软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2024,35(3):1440−1465 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.006825]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel: +86-10-62562563

一种基于算法机制设计的社会法则合成方法*

吴 骏[1,2], 曹 杰[1], 王崇骏[2], 谢俊元[2]

[1](南京财经大学 江苏省电子商务重点实验室, 江苏 南京 210023)
[2](计算机软件新技术国家重点实验室 (南京大学), 江苏 南京 210023)
通信作者: 王崇骏, E-mail: chjwang@nju.edu.cn

摘 要: 社会法则是在多 Agent 系统中为确立某种目标属性而对各个 Agent 实施的行为限制集合. 在 Agent 具有“个体理性”及“私有信息”的“策略情况”下, 社会法则合成问题不应建模成通常的优化问题, 而应建模成算法机制设计问题. “最小化副作用”经常是社会法则需要满足的基本要求. 从博弈论的角度来看, “最小化副作用”与“最大化社会福利”的概念紧密相关, 可以将“最小化副作用的社会法则合成”建模为一种效率机制设计问题. 不仅需要为给定目标属性找到有效且社会福利最大的社会法则, 还需要向 Agent 支付适当的金额, 以实现激励相容性和个体理性. 首先基于 VCG 机制设计一种名叫 VCG-SLM 的效率机制, 证明它可满足所有必需的形式属性. 然而, 由于发现可证明该机制的计算是一个 FP^{NP}-完全问题, 针对性地提出该机制的一种基于整数规划的实现方式 VCG-SLM-ILP, 基于 ATL 语义将分配及支付的计算转化为整数规划, 并严格地证明其正确性, 从而可有效利用目前已非常成熟的工业级整数规划求解器, 成功解决棘手的机制计算问题.
关键词: 多 Agent 系统; 社会法则; 算法机制设计
中图法分类号: TP18

中文引用格式: 吴骏, 曹杰, 王崇骏, 谢俊元. 一种基于算法机制设计的社会法则合成方法. 软件学报, 2024, 35(3): 1440–1465. http://www.jos.org.cn/1000-9825/6825.htm
英文引用格式: Wu J, Cao J, Wang CJ, Xie JY. Social Law Synthesizing Method Based on Algorithmic Mechanism Design. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2024, 35(3): 1440–1465 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/6825.htm

Social Law Synthesizing Method Based on Algorithmic Mechanism Design

WU Jun[1,2], CAO Jie[1], WANG Chong-Jun[2], XIE Jun-Yuan[2]
[1](Jiangsu Provincial Key Laboratory of E-Business, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210023, China)
[2](State Key Laboratory for Novel Software Technology (Nanjing University), Nanjing 210023, China)

Abstract: A social law is a set of restrictions on the available actions of agents to establish some target properties in a multiagent system. In the strategic case, where the agents have individual rationality and private information, the social law synthesizing problem should be modeled as an algorithmic mechanism design problem instead of a common optimization problem. Minimal side effect is usually a basic requirement for social laws. From the perspective of game theory, minimal side effect closely relates to the concept of maximum social welfare, and synthesizing a social law with minimal side effect can be modeled as an efficient mechanism design problem. Therefore, this study not only needs to find out the efficient social laws with maximum social welfare for the given target property but also pays for the agents to induce incentive compatibility and individual rationality. The study first designs an efficient mechanism based on the VCG mechanism, namely VCG-SLM, and proves that it satisfies all the required formal properties. However, as the computation of VCG-SLM is an FP^{NP}-complete problem, the study proposes an ILP-based implementation of this mechanism (VCG-SLM-ILP), transforms the computation of allocation and payment to ILPs based on the semantics of ATL, and strictly proves its correction, so as to effectively utilize the currently mature industrial-grade integer programming solver and successfully solve the intractable mechanism computing

* 基金项目: 国家自然科学基金 (91646204, 92046026, 61876080, 71871109); 国家重点研发计划 (2017YFD0401001, 2018YFB1403400); 江苏省重点研发计划 (BE2019105)
收稿时间: 2021-08-04; 修改时间: 2022-05-05, 2022-07-22; 采用时间: 2022-09-16; jos 在线出版时间: 2023-06-14
CNKI 网络首发时间: 2023-06-15

problems.

Key words: multiagent system; social law; algorithmic mechanism design

社会法则 (social law) 最初由 Shoham 等人[1,2]作为一种协同多 Agent 系统的离线方法提出, 文献 [3−5] 进一步引入了模态和时态逻辑的形式系统, 扩展了社会法则的原始框架, 特别是引入了能对多 Agent 系统进行描述与验证的交互时态逻辑 (alternating-time temporal logic, ATL)[6,7]及其变种, 从而能更好地表示协同目标, 建模并发行动. 尽管文献中提出的各种社会法则具有不同的技术细节, 但是他们均拥有一些共同的基本特征, 即社会法则是对 Agent 可用行动的一个约束集. 通过施加这些约束, 期望一些目标属性在系统中得到满足[8], 例如保证某些 Agent 能可靠地访问某些资源、避免死锁的发生等.

信息的不完全性及 Agent 的理性行为近年来引起了广泛的关注, 但是却缺失于社会法则的现有框架. 这样的理性 Agent 总是试图最大化自身的效用, 给社会法则合成带来了一些前所未有的根本挑战.

1) 尽可能少地修改原有系统, 即最小化副作用[9,10], 是社会法则通常被期望满足的基本属性. 在原始的文献中, 最小化副作用被表述为最少化 Agent 被禁止的可行行动的总数. 而这显然可以被更一般地建模为最大化 Agent 对最终系统结构属性的估值和. 但是如果这些估值被 Agent 作为私有信息的形式掌握时, 我们并不能直接确定哪个社会法则是最优的.

2) Agent 选择服从社会法则当且仅当这是有利可图的. 有必要在实施社会法则时考虑每个 Agent 的得失, 而不是简单地将其作为硬性约束实现[1,2,8]. 一般可以考虑向各个 Agent 支付一定的金额, 以保证其获得非负的利润. 但是由于 Agent 的估值函数是其私有信息, 我们并不能确定应当向各个 Agent 支付多少钱.

上述事实意味着, 在信息不完全以及 Agent 具有理性行为的策略环境下, 社会法则合成并不适合被建模为通常的优化问题, 一些必要的 Agent 私有信息必须首先被正确地导出并加以有效利用. 我们发现这个问题可以很自然地在算法机制设计 (algorithmic mechanism design)[11−13]的理论框架下寻求解决方案: 求分配及支付规则 (函数), 该规则被确立并公布后, 接受各 Agent 同时投标 (汇报) 自己的估值函数, 进而输出一个满足最优化目标的有效社会法则, 并为每个 Agent 确定一个合适的支付金额以保证所有的 Agent 诚实汇报是其最优选择. 在上述框架下, 问题转化为寻求 Agent 的结构估值的紧凑表示方法, 使其能在投标中被 Agent 高效、清晰地表述; 正确地设计分配函数及支付函数, 实现优化目标并激励 Agent 诚实投标、主动服从得到的社会法则的约束; 找出计算分配及支付函数的有效算法, 使其能适用于社会法则合成的应用环境. 这些问题正是将机制设计引入社会法则领域的核心问题与关键挑战.

本文围绕上述核心问题展开, 取得的主要进展如下.

1) 证明在基于交互时态逻辑 ATL 的社会法则合成问题中, 任何不区分交互互模拟 (alternating bisimulation) 等价结构[14,15]的估值函数均可被等价地表示为“公式-数值”对的集合. 由于互模拟等价实质上描述的是数学上的等价关系, 这意味着我们为通常情况下的估值函数均找出了一种具有良好理论基础的紧凑表示方法.

2) 发现策略情况下的社会法则合成可被建模成一类特殊的效率机制设计问题, 其中供选择的社会法则实质上是一种非独占、非竞争的公共货物 (public goods)[16], 且 Agent 对社会法则的估值可正可负. 对于该类问题著名的 VCG (Vickrey-Clarke-Groves) 机制[16−18]显然能提供一种激励相容的解决方案, 但是如何保证个体理性 (所有 Agent 均自发服从机制) 并无已知解决方案. 然而我们进一步证明了基于 Clarke 基准规则 (Clarke pivot rule)[16]可设计一种使所有 Agent 服从机制是纳什均衡的支付规则, 这意味着没有 Agent 会单方面地脱离机制的约束——这仍然是一种有意义的个体理性保证.

3) 证明上述机制的计算是是 FP^{NP}-完全的, 这意味着不能期望为分配与支付的计算找到多项式时间复杂度的算法. 我们将分配与支付的计算转化为整数规划来实现, 基于 ATL 的语法及语义系统地导出了整数规划的优化目标函数及约束集, 并严格地证明了其正确性以及多项式的时间复杂度. 由于整数规划是一类已被深入研究的难计算问题, 已有许多成熟的工业级整数规划求解器, 这实际上为上述机制的计算问题设计了一种现实可行的算法; 同时也为进一步的近似机制的研究奠定了良好的基础.

4) 鉴于求解整数规划往往不能得到精确的社会福利最大的分配, 而这会损害 VCG 机制的激励相容性, 本文基于 Nisan 等人[19]提出的再次机会机制 (second chance mechanism) 实现了一种克服该问题的机制.

本文第 1 节介绍相关的背景知识, 包括 ATL 逻辑及社会法则, 并总结现有的相关工作. 第 2 节导出一种紧凑的估值函数表示方法, 将策略情况下的社会法则合成问题建模成一类面向公共货物的效率机制设计问题, 并提出一种满足激励相容及个体理性的机制. 第 3 节研究上述机制的计算复杂性, 针对性地提出一种基于整数规划的实现方法. 第 4 节总结全文, 并对未来值得关注的研究点进行探讨.

