\omega\to\Sigma_1^\omega,h_1(p,w,y,p')=w;$$
$$h_2:\Sigma_3^\omega\to\Sigma_1^\omega,h_2(p,w,y,p')=y.$$

这样，$S'(A)=h_2(h_1^{-1}(A)\cap R)$.

定理 3.3. 对于任意的 $\omega-p-cfl\ A$，如果 φ 是 λ 无关同态，则存在 λ 无关 $\omega-ST\ S'$，使得 $\varphi(A)=S'(A)$；如果 φ 是同态，则存在 λ 无关 $\omega-ST\ S'$，使得 $\varphi^{-1}(A)=S'(A)$；如果 R 是一个 ω 正规语言，则存在 λ 无关 $\omega-ST\ S'$，使得 $A\cap R=S'(A)$.

证明：(1)设 $\varphi:\Sigma^\omega\to\Delta^\omega$ 是 λ 无关同态，令

$$S'=(\{q_0\},\Sigma,\Delta,H,q_0,\{q_0\}),$$

其中 $H=\{(q_0,a,\varphi(a),q_0)\mid a\in\Sigma\cup\{\lambda\}\}$，则 $\varphi(A)=S'(A)$.

(2)设 $\varphi:\Sigma^\omega\to\Delta^\omega$ 是一同态，令

$$S'=(\{q_0\},\Delta,\Sigma,H,q_0,\{q_0\}),$$

其中 $H=\{(q_0,\varphi(a),a,q_0)\mid a\in\Sigma\}$，则 $\varphi^{-1}(A)=S'(A)$.

(3)设接受 R 的 ω 有穷自动机 $M=(Q,\Sigma,\delta,p_0,F),T(M)=R$. 令

$$S'=(Q,\Sigma,\Sigma,H,p_0,F),$$

其中 $H=\{(p,a,a,p')\mid p'\in\delta(p,a),a\in\Sigma\}$，则 $A\cap R=S'(A)$.

推论 3.1. 对于任意的 $\omega-p-cfl$ A，如果 R 是一个 ω 正规语言，h_1 是一同态，h_2 是 λ 无关同态，则可以构造 λ 无关 $\omega-ST$ S'，使得 $h_2(h_1^{-1}(A)\cap R)=S'(A)$.

证明：设 $S'_1=(\{q_0\},\Sigma,\Sigma,H_1,q_0,\{q_0\})$，其中 $H_1=\{(q_0,h_1(a),a,q_0)\mid a\in\Sigma\}$，则 $S'_1(A)=h_1^{-1}(A)$. 又设 $S'_2=(Q,\Sigma,\Sigma,H_2,s_0,F)$，其中 $H_2=\{(s,a,a,s')\mid s'\in\delta(s,a)\}$，则 $S'_2(A)=A\cap R$，这里 $R=T(M)$，$M=(Q,\Sigma,\delta,s_0,F)$. 再设 $S'_3=(\{p_0\},\Sigma,\Sigma,H_3,p_0,\{p_0\})$，其中 $H_3=\{(p_0,a,h_2(a),p_0)\mid a\in\Sigma\}$，则 $S'_3(A)=h_2(A)$，最后令

$$S'=([p_0,q_0]\times Q,\Sigma,\Sigma,H,[p_0,q_0,s_0],[p_0,q_0]\times F),$$

其中 $H=\{([p_0,q_0,s],h_1(a),h_2(a),[p_0,q_0,s'])\mid$ 存在 $a\in\Sigma$，使得 $(q_0,h_1(a),a,q_0)\in H_1$，$(s,a,a,s')\in H_2$ 且 $(p_0,a,h_2(a),p_0)\in H_3\}$. 这样，$h_2(h_1^{-1}(A)\cap R)=S'(A)$.

由定理 2.3，定理 3.2 和推论 3.1 立即得到 $\mathscr{M}(\mathscr{L})$ 的表征定理：

定理 3.4. 对于 $\omega-p-cfl$ 类 $\mathscr{L}$，$\mathscr{M}(\mathscr{L})=\{S'(A)\mid A\in\mathscr{L},S'$ 是 λ 无关 $\omega-ST\}=\{h_2(h_1^{-1}(A)\cap R)\mid R$ 是 ω 正规语言，$A\in\mathscr{L}$，h_1 是同态，h_2 是 λ 无关同态$\}$.

参考文献

1 Cohen R S, Gold A Y. Theory of ω—languages. JCSS, 1977, **15(2)**: 169—208.

2 Boasson L, Nivat M. Adherence of languages. JCSS, 1980, **20(3)**: 285—309.

5 Litovsky I, Timmerman E. On generators of rational ω—power languages. TCS, 1987, **53(2,3)**: 187—200.

ω—POWER CONTEXT—FREE LANGUAGES AND THEIR CLOSURE PROPERTIES

Guo Qingquan

(*Department of Computer Science, Shandong University, Jinan* 250100)

Abstract This paper is defined a class of ω—power context—free languages and the corresponding type of ω—pushdown automata. With the aid of ω—sequential transducer, some closure properties of ω—power context—free languages are discussed. The main result is that, for the class of ω—power context—free languages $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}(\mathscr{L})=\{S'(A)\mid A\in\mathscr{L}$, S' is an ω—sequential transducer$\}=\{h_2(h_1^{-1}(A)\cap R)\mid A\in\mathscr{L}$, R is an ω—regular language, h_1 is a homomorphism and h_2 is a λ—free homomorphism$\}$.

Key words ω—power context—free language, ω—pushdown automaton, ω—sequential transducer, closure property.