1 研究背景

1.1 交互时态逻辑

交互时态逻辑 ATL 扩充了经典的计算树逻辑 (computation tree logic, CTL)[20], 是一种已被深入研究的用于对并发博弈结构 (concurrent game structure, CGS) 进行描述、推理与验证的逻辑. 而并发博弈结构被认为是一种置身于外部环境中、行动的效果具有不确定性的开放系统的通用模型[6,7].

定义 1 (并发博弈结构). 并发博弈结构可表示为元组 $S=\langle k,Q,q_s,\Pi,\pi,\varepsilon,\delta\rangle$, 包含如下组件.

1) Agent 集合 $Ag=[k]=\{1,\ldots,k\}$.

2) 状态的有限集 Q, 其中 $q_s\in Q$ 为初始状态.

3) 命题符的有限集 Π.

4) 标注函数 π (为每个状态 $q\in Q$ 指定一个在该状态为真的命题符集 $\pi(q)\subseteq\Pi$).

5) 行动函数 ε (为每个 Agent $i\in Ag$ 以及每个状态 $q\in Q$ 指定 Agent i 在该状态下可用的行动集合 $\varepsilon(i,q)$. 我们假定该集合为非空集合; 所有 Agent 在任意状态 $q\in Q$ 的联合行动为元组 $\langle j_1,\ldots,j_k\rangle$, 其中 $j_i\in\varepsilon(i,q)$ 为 Agent i 采取的行动; $D(q)$ 表示状态 q 上的联合行动空间 $\varepsilon(1,q)\times\ldots\times\varepsilon(k,q)$).

6) 状态转换函数 δ (对于每个状态 $q\in Q$ 以及每个联合行动 $\langle j_1,\ldots,j_k\rangle\in D(q)$, $\delta(q,j_1,\ldots,j_k)\in Q$ 为在状态 q 执行联合行动 $\langle j_1,\ldots,j_k\rangle$ 导致的下一状态).

在并发博弈结构中, 环境的概念是相对的, 任意 Agent 集合 $A\subseteq Ag$ 均可被看作一个联盟, 同时剩下的 Agent (即 $Ag\setminus A$) 表示该联盟所处的环境. 由所有 Agent 组成的联盟 Ag 叫做宏联盟 (grand coalition), 其所处的环境是空集 $\varnothing$.

我们将用符号 $\vec{m}$ 来表示 (所有 Agent 的) 联合行动 $\langle j_1,\ldots,j_k\rangle$; 用 $\vec{m}_A$ 来表示联盟 $A\subseteq Ag$ 的联合行动 (或者被叫作 A-行动). 为了表述的方便, 我们通常把 A-行动看作行动的向量 (其中行动按所属 Agent 的 ID 从小到大排列), 而不是看作行动的集合. 此外, 我们还用 $D_A(q)$ 来表示在状态 q 下所有可能的 A-行动; 并且用 $\vec{m}|A$ 表示 $\vec{m}$ 中联盟 A 的联合行动, 即 $\vec{m}|A=\vec{m}_A$, 其中 $\vec{m}_A$ 是一个 A-行动, 且对于任意的 $i\in A$, 我们均有 $\vec{m}_A[i]=\vec{m}[i]$.

关于并发博弈结构的一些重要概念可定义如下.

1) 对于两个状态 q 和 q', q' 被称为 q 的后继 (或者被称为一个 q-后继) 当且仅当存在一个联合行动 $\vec{m}$ 使得 $q'=\delta(q,\vec{m})$. 我们用 $q\delta q'$ 表示 q' 为 q 的后继.

2) 一个状态序列 $\lambda=q_0,q_1,q_2,\ldots$ 称作 S 的一个计算当且仅当对于每一个 $i\geqslant 0$, 状态 q_{i+1} 都是 q_i 的后继.

3) 从状态 q 开始的一个计算称为一个 q-计算. 对于计算 λ 和位置 i $(i\geqslant 0)$, 我们用 $\lambda[i]$, $\lambda[0,i]$ 和 $\lambda[i,\infty]$ 来分别表示 λ 的第 i 个状态, λ 的前缀 $q_0,q_1,\ldots,q_i$ 和 λ 的后缀 $q_i,q_{i+1},\ldots$

4) Agent a 的策略 $f_a\in\Sigma$ 是从有限非空的状态序列 $\lambda\in Q^+$ 到行动的函数映射: 如果 λ 的最后一个状态是 q, 则有 $f_a(\lambda)\in\varepsilon(a,q)$.

5) 在状态 $q\in Q$, 联盟 $A\subseteq Ag$ 的联合行动 $\vec{m}_A$ 的结果被记作 $out(q,\vec{m}_A)$, 包括此联合行动可能导致的所有下一状态. 状态 q' 在 $out(q,\vec{m}_A)$ 中当且仅当 $\vec{m}\in D(q)$, 使得 $\vec{m}|A=\vec{m}_A$ 且 $\sigma(q,\vec{m})=q'$.

6) 对于每一个联盟 $A\subseteq Ag$, 如果其中每个 Agent 采取一个策略, 那么所有这些策略的集合就被称为一个 A 的联合策略 (或者被称为一个 A-策略), 记作 F_A. 在任意状态 $q\in Q$ 上, 联合策略 F_A 的结果是一个包含所有的它可能导致的计算的集合, 记作 $out(q,F_A)$. 计算 $\lambda=q_0,q_1,q_2,\ldots$ 在 $out(q,F_A)$ 中, 当且仅当 $q_0=q$, 且对于任意 i 存在联合行

动 $\langle j_1,\dots,j_k\rangle \in D(q_i)$, 使得 (1) 对于所有的 Agent $a\in A$, $j_a = f_a(\lambda[0,i])$; (2) $\delta(q_i, j_1,\dots,j_k) = q_{i+1}$.

由以上定义可以看出, 并发博弈结构实质上描述的是多 Agent 系统的状态转换: 在每个状态各个 Agent 可以同时选择一个行动, 得到的行动组合决定系统的下一状态. ATL 把 CTL 中经典的路径选择量词 $\exists$ 和 $\forall$ 替换成用以表示 α-效力的路径选择量词 $\langle\langle\rangle\rangle$. $\langle\langle A\rangle\rangle\psi$ 表示联盟 A 有一个联合策略, 使得不管联盟 A 之外的 Agent 采取什么行动, ψ 都能成立——也就是说联盟 A 中的 Agent 通过合作能克服环境的影响, 可靠地使 ψ 被满足.

定义 2 (**ATL 语言**). 令 Π 为命题的有限集且 $Ag=\{1,\dots,k\}$ 为 Agent 的有限集, ATL 公式可由以下语法生成:

$$\varphi ::= p|\neg\varphi|\varphi_1\vee\varphi_2|\langle\langle A\rangle\rangle\bigcirc\varphi|\langle\langle A\rangle\rangle\Box\varphi|\langle\langle A\rangle\rangle\varphi_1\mathcal{U}\varphi_2,$$

其中, $p\in\Pi$ 是一个命题符, $A\subseteq Ag$ 是一个 Agent 联盟. ATL 语言 $\mathcal{L}_{\text{ATL}}$ 为所有合法 ATL 公式的集合.

算子 $\langle\langle\rangle\rangle$ 是路径选择量词, $\bigcirc$ (“下一状态”), $\Box$ (“总是”), 和 $\mathcal{U}$ (“直到”) 是时态算子. $\langle\langle\{a_1,\dots,a_n\}\rangle\rangle$ 可简写成 $\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle$, $\langle\langle\varnothing\rangle\rangle$ 可简写成 $\langle\langle\rangle\rangle$. 额外的布尔连接符, 如 $\wedge$ 、 $\rightarrow$ 、 $\leftrightarrow$ 等, 可采用通常的方式由 $\neg$ 和 $\vee$ 定义出来. 与 CTL 类似, $\langle\langle A\rangle\rangle\Diamond\varphi$ 可看作 $\langle\langle A\rangle\rangle\top\mathcal{U}\varphi$ 的缩写, 其中 $\Diamond$ (“最终”) 也是时态算子.

定义 3 (**ATL 语义**). “并发博弈结构 S 的状态 q 满足公式 φ”可表示为 $S,q\models\varphi$. 当 S 可由上下文清楚地确定时, 它可被省略并写作 $q\models\varphi$. 关系 $\models$ 可关于所有的状态 q 定义如下.

1) 对于所有 $p\in\Pi$, $q\models p$ 当且仅当 $p\in\pi(q)$.

2) $q\models\neg\varphi$ 当且仅当 $q\not\models\neg\varphi$.

3) $q\models\varphi_1\vee\varphi_2$ 当且仅当 $q\models\varphi_1$ 或 $q\models\varphi_2$.

4) $q\models\langle\langle A\rangle\rangle\bigcirc\varphi$ 当且仅当存在一个 A-策略 F_A, 使得对于每个计算 $\lambda\in out(q,F_A)$, 都有 $\lambda[1]\models\varphi$.

5) $q\models\langle\langle A\rangle\rangle\Box\varphi$ 当且仅当存在一个 A-策略 F_A, 使得对于每个计算 $\lambda\in out(q,F_A)$ 和位置 $i\ (i\geqslant 0)$, 都有 $\lambda[i]\models\varphi$.

6) $q\models\langle\langle A\rangle\rangle\varphi_1\mathcal{U}\varphi_2$ 当且仅当存在一个 A-策略 F_A, 使得对于每个计算 $\lambda\in out(q,F_A)$ 存在一个位置 $i\ (i\geqslant 0)$, 使得 $\lambda[i]\models\varphi_2$; 并且对于所有的位置 $j\ (0\leqslant j<i)$, 都有 $\lambda[j]\models\varphi_1$.

注意, 算子 $\bigcirc$ 是局部性的, 等价地有: $q\models\langle\langle A\rangle\rangle\bigcirc\varphi$ 当且仅当存在 A-行动 $\vec{m}_A$, 对于任意 $q'\in out(q,\vec{m}_A)$, 都有 $q'\models\varphi$. 算子 $\langle\langle A\rangle\rangle$ 的对偶形式是 $[\![A]\!]$, $[\![A]\!]\psi$ 的含义是“联盟 A 中的 Agent 不能通过合作来使 ψ 不被满足 (它们不能避免 ψ)”. 在状态 $q\in Q$ 联盟 A 不能避免一个计算的集合 Λ 当且仅当对于所有 A-策略 F_A, $\Lambda\cap out(q,F_A)\neq\varnothing$. 可把 $\neg\langle\langle A\rangle\rangle\bigcirc\neg\varphi$ 写作 $[\![A]\!]\bigcirc\varphi$, 把 $\neg\langle\langle A\rangle\rangle\Diamond\neg\varphi$ 写作 $[\![A]\!]\Box\varphi$, 把 $\neg\langle\langle A\rangle\rangle\Box\neg\varphi$ 写作 $[\![A]\!]\Diamond\varphi$.

如果对于任意并发博弈结构 S, 任意其上的状态 q, 均有 $S,q\models\varphi$ 成立, 那么我们就说 φ 是有效的, 记为 $\models\varphi$.

1.2 社会法则

社会法则可基于交互时态逻辑 ATL 进行形式化: 将多 Agent 系统的交互建模为并发博弈结构, 将需要在多 Agent 系统中实现的目标属性表述为 ATL 公式, 验证系统是否满足目标属性的问题可由 ATL 模型检测解决. 社会法则可被定义为在各个状态下对各个 Agent 的可用行动的约束. 一个对某个属性 (ATL 公式) 有效的社会法则实质上将原并发博弈结构转化为新的并发博弈结构, 其中目标属性被初始状态满足.

定义 4 (**社会法则**). 并发博弈结构 $S=\langle k,Q,q_s,\Pi,\pi,\varepsilon,\delta\rangle$ 的一个社会法则为一个行为约束 η, 定义为一个函数 $\forall i\in Ag, q\in Q:\eta(i,q)\subset\varepsilon(i,q)$.

注意, 在后文中为了书写更加简洁, 我们也把 $\eta(i,q)$ 记作 $\eta_i(q)$, 把 $\varepsilon(i,q)$ 记作 $\varepsilon_i(q)$.

实际上在并发博弈结构 $S=\langle k,Q,q_s,\Pi,\pi,\varepsilon,\delta\rangle$ 上实施一个社会法则 η 得到的新结构 $S\dagger\eta$ 为 $S'=\langle k,Q,q_s,\Pi,\pi,\varepsilon',\delta'\rangle$ 其中 $\forall i\in Ag, q\in Q:\varepsilon'_i(q)=\varepsilon_i(q)\setminus\eta_i(q)$, δ' 为把 δ 的定义域限制到 ε' 定义的子空间后的结果. 直观地, 在一个并发博弈结构上实施一个社会法则即为从该结构上删去所有被该社会法则限制的行动. 我们要求 $\forall i\in Ag,\ q\in Q$: $\eta_i(q)\neq\varepsilon_i(q)$ 以保证在得到的新结构中每个状态均有至少一个后继, 这也保证了新结构 $S\dagger\eta$ 仍是一个并发博弈结构.

社会法则合成总是为了满足一个预先定义的协同目标 $\varphi\in\mathcal{L}_{\text{ATL}}$, 即使公式 φ 在新并发博弈结构的初始状态上得到满足; 如果 $S\dagger\eta,q_s\models\varphi$, 那么我们说 η 是一个有效社会法则 (effective social law). 在朴素的非策略情形, 社会法则被实现为针对 Agent 行动的硬性约束, 我们可以简单粗暴地通过搜索解空间的方式找出有效社会法则, 文献 [3,4] 已系统地研究这种情况.

1.3 相关工作

由于不同的逻辑系统可以提供不同的语义结构或符号语言, 可分别建模不同的多 Agent 系统或描述不同的协同目标. 尝试使用不同的逻辑以及相应的模型检测技术来实现社会法则是该领域的重要研究内容. 例如使用更简单的 CTL 语言来表示协同目标, 简化 van der Hoek 等人[3]的理论框架, 导出一些更深入的理论结果[8,21−24]; 使用交互时态认知逻辑 (alternating-time temporal epistemic logic, ATEL)[25]来表示协同目标, 实现表示 Agent 之间对于“知识”的协同需求: 如“某个 Agent 能为另一个 Agent 带来某种知识”或者“如果某个 Agent 知道某件事, 那么它将以某种特定的方式行动”[26]; 将约束作用于 Agent 联盟的联合行动而非单个 Agent 的行动, 得到一种新的语义结构, 针对性地设计逻辑 Co-ATL, 并基于此实现一种能更灵活地对系统进行修改的社会法则[4,27,28].

如何使自主 Agent 自觉服从社会法则的约束也是该领域被集中探讨的基础性问题.自从 Shoham 等人[1,2]提出社会法则开始, 该项研究就存在着“所有 Agent 都将无条件遵守社会法则”的假设, 并把放宽这项假设作为一个亟待解决的问题. van der Hoek 等人[3]提到“为什么一个理性且自利的 Agent 在明知会获得较低收益的情况下要选择服从一个社会法则”是社会法则研究涉及到的悖论之一. 因此, “Agent 遵守一个社会法则的驱动机制是什么?”“如果有些 Agent 不遵守社会法则会发生什么?”“系统对不遵守社会法则的 Agent 的鲁棒程度如何?”等成为需回答的基本问题. 针对这些问题, Binmore 等人[29,30]从博弈论的角度对社会法则展开研究, 力图解释为什么在自利的 Agent 组成的多 Agent 系统中可以存在社会法则;在引入逻辑对社会法则重新进行形式化后, Ågotnes 等人进行的一系列关于“服从性 (compliance)”的研究是这方面的重要工作, 如Ågotnes 等人[8]为每个 Agent 关联一个层次化的目标集, 并据此定义效用函数, “是否服从一个社会法则的约束”则被定义为 Agent 可选择执行的两个行动, 从而所有 Agent 对行动的决策就成为一个博弈问题; 文献 [22] 在文献 [8] 的基础上研究了社会法则鲁棒性的相关问题; 而文献 [23] 则进一步提出了一种度量 Agent 对某个规范系统的是否成功的影响能力的方法.

本文的工作主要是从一个新的视角对社会法则合成问题进行探讨, 关注的主要问题是“在 Agent 掌握私有信息并且具有最求最大自身效用的理性行为时, 如何可靠地合成对给定协同目标有效且能最大化社会福利 (social welfare) 的社会法则”, 我们发现该问题可以转化为一个算法机制设计问题, 而亟待实现的 Agent 对社会法则的自觉服从性可以被完美地建模为机制设计中的个体理性 (individual rationality), 即使服从社会法则的效用高于不服从社会法则的效用. Bulling 等人[31,32]引入了规范机制设计的概念, 乍看之下与我们的工作颇为相似, 但实际上有根本的区别. 在 Bulling 等人的框架中的机制设计概念与传统情况有所不同, 它假定 Agent 的偏好是公开信息, 实际上没有私有信息的概念. 而且, 他们仍然将社会法则定义为硬性约束. 这意味着 Bulling 等人的工作从研究动机、研究目标到方法体系都与本文基于算法机制设计的工作有着本质的区别. 本文工作与现有社会法则相关工作的区别还在于本文基于 ATL 语义导出了一种基于整数规划的算法, 并严格证明了其正确性, 而现有相关工作大多止于对问题计算复杂性的探讨[3].

博弈论 (game theory) 与机制设计 (mechanism design) 是经济学的传统研究方向. 简而言之, 博弈 (game) 是一种理性个体策略交互的数学模型; 博弈论给出分析博弈的一套方法; 机制设计则给出设计博弈的一套方法. 在显示原理[12]等支柱性定理的作用下, 机制设计往往等同于“诚实拍卖设计 (truthful auction design)”, 即设计激励竞拍者诚实汇报自己的估价的拍卖规则. 算法机制设计的初衷是把机制设计的概念与方法融入并改进传统算法的理论框架 (从而得到一种“算法机制”) 使其解决问题的同时能提供正确的激励、适用于理性个体组成的多 Agent 系统的相关优化问题[12,33]. 本文工作是将上述研究思路实践于社会法则合成问题的一次尝试, 这进一步拓展了算法机制设计的应用领域. 优化目标是区分机制设计问题的一个重要方面. 以社会福利最大为目标的 “效率机制设计问题”, 如路径拍卖[34−37]、最小生成树拍卖[38−40]以及 1990 年代开始的美国联邦通信局的频谱拍卖衍生出的组合拍卖[19,41]等, 均可以用著名 VCG (Vickrey-Clarke-Groves) 机制[16−18]解决. 虽然该机制不具备多项式时间的实现[42], 但是有时可以设计计算可行的近似机制, 以获得接近全局最优的社会福利[42,43]. 狭义的“最优机制设计”指以收益最大化 (revenue maximization)[44]为优化目标的机制设计问题; 而广义上它可泛指任何优化目标或约束与拍卖者的支付有关的机制设计问题[45−48]. 我们发现社会法则合成中考虑的“最小化副作用”可被建模为“社会福利最大”, 从而使考虑最小化目标的社会法则合成问题成为一类典型的效率机制设计问题, 同时社会法则所拥有的独特的作为公共货物的性质、可正可负的估值函数以及对个体理性的需求使该效率机制设计问题具有新颖性. 最优机制设计具有更

强的挑战性, 是当前的研究热点, 为社会法则的其他优化目标的实现提供了有效的理论基础, 我们将在后续的工作中对其进行探讨.

2 社会法则合成机制

2.1 Agent 的效用模型

我们将并发博弈结构 $S=\langle k,Q,q_s,\Pi,\pi,\varepsilon,\delta\rangle$ 上的所有可能社会法则的集合记为 $\mathcal{SL}_S$, 将所有可由 S 实施社会法则转换而得的并发博弈结构记为 $\mathcal{W}_S=\{S'|\exists\eta\in\mathcal{SL}_S:S\dagger\eta=S'\}$. 显然, $\mathcal{SL}_S$ 及 $\mathcal{W}_S$ 均为有限集.

定义 5 (结构估值). 任意 Agent i 对任意结构 $S'\in\mathcal{W}_S$ 均具有一个估值 $v_i(S')\in\mathbb{R}^+$.

描述估值函数 v_i 要求为每个 $S'\in\mathcal{W}_S$ 赋予一个值, 朴素的方法将消耗大量的空间且不便于在投标中被 Agent 表述. 接下来我们将试图导出一种用于紧凑表示估值函数的方法.首先, 基于文献 [14,15] 的工作, 我们可以在 $\mathcal{W}_S$ 中的任意两个并发博弈结构的状态集之间定义一种互模拟关系.注意, 在接下来的定义中, 我们用不同的上标来区分来自不同并发博弈结构的组件.

定义 6 (交互互模拟关系). 令 $S_1=\langle k,Q^1,q_s^1,\Pi^1,\pi^1,\varepsilon^1,\delta^1\rangle$ 及 $S_2=\langle k,Q^2,q_s^2,\Pi^2,\pi^2,\varepsilon^2,\delta^2\rangle$ 为任意两个基于同一多 Agent 集合 $Ag=\{1,\dots,k\}$ 的并发博弈结构, 任意二元关系 $Z\subseteq Q^1\times Q^2$ 被叫做一个交互互模拟 (alternating bisimulation) 关系, 当且仅当 $q_s^1Zq_s^2$ 且对于任意 q^1Zq^2 有:

1) $\pi^1(q^1)=\pi^2(q^2)$.

2) 对于每个联盟 $A\subseteq Ag$, 以及每个联合行动 $\vec{m}_A^1\in D_A^1(q^1)$, 存在 $\vec{m}_A^2\in D_A^2(q^2)$ 满足对于任意的 $q_x^2\in out(q^2,\vec{m}_A^2)$, 存在 $q_x^1\in out(q^1,\vec{m}_A^1)$, 使 $q_x^1Zq_x^2$.

3) 对于每个联盟 $A\subseteq Ag$, 以及每个联合行动 $\vec{m}_A^2\in D_A^2(q^2)$, 存在 $\vec{m}_A^1\in D_A^1(q^1)$ 满足对于任意的 $q_x^1\in out(q^1,\vec{m}_A^1)$, 存在 $q_x^2\in out(q^2,\vec{m}_A^2)$, 使 $q_x^1Zq_x^2$.

直觉上, 互模拟关系在数学和计算中都表达了非常自然的等价概念. 如果 S_1 和 S_2 之间存在交互互模拟关系, 我们就说两个结构 S_1 和 S_2 是交互互模拟等价的, 记作 $S_1\rightleftharpoons S_2$.

定理 1[14]. 对于两个并发博弈结构 S_1 和 S_2, 若 $S_1\rightleftharpoons S_2$ 且 q^1Zq^2, 那么对于任意 ATL 公式 φ 有:

$$S_1,q^1\vDash\varphi \text{ 当且仅当 } S_2,q^2\vDash\varphi.$$

上述结论实际上反映了 ATL 语言表达能力的限度, 对于任意两个交互互模拟等价的并发博弈结构, 存在交互互模拟关系的状态上一定满足相同的 ATL 公式, 这意味着 ATL 语言不能区分满足交互互模拟关系的状态.

定理 2 (表示定理). 以下两项是等价的:

1) 结构估值函数 v_i 不区分交互互模拟等价的并发博弈结构, 即满足: 对于 $\forall S_1,S_2\in\mathcal{W}_S$, 若 $S_1\rightleftharpoons S_2$, 那么有 $v_i(S_1)=v_i(S_2)$.

2) 存在一个特征集合 $\mathcal{F}_i=\{(\varphi_1,c_1)_i,\dots,(\varphi_k,c_k)_i\}$, 其中 $k\in\mathbb{N}$, $\forall j\in\{1,\dots,k\}:\varphi_j\in\mathcal{L}_{\text{ATL}}$, $c_j\in\mathbb{R}^+$, 满足对于任意 $S\in\mathcal{W}_S$ 有:

$$v_i(S)=\sigma(\mathcal{F}_i,S)=\sum_{(\varphi_j,c_j)_i\in\mathcal{F}_i;S,q_s\vDash\varphi_j}c_j.$$

证明: “1) $\Rightarrow$ 2)”: 由于并发博弈结构 S 中具有有限的 Agent 及有限的状态, 且在任意状态任意 Agent 具有有限的可用行动, $\mathcal{SL}_S$ 是社会法则的有限集.我们可以在该集合中定义二元关系 $\simeq$:

$$\forall\eta_1,\eta_2\in\mathcal{SL}_S,\eta_1\simeq\eta_2 \text{ 当且仅当 } S\dagger\eta_1\rightleftharpoons S\dagger\eta_2.$$

显然 $\simeq$ 满足自反、对称及传递性, 因而是一个等价关系. 令 $\mathcal{E}=\{\eta_1,\dots,\eta_m\}$ 为该等价关系的一个等价类, 于是对于任意 $\eta\in\mathcal{SL}_S$, 一定存在 $\eta_j\in\mathcal{E}$, 满足 $S\dagger\eta\rightleftharpoons S\dagger\eta_j$; 且对于任意 $\eta_j,\eta_l\in\mathcal{E}$, $S\dagger\eta_j\rightleftharpoons S\dagger\eta_l$ 当且仅当 $j=l$.

因此, 对于任意 $j,l\in\{0,\dots,m\}$, 且 $j\neq l$, $S\dagger\eta_j$ 与 $S\dagger\eta_l$ 不满足交互互模拟等价, 故存在 ATL 公式 ψ_{j-l} 满足:

$$S\dagger\eta_j,q_s\vDash\psi_{j-l} \text{ 且 } S\dagger\eta_l,q_s\nvDash\psi_{j-l}.$$

我们可以定义特征集 $\mathcal{F}_i=\{(\varphi_1,c_1)_i,\dots,(\varphi_m,c_m)_i\}$, 其中:

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant m : \varphi_j = \bigwedge_{l \neq j} \psi_{j-l}, c_j = v(S \dagger \eta_j).$$

易见, 任意 φ_j 均是一个我们构造出来的仅被 $S \dagger \eta_j$ 的初始状态满足, 但不被 $\mathcal{W}_S$ 中任何其他并发博弈结构的初始状态满足的公式, 即有:

$$S \dagger \eta_j, q_s \vDash \varphi_l \text{ 当且仅当 } j = l,$$

而这可以导出:

$$\forall \eta_j \in \mathcal{E} : v_i(S \dagger \eta_j) = c_j = \sum_{(\varphi_x, c_x)_i \in \mathcal{F}_i : S \dagger \eta_j, q_s \vDash \varphi_x} c_x = \sigma(\mathcal{F}_i, S \dagger \eta_j); \text{ 且}$$

$$\forall \eta \notin \mathcal{E} : \exists \eta_j \in \mathcal{E}, v_i(S \dagger \eta) = v_i(S \dagger \eta_j) = c_j = \sum_{(\varphi_x, c_x)_i \in \mathcal{F}_i : S \dagger \eta_j, q_s \vDash \varphi_x} c_x = \sum_{(\varphi_x, c_x)_i \in \mathcal{F}_i : S \dagger \eta, q_s \vDash \varphi_x} c_x = \sigma(\mathcal{F}_i, S \dagger \eta).$$

也就是说, 对于任意的 $S \in \mathcal{W}_S$, 我们都可以得到 $v_i(S) = \sigma(\mathcal{F}_i, S)$.

“ $1) \Leftarrow 2)$ ”: 假设 $\exists S_1, S_2 \in \mathcal{W}_S$, $S_1 \rightleftharpoons S_2$, 且 $v_i(S_1) \neq v_i(S_2)$.

由于存在 $\mathcal{F}_i = \{(\varphi_1, c_1)_i, \ldots, (\varphi_k, c_k)_i\}$ 满足:

$$v_i(S_1) = \sigma(\mathcal{F}_i, S_1) = \sum_{(\varphi_j, c_j)_i \in \mathcal{F}_i ; S_1, q_s \vDash \varphi_j} c_j \text{ 且 } v_i(S_2) = \sigma(\mathcal{F}_i, S_2) = \sum_{(\varphi_j, c_j)_i \in \mathcal{F}_i ; S_2, q_s \vDash \varphi_j} c_j.$$

$v_i(S_1) \neq v_i(S_2)$ 能导出:

$$\sum_{(\varphi_j, c_j)_i \in \mathcal{F}_i ; S_1, q_s \vDash \varphi_j} c_j \neq \sum_{(\varphi_j, c_j)_i \in \mathcal{F}_i ; S_2, q_s \vDash \varphi_j} c_j.$$

即 S_1 和 S_2 在状态 q_s 满足不同的公式集. 而这是不可能的, 因为 $S_1 \rightleftharpoons S_2$.

上述结论意味着任何不区分互模拟等价结构的估值函数均可被等价且紧凑地表示为一个特征集. 对交互互模拟等价结构不加区分的要求实质上根源于 ATL 语言的表达能力的局限性. 然而由于这类估值函数良好地反映了数学意义上的等价, 适合于大多数应用场景的需求, 本文将集中讨论此类估值函数.

Agent 对不同社会法则的偏好关系实质上反映于它对不同社会法则的不同估值, 而整个多 Agent 群体对不同社会法则的偏好关系则可以反映于社会福利, 定义为所有 Agent 的估值之和.

定义 7 (社会福利). 对于一个 Agent 集合 $\Delta \subseteq Ag$ 而言, 社会法则 $\eta \in \mathcal{SL}_S$ 导致的社会福利为其中所有 Agent 对新结构 $S \dagger \eta$ 估值之和, 记为:

$$SW_\Delta(\eta) = \sum_{i \in \Delta} \sigma(\mathcal{F}_i, S \dagger \eta).$$

在所有有效社会法则中对 Agent 集合 Ag 社会福利最大的那个叫做高效社会法则 (efficient social law). 可靠地找出高效社会法则是本文的最终目标.

例 1: 考虑一个由两个机器人 (Agent) 组成的多机器人系统 (可扩充至 $n \in \mathbb{N}$ 个机器人). 这两个机器人分别归属于不同的运营商, 均拥有独立的数据缓冲区, 且共享一个数据传输通道, 用以实现在无基础设施的环境与远程服务器通信. 在运行过程中机器人会不断地产生数据并写入自己的缓冲区. 但缓冲区容量有限, 当缓冲区满时, 机器人就必须使用数据传输通道把其中的数据转移到远程服务器才能继续运行. 为保证数据传输互不干扰, 机器人对数据传输通道的使用必须互斥地进行.

该系统的运行可被表示为一个并发博弈结构 $S = \langle k, Q, q_s, \Pi, \pi, \varepsilon, \delta \rangle$, 其中,

- $k = 2$, Agent 集合为 $Ag = \{1, 2\}$.
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $q_s = q_0$, 即系统的初始状态是 q_0 .
- $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \epsilon\}$, 其中各命题的含义为:

α_i : Agent i 优先申请对共享数据传输通道的控制 ($i \in \{1, 2\}$).

β_i : Agent i 已被授权对共享数据传输通道的控制 ($i \in \{1, 2\}$).

ϵ : 对共享数据传输通道的使用违反互斥性, 出现错误.

- 标注函数 π 和行动函数 ε 如下:

$$
\begin{array}{lll}
\pi(q_0)=\{\alpha_1\}; & \varepsilon_1(q_0)=\{r,a\}; & \varepsilon_2(q_0)=\{r,a\}; \\
\pi(q_1)=\{\alpha_2\}; & \varepsilon_1(q_1)=\{r,a\}; & \varepsilon_2(q_1)=\{r,a\}; \\
\pi(q_2)=\{\beta_1\}; & \varepsilon_1(q_2)=\{r,w\}; & \varepsilon_2(q_2)=\{r,w\}; \\
\pi(q_3)=\{\beta_2\}; & \varepsilon_1(q_3)=\{r,w\}; & \varepsilon_2(q_3)=\{r,w\}; \\
\pi(q_4)=\{\epsilon\}; & \varepsilon_1(q_4)=\{r\}; & \varepsilon_2(q_4)=\{r\}.
\end{array}
$$

即在状态 q_0, q_1, Agent 1 和 Agent 2 分别优先申请对数据传输通道的控制; 在状态 q_2, q_3, Agent 1 和 Agent 2 分别获得对数据传输通道的控制权; q_4 是错误状态; 行动 a 为 “申请控制数据传输通道”, 行动 r 为 “执行常规工作”, 行动 w 为 “使用数据传输通道传输数据”; 例如, $\varepsilon_1(q_0)=\{r,a\}$ 表示在状态 q_0, Agent 1 能选择执行常规工作或申请控制数据传输通道.

● 状态转换函数 δ 的定义如图 1 中箭头所示 (箭头上标注的元组即为导致该状态转换的联合行动).

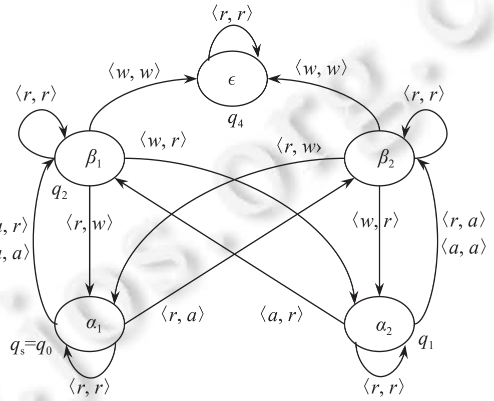

图 1 一个共享数据传输通道的多机器人系统的并发博弈结构

例如, 在状态 q_0, Agent 1 优先申请对数据传输通道的控制权, 表现在如果 Agent 1 选择行动 a, 那么不管 Agent 2 选择行动 r 还是行动 a, Agent 1 均能获得对数据传输通道的控制权 (系统状态转移到状态 q_2); 而仅当 Agent 2 选择行动 a, Agent 1 选择行动 r 时, Agent 2 才能获得对数据传输通道的控制权 (系统状态转移到状态 q_3); 此外, 当两个 Agent 均选择行动 r 时, 系统状态不变. 在状态 q_2, 虽然 Agent 1 拥有对数据传输通道的控制权, 但是 Agent 2 仍能使用数据传输通道. 如果仅有 Agent 1 使用数据传输通道, 那么系统状态转移为 Agent 2 优先申请状态 q_1; 如果仅有 Agent 2 使用数据传输通道, 那么系统状态转移到 Agent 1 优先申请状态 q_0; 当两个 Agent 均使用数据传输通道时, 因违反互斥性, 系统状态转移到错误状态 q_4.

● 协同目标为: $\varphi=\langle\langle\rangle\rangle\Box\neg\varepsilon$, 表示系统运行的任意路径均不会到达一个错误的状态.现有的系统由于存在到达错误状态的路径, 显然不满足该协同目标.通过社会法则禁止各 Agent 的某些行动, 从而删除系统中的一些状态转换, 有望使协同目标得到满足.

● Agent 1 的特征集 $\mathcal{F}_1$ 和 Agent 2 的特征集 $\mathcal{F}_2$ 可分别表示为表 1 和表 2.

表 1 特征集 $\mathcal{F}_1$

属性	价值	描述
$\varphi_1=\langle\langle\rangle\rangle\Box(\alpha_1\to\langle\langle 1\rangle\rangle\bigcirc\beta_1)$	20	在 Agent 1 优先状态, Agent 1 能确保马上控制数据传输通道
$\varphi_2=\langle\langle\rangle\rangle\Box(\alpha_1\to\langle\langle 1,2\rangle\rangle\bigcirc\alpha_1)$	5	在 Agent 1 优先状态, 如果 Agent 2 配合, 则 Agent 1 能使系统保持处于该状态
$\varphi_3=\langle\langle\rangle\rangle\Box(\beta_1\to\langle\langle 1\rangle\rangle\bigcirc\alpha_2)$	5	Agent 1 控制数据传输通道时, Agent 1 能马上使用数据传输通道
$\varphi_4=\langle\langle\rangle\rangle\Box(\alpha_2\to\langle\langle 1,2\rangle\rangle\bigcirc\beta_1)$	8	在 Agent 2 优先状态, 如果 Agent 2 配合, 则 Agent 1 能马上控制数据传输通道
$\varphi_5=\langle\langle\rangle\rangle\Box(\beta_2\to\langle\langle 1,2\rangle\rangle\bigcirc\alpha_2)$	1	Agent 2 控制数据传输通道时, 如果 Agent 2 配合, 则 Agent 1 能马上使用数据传输通道
$\varphi_6=\langle\langle\rangle\rangle\Box(\beta_2\to\langle\langle 1\rangle\rangle\Diamond\alpha_2)$	10	Agent 2 控制数据传输通道时, Agent 1 能确保后续能使用数据传输通道

表 2　特征集 $\mathcal{F}_2$

属性	价值	描述
$\psi_1 = 《》\Box(\alpha_2 \to 《2》\bigcirc\beta_2)$	7	在 Agent 2 优先状态, Agent 2 能确保马上控制数据传输通道
$\psi_2 = \Box(\alpha_2 \to 《1,2》\bigcirc\alpha_2)$	4	在 Agent 2 优先状态, 如果 Agent 1 配合, Agent 2 能使系统保持处于该状态
$\psi_3 = 《》\Box(\beta_2 \to 《2》\bigcirc\alpha_1)$	6	Agent 2 控制数据传输通道时, Agent 2 能马上使用数据传输通道
$\psi_4 = 《》\Box(\beta_2 \to 《2》\bigcirc\beta_2)$	2	Agent 2 控制数据传输通道时, Agent 2 能使系统保持处于该状态
$\psi_5 = 《》\Box(\alpha_1 \to 《1,2》\bigcirc\beta_2)$	18	在 Agent 1 优先状态, 如果 Agent 1 配合, Agent 2 能马上使用数据传输通道

根据定理 2, 上述 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 实际上给出了 Agent 1 和 Agent 2 的结构估值函数. 基于此, 可以给出各 Agent 对任意并发博弈结构的结构估值. 然而, 特征集实质上反映了 Agent 对各种系统属性的需求程度, 其具体包含哪些属性及其对应的价值是仅为 Agent 自己了解的私有信息.

● 我们可以列出若干社会法则如表 3 所示, 其中 $\eta_1 - \eta_6$ 均是有效社会法则. Agent 的特征集实质上确定了各个社会法则的社会福利 (表 3 中, v_1, v_2 分别表示 Agent 1 和 Agent 2 的结构估值, SW 表示社会福利, 0_a^1 表示“Agent 1 在状态 q_0 的行动 a”, “+”表示对应的公式被满足; “−”表示对应的公式不被满足).

表 3　若干社会法则及其导致的社会福利

社会法则	禁止行动	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	v_1	v_2	SW
η_0	$\varnothing$	+	+	−	+	+	−	+	+	−	−	+	34	29	63
η_1	$\{0_a^1, 0_a^2\}$	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	29	19	48
η_2	$\{0_a^1, 1_a^1, 3_w^1\}$	−	+	+	+	−	−	+	+	+	+	+	18	37	55
η_3	$\{2_w^2, 3_w^1\}$	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+	+	38	37	75
η_4	$\{0_a^2, 1_a^2, 2_w^2\}$	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	−	49	12	61
η_5	$\{2_w^2, 3_w^1, 3_r^2\}$	+	+	+	+	−	+	+	+	+	−	+	48	35	83
η_6	$\{2_w^1, 3_w^2\}$	+	+	−	+	+	−	+	+	−	+	+	34	31	65

● 例如, η_1 表示在状态 q_0 禁止 Agent 1 和 Agent 2 控制数据传输通道的申请. 实施该社会法则后, 系统状态将保持留在 q_0, 没有 Agent 可以控制或使用数据传输通道, 从而简单粗暴地避免了进入错误状态, 是一个有效社会法则. 但由于其严重影响了各个 Agent 的正常运行, 社会福利值只有 48, 低于其他许多社会法则的社会福利值, 因而不是一个高效社会法则; η_5 表示在状态 q_2, 禁止 Agent 2 的使用数据传输通道, 并且在状态 q_3 禁止 Agent 1 的使用数据传输通道以及 Agent 2 的常规工作. 实施该社会法则后, 在状态 q_2 及 q_3 均只有一个 Agent 可以对数据传输通道进行写入, 从而避免了进入错误状态. 此外, 还避免了 Agent 2 在状态 q_3 对数据传输通道的永久控制. 可以计算出该社会法则的社会福利是 83, 是目前考虑的 6 个有效社会法则中的社会福利最大者, 如果不存在其他社会福利更大的社会法则, η_5 将是我们需要寻找的高效社会法则.

● 然而, 由于 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 的私有性, 我们并不能像上面那样直接计算并比较各个社会法则的社会福利. 试图通过询问各 Agent 获取 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 也不可行, 因为各 Agent 会选择汇报对自己最有利的特征集而非诚实地汇报. 如何可靠地选出高效社会法则是后文要解决的关键挑战.

例 1 实质上展示了如下场景: 由于系统中存在信息不完全性, 且 Agent 具有博弈论角度的理性, 它们总是选择最大化自身效用的行动. 这意味着找出高效社会法则的问题有别于通常的优化问题. 我们的目的是在上述存在信息不完全性及 Agent 的理性行为的情况下, 可靠地找出高效社会法则, 这可以很自然地在算法机制设计的理论框架下寻求解决方案——通过设计社会法则合成机制来可靠地找出高效社会法则.

定义 8 (社会法则合成机制). 令 $\Delta = \{r(1), r(2), \ldots, r(n)\} \subseteq Ag$ 为所有参与社会法则合成的 Agent, 其中 $r: \mathbb{N} \to \{1, \ldots, k\}$ 为单射函数, $\Theta_{r(i)}$ 为 Agent $r(i)$ 的特征集空间. 社会法则合成机制为一个二元组, 其中 $a: \Theta_{r(1)} \times \ldots \times \Theta_{r(n)} \to \mathcal{SL}_S$

为分配函数, $\forall i\in\Delta$: $t_i:\Theta_{r(1)}\times\ldots\times\Theta_{r(n)}\to\mathbb{R}$ 为 (Agent i 的) 支付函数.

社会法则合成机制通过如下 3 步进行实施.

1) 首先, 机制 (a,t) 被宣布并为所有 Agent 所了解.

2) 然后, 所有的 Agent 可选择是否参与机制.若参与, 则从其特征集空间中自由选择一个特征集进行投标 (允许谎报自己的特征集), 并承诺服从得到的社会法则的约束; 否则就不参与投标, 但也不需服从社会法则的约束.

3) 最后, 将投标向量 (所有 Agent 的投标) 输入分配函数 a 和支付函数 t, 分别得到选用的社会法则以及各个参与 Agent 的支付金额.

社会法则实际上是一种非独占、非竞争的公共货物 (public goods). 一旦选用一个社会法则, 它将影响系统中的任意 Agent (产生价值或造成损失). 我们不能阻止任何 Agent 享用社会法则的价值, 任意 Agent 也无法避免社会法则对自己造成的损失. 然而, 社会法则作为公共货物又有其特殊性, 因为它是对系统中若干 Agent 的行为约束, 它的成功实施需要这些 Agent 积极配合、自觉遵守. 社会法则并不是强制性约束, 任何 Agent 是否遵守社会法则完全出于其自愿. 在社会法则合成机制实施前, 所有的 Agent 都有机会决定是否要参与, 但如果决定参与那就必须承诺服从得到的社会法则的约束.

对于任意 $\Delta\subseteq Ag$, 我们把仅约束集合 Δ 中的 Agent 的行动的社会法则叫做 Δ-社会法则.

定义 9 (**Δ-社会法则**). 给定并发博弈结构 $S=\langle k,Q,q_s,\Pi,\pi,\varepsilon,\delta\rangle$, $\Delta\subseteq Ag$ 以及社会法则 η, 若 $\forall q\in Q$, $\forall i\in Ag\setminus\Delta$: $\eta_i(q)=\varnothing$, 那么我们说 η 是一个 Δ-社会法则.

给定一个并发博弈结构 S, 一个协同目标 φ, 我们记所有有效 Δ-社会法则的集合为:

$$\mathcal{SL}_{S,\varphi}^{\Delta}=\{\eta\in\mathcal{SL}_s|S\dagger\eta,q_s\vDash\varphi \text{ 且 } \forall q\in Q,\ \forall i\in Ag\setminus\Delta:\ \eta_i(q)=\varnothing\}.$$

为了书写上的方便, 我们将 $\mathcal{SL}_{S,\varphi}^{Ag}$ 简写为 $\mathcal{SL}_{S,\varphi}$, 并且将 $\mathcal{SL}_{S,\varphi}^{Ag\setminus\{i\}}$ 简写为 $\mathcal{SL}_{S,\varphi}^{-i}$.

我们用 $\mathcal{F}_i$ 表示 Agent i 的真实特征集, 用 $\widehat{\mathcal{F}_i}$ 表示 Agent i 投标的特征集, 并采用如下常用的记号:

$$\widehat{\mathcal{F}}=(\widehat{\mathcal{F}_1},\ldots,\widehat{\mathcal{F}_k}),\widehat{\mathcal{F}}_{-i}=(\widehat{\mathcal{F}_1},\ldots,\widehat{\mathcal{F}}_{i-1},\widehat{\mathcal{F}}_{i+1},\ldots,\widehat{\mathcal{F}_k}),\widehat{\mathcal{F}_i},\widehat{\mathcal{F}}_{-i}=\widehat{\mathcal{F}}.$$

定义 10 (**社会法则估值**). 任意 Agent $i\in Ag$ 对任意社会法则 $\eta\in\mathcal{SL}_S$ 的估值 $v_i^{sl}(\eta)$ 为该社会法则带来的结构估值增益, 即有 $v_i^{sl}(\eta)=v_i(S\dagger\eta)-v_i(S)=\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger\eta)-\sigma(\mathcal{F}_i,S)$.

根据社会法则估值的定义, 对于任意 Agent i 而言, 不限制任何行动的社会法则 $\eta_\varnothing$ 满足 $\forall i\in Ag,q\in Q$: $\eta_\varnothing(i,q)=\varnothing$, 不会对原结构作任何修改, 因此估值为 0; 任意其他社会法则可导致对结构估值增加, 也可导致结构估值降低, 这意味着 v_i^{sl} 的取值范围包括正实数、负实数和 0.

例 2: 表 3 中各社会法则的估值如表 4 所示.

表 4　若干社会法则的估值

估值函数	η_0	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6
v_1	34	29	18	38	49	48	34
v_2	29	19	37	37	12	35	31
v_1^{sl}	0	−5	−16	4	15	14	0
v_2^{sl}	0	−10	8	8	−17	6	2

可见, $v_1^{sl}(\eta_0)$、$v_1^{sl}(\eta_6)$、$v_2^{sl}(\eta_0)$ 均$=0$; $v_1^{sl}(\eta_1)$、$v_1^{sl}(\eta_2)$、$v_2^{sl}(\eta_1)$、$v_2^{sl}(\eta_4)$ 均<0; $v_1^{sl}(\eta_3)$、$v_1^{sl}(\eta_4)$、$v_1^{sl}(\eta_5)$、$v_2^{sl}(\eta_2)$、$v_2^{sl}(\eta_3)$、$v_2^{sl}(\eta_5)$、$v_2^{sl}(\eta_6)$ 均>0.

定义 11 (**效用**). 在社会法则合成机制的实施中, Agent 获得的效用为其对所选社会法则的估值与支付之差, 即若参与社会法则合成的 Agent 集合为 $\Delta\subseteq Ag$, 投标集为 $\widehat{\mathcal{F}_\Delta}$, 那么对于任意具有特征集 $\mathcal{F}_i$ 的 Agent $i\in Ag$:

1) 如果 $i\in\Delta$ (参与社会法则合成机制), 那么获得的效用为:

$$u_i(\mathcal{F}_i,\widehat{\mathcal{F}_\Delta})=v_i^{sl}(a(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}))-t_i(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})=\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger a(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}))-\sigma(\mathcal{F}_i,S)-t_i(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}).$$

2) 如果 $i\notin\Delta$ (不参与社会法则合成机制), 那么获得的效用为:

$$u_i(\mathcal{F}_i,\widehat{\mathcal{F}_\Delta})=v_i^{sl}(a(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}))=\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger a(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}))-\sigma(\mathcal{F}_i,S).$$

由此可见, 由于社会法则作为公共货物的特殊性, 对于任意 Agent 而言, 不管它是否参与机制, 选用的社会法则均能给它带来价值 (结构估值的变化). 如果它参与机制, 那么它还需承担机制指定的支付; 如果它不参与机制, 那么它的结构估值将不会在社会法则的选择时被考虑 (因为 $\mathcal{F}_\Delta$ 中不包含它的投标). Agent 的效用实质是其在社会法则实施中获得的综合收益.

2.2 一种高效社会法则合成机制

为了在具有信息不完全性及 Agent 的理性行为的环境中可靠地得到高效社会法则, 本文专注于设计满足激励相容和个体理性的高效社会法则合成机制.

定义 12 (**高效社会法则合成机制**). 一个社会法则合成机制是一个针对协同目标 $\varphi\in\mathcal{L}_{\mathrm{ATL}}$ 的高效社会法则合成机制当且仅当下列属性被满足.

1) (高效性) 机制总是为协同目标 φ 分配一个高效社会法则.

2) (激励相容) 诚实投标是所有参与机制的 Agent 的占优策略.

3) (个体理性) 任意 Agent $i\in Ag$ 参与机制且服从社会法则获得的效用不低于不参与机制获得的效用.

Agent 的自觉服从性可以完美地由个体理性反应, 并且 Agent 诚实揭示自己私有信息的行为可由激励相容保证. 高效社会法则机制设计问题实质上是一种面向公共货物的效率机制设计问题, 通常可以考虑基于 VCG 机制设计解决方案.

定义 13 (**VCG 社会法则机制**). 我们把包含如下分配函数与支付函数的机制叫做 VCG 社会法则机制 (VCG social law mechanism, VCG-SLM).

令参与机制的 Agent 集合为 $\Delta\subseteq Ag$, 获得的投标集为 $\widehat{\mathcal{F}_\Delta}$, 且令 $\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}$ 为其中 Agent 集合 $\Delta\setminus\{i\}$ 的投标.

1) 分配函数从所有有效 Δ-社会法则中选出对 Δ 社会福利最高的社会法则, 即:

$$a(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})=\arg\max_{\eta\in\mathcal{SL}_{S,\varphi}^{\Delta}}\sum_{i\in\Delta}\sigma(\widehat{\mathcal{F}_i},S\dagger\eta).$$

2) 基于 Clarke 基准规则, 对于任意 Agent $i\in\Delta$, 令

$$h_i(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})=\max_{\eta\in\mathcal{SL}_{S,\varphi}^{\Delta\setminus\{i\}}}\sum_{j\in\Delta\setminus\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}_j},S\dagger\eta).$$

由此确定 Agent i 的支付为:

$$\begin{aligned}t_i(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})&=h_i(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})-\sum_{j\in\Delta\setminus\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}_j},S\dagger a(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}))=\max_{\eta\in\mathcal{SL}_{S,\varphi}^{\Delta\setminus\{i\}}}\sum_{j\in\Delta\setminus\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}_j},S\dagger\eta)-\sum_{j\in\Delta\setminus\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}_j},S\dagger a(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}))\\&=\sum_{j\in\Delta\setminus\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}_j},S\dagger a(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))-\sum_{j\in\Delta\setminus\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}_j},S\dagger a(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})).\end{aligned}$$

社会法则实质上被实现为一种权利与义务的综合体. Agent 作为社会成员的权利包括自己的结构估值在社会福利的优化中被考虑, 以及获得支付; Agent 作为社会成员的义务即参与投标并服从社会法则的约束. Agent 想享受作为社会成员的权力就必须承担作为社会成员的义务.

实际上, 根据 VCG 机制上述函数 $h_i(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})$ 可以是任何与 Agent i 的投标无关的实质函数, 这样就能保证激励相容[12,13]. 问题是如何实现本文要求的个体理性. 如果所有 Agent 的估值非负, 那么可使用 Clarke 基准规则 (如上设置函数 $h_i(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})$) 使 Agent 选择服从机制成为占优策略[12], 从而实现个体理性. 然而, 本文考虑的问题与上述通常的情况有本质的区别, 社会法则是一种公共货物, 且 Agent 的估值并不满足非负性, 如何设置 $h_i(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})$ 以实现个体理性并无已知的理论保证, 是一个需要探索的问题. 有趣的是, 我们可以证明采用 Clarke 基准规则的 VCG 社会法则机制仍能保证激励相容并提供一种有意义的个体理性保证.

2.3 形式化属性

首先我们可以证明当 $\mathcal{SL}_{S,\varphi}^{\Delta}\neq\varnothing$ (意为存在有效 Δ-社会法则) 且 $\forall i:\mathcal{SL}_{S,\varphi}^{\Delta\setminus\{i\}}\neq\varnothing$ (意为没有哪个 Agent 不可或缺) 时, VCG-SLM 是激励相容的, 即对于所有的 Agent $i\in\Delta$, 诚实投标自己的特征集是其最优选择.

定理 3. 当 $\mathcal{SL}^{\Delta}_{S,\varphi}\neq\varnothing$ 且 $\forall i:\mathcal{SL}^{\Delta\setminus\{i\}}_{S,\varphi}\neq\varnothing$ 时, 诚实投标是所有选择参与社会法则合成并承诺服从选定的社会法则的 Agent 的占优策略.

证明: 令 $\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}$ 和 $\widehat{\mathcal{F}}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}$ 分别为集合 $\Delta\setminus\{i\}$ 和 Δ 中所有 Agent 的投标. 对于任意 Agent $i\in\Delta$, 其效用为:

$$\begin{aligned}u_i(\mathcal{F}_i,(\widehat{\mathcal{F}}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))&=\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger a(\widehat{\mathcal{F}}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))-\sigma(\mathcal{F}_i,S)-t_i(\widehat{\mathcal{F}}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})=\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger a(\widehat{\mathcal{F}}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))+\sum_{j\in\Delta\setminus\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}}_j,S\dagger a(\widehat{\mathcal{F}}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))\\&\quad-\max_{\eta\in\mathcal{SL}^{\Delta\setminus\{i\}}_{S,\varphi}}\sum_{j\in\Delta\setminus\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}}_j,S\dagger\eta)-\sigma(\mathcal{F}_i,S)\leqslant\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger a(\mathcal{F}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))+\sum_{j\in\Delta\setminus\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}}_j,S\dagger a(\mathcal{F}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))\\&\quad-\max_{\eta\in\mathcal{SL}^{\Delta\setminus\{i\}}_{S,\varphi}}\sum_{j\in\Delta\setminus\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}}_j,S\dagger\eta)-\sigma(\mathcal{F}_i,S)=u_i(\mathcal{F}_i,(\mathcal{F}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})).\end{aligned}$$

这意味着对于任意 Agent $i\in\Delta$ 而言, 诚实汇报其类型是其占优策略.

定理 4. 当 $\mathcal{SL}_{S,\varphi}\neq\varnothing$ 且 $\forall i:\mathcal{SL}^{-i}_{S,\varphi}\neq\varnothing$ 时, 在 VCG-SLM 中所有的 Agent 参与社会法则合成、服从选定的社会法则并诚实投标是一个纳什均衡.

证明: 任意 Agent 实际上有且仅有 3 种可供自由选择的策略: ① 不参与社会法则合成, 不服从选择的社会法则的约束; ② 参与社会法则合成, 承诺服从选定社会法则的约束, 并诚实投标; ③ 参与社会法则合成, 承诺服从选定社会法则的约束, 但不诚实投标. 以下证明, 所有 Agent 均选择策略②是一个纳什均衡, 也就是要证对于任意 Agent $i\in Ag$, 若其单方面地改变策略, 选择策略①或策略③均不能获得更高的效用.

情况 1: 若 Agent i 单方面把它的策略变为策略③, 此时仍有所有的 Agent 选择参与社会法则合成并承诺服从选定的社会法则, 由定理 3 知, 诚实投标是 Agent i 的占优策略, 故策略③不会导致更高的效用.

情况 2: 若 Agent i 单方面把它的策略变为策略①, 那么仍有除 i 外的所有 Agent 选择参与社会法则合成, 承诺服从选定的社会法则并诚实投标. 此时, 投标向量为 $\mathcal{F}_{-i}$, 系统选择的社会法则为 $\eta^*=\arg\max_{\eta\in\mathcal{SL}^{-i}_{S,\varphi}}\sum_{j\neq i}\sigma(\widehat{\mathcal{F}}_j,\eta)$, 从而 Agent i 的效用为 $\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger\eta^*)-\sigma(\mathcal{F}_i,S)$.

而如果 Agent i 保持其策略②不变, 那么投标向量为 $\mathcal{F}=\{\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_k\}$, 其中任意特征集均为对应 Agent 的真实特征集. 此时 Agent i 获得的效用为:

$$\begin{aligned}u_i(\mathcal{F}_i,(\mathcal{F}_i,\mathcal{F}_{-i}))&=\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger a(\mathcal{F}_i,\mathcal{F}_{-i}))+\sum_{j\neq i}\sigma(\mathcal{F}_j,S\dagger a(\mathcal{F}_i,\mathcal{F}_{-i}))-\sum_{j\neq i}\sigma(\mathcal{F}_j,S\dagger\eta^*)-\sigma(\mathcal{F}_i,S)\\&=\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger a(\mathcal{F}_i,\mathcal{F}_{-i}))+\sum_{j\neq i}\sigma(\mathcal{F}_j,S\dagger a(\mathcal{F}_i,\mathcal{F}_{-i}))-(\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger\eta^*)+\sum_{j\neq i}\sigma(\mathcal{F}_j,S\dagger\eta^*))+\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger\eta^*)-\sigma(\mathcal{F}_i,S).\end{aligned}$$

由于 $a(\mathcal{F})$ 为对 Ag 社会福利最高的有效 Ag-社会法则, 我们可以得到:

$$\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger a(\mathcal{F}_i,\mathcal{F}_{-i}))+\sum_{j\neq i}\sigma(\mathcal{F}_j,S\dagger a(\mathcal{F}_i,\mathcal{F}_{-i}))-(\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger\eta^*)+\sum_{j\neq i}\sigma(\mathcal{F}_j,S\dagger\eta^*))=\sum_{i=1}^{k}\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger a(\mathcal{F}))-\sum_{i=1}^{k}\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger\eta^*)\geqslant 0.$$

故有 $u_i(\mathcal{F}_i,(\mathcal{F}_i,\mathcal{F}_{-i}))\geqslant\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger\eta^*)-\sigma(\mathcal{F}_i,S)$, 即策略①也不会导致更高的效用.

综上, VCG-SLM 中所有 Agent 参与社会法则合成、服从选定的社会法则并诚实投标是一个纳什均衡.

至此我们可以确定, 在投标开始前, 所有的 Agent 出于自身效用的考虑都不会单方面地选择不参与投标 (定理 4 保证), 并且当投标开始后, 所有的 Agent 均会诚实投标 (定理 3 保证). 注意, 为获得更简单清晰的表述方式, 在后文中投标向量通常可以不失一般性地记为 $\widehat{\mathcal{F}}=(\widehat{\mathcal{F}}_1,\ldots,\widehat{\mathcal{F}}_k)$.

推论 5. VCG-SLM 是一个高效社会法则合成机制当且仅当 $\mathcal{SL}_{S,\varphi}\neq\varnothing$ 且 $\forall i:\mathcal{SL}^{-i}_{S,\varphi}\neq\varnothing$, 即存在有效社会法则并且没有哪个 Agent 不可或缺.

证明: "$\Rightarrow$": 若 VCG-SLM 是一个高效社会法则合成机制, 那么显然要求满足 $\mathcal{SL}_{S,\varphi}\neq\varnothing$, 否则分配无法计算; 且要求满足 $\forall i:\mathcal{SL}^{-i}_{S,\varphi}\neq\varnothing$, 否则支付无法计算.

"$\Leftarrow$": 若 $\mathcal{SL}_{S,\varphi}\neq\varnothing$ 且 $\forall i:\mathcal{SL}^{-i}_{S,\varphi}\neq\varnothing$, 那么由分配函数的定义知, 该函数会返回一个高效社会法则, 从而高效性被满足; 由定理 3 知, 激励相容被满足; 此外, 由定理 4 知, 个体理性也被满足. 因此, 在该机制下, 所有的 Agent

均会选择参与机制并服从选出的社会法则的约束, 所有的 Agent 均会诚实地汇报自己的特征集, 进而分配函数能可靠地选择出高效的社会法则. 从而根据定义 12, VCG-SLM 是一个高效社会法则合成机制.

基于上述结论, 我们实际上为 $\mathcal{SL}_{S,\varphi} \neq \varnothing$ 且 $\forall i: \mathcal{SL}_{S,\varphi}^{-i} \neq \varnothing$ 的情况找出了一种高效社会法则合成机制 VCG-SLM, 但是并不能说明 VCG-SLM 是唯一的高效社会法则合成机制. 事实上, 函数 $h_i(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})$ 的设置仍然存在探索的空间. 是否可以采用 Clarke 基准规则之外的 $h_i(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})$ 设置方式, 使所有的 Agent 选择参与机制满足某种 (不限于纳什均衡) 的博弈解概念, 从而实现个体理性, 是一个值得进一步探究的问题.

此外, 我们也可以划分出一些不存在任何高效社会法则合成机制的情况.

定义 14 (ATL 的存在性与通用性子语言). ATL 的存在性子语言 $\mathcal{L}^e$ 与通用性子语言 $\mathcal{L}^u$ 可分布由以下语法 ϵ 和 υ 定义:

$$\epsilon ::= p|\epsilon \wedge \epsilon|\epsilon \vee \epsilon|\langle\langle Ag\rangle\rangle \bigcirc \epsilon|\langle\langle Ag\rangle\rangle \Box \epsilon|\langle\langle Ag\rangle\rangle \epsilon \mathcal{U} \epsilon,$$

$$\upsilon ::= p|\upsilon \wedge \upsilon|\upsilon \vee \upsilon|\langle\langle\rangle\rangle \bigcirc \upsilon|\langle\langle\rangle\rangle \Box \upsilon|\langle\langle\rangle\rangle \upsilon \mathcal{U} \upsilon,$$

其中, $p \in \Pi$.

定理 6.

1) 如果 $\mathcal{SL}_{S,\varphi} = \varnothing$, 那么不存在任何高效社会法则合成机制.

2) 如果目标为 φ, 且 $\varphi \in \mathcal{L}^e$ 或 $\neg\varphi \in \mathcal{L}^u$ 但是 $S, q_s \nvDash \varphi$, 那么不存在任何高效社会法则合成机制.

证明:

1) 当 $\mathcal{SL}_{S,\varphi} = \varnothing$ 时, 不存在有效社会法则, 因此不存在高效社会法则, (定义 12 要求的) 高效性无法满足, 故不存在任何高效社会法则合成机制.

2) 如果 $S, q_s \nvDash \varphi$, 那么等价地有 $S, q_s \vDash \neg\varphi$.

如果 $\varphi \in \mathcal{L}^e$, 那么对于任意社会法则 η, $S \dagger \eta, q_s \vDash \varphi \Rightarrow S, q_s \vDash \varphi$ 均满足, 即 $S, q_s \vDash \neg\varphi \Rightarrow S \dagger \eta, q_s \vDash \neg\varphi$ 均满足[3], 这意味着对于任意的社会法则 η, 我们均有 $S \dagger \eta, q_s \nvDash \varphi$, 即 $\mathcal{SL}_{S,\varphi} = \varnothing$.

如果 $\neg\varphi \in \mathcal{L}^u$, 那么对于任意社会法则 η, $S, q_s \vDash \neg\varphi \Rightarrow S \dagger \eta, q_s \vDash \neg\varphi$ 均满足[3], 这意味着对于任意的社会法则 η, 我们均有 $S \dagger \eta, q_s \nvDash \varphi$, 即 $\mathcal{SL}_{S,\varphi} = \varnothing$.

综上所述, 在上述情况下, 我们均有 $\mathcal{SL}_{S,\varphi} = \varnothing$, 因此根据 1) 的结论, 在上述情况下均不存在任何高效社会法则合成机制.

实质上 $\mathcal{L}^e$ 为所有其满足性不能通用实施社会法则确立 (由不满足变成满足) 的 ATL 的公式的集合; $\mathcal{L}^u$ 为所有其满足性不能通过实施社会法则避免 (由满足变成不满足) 的公式的集合. 以上结论说明, 当协同目标为某些特定的形式时, 由于不存在有效社会法则, 不存在任何高效社会法则合成机制.

3 社会法则合成机制的计算

3.1 计算复杂性

定义 15 (VCG-SLM 的计算问题). VCG-SLM 的计算问题为: 给定并发博弈结构 $S = \langle k, Q, q_s, \Pi, \pi, \varepsilon, \delta\rangle$, 协同目标 φ, 以及 Agent 的投标向量 $\widehat{\mathcal{F}} = \{\widehat{\mathcal{F}}_1, \ldots, \widehat{\mathcal{F}}_k\}$, 求选定的社会法则 $a(\widehat{\mathcal{F}})$ 及对各个 Agent 的支付 $(t_1(\widehat{\mathcal{F}}), \ldots, t_k(\widehat{\mathcal{F}}))$.

由 VCG-SLM 的定义 (定义 13) 可见社会法则合成机制的计算包括分配函数的计算以及支付函数的计算, 其中支付函数的计算实质上涉及若干次分配函数的计算, 而分配函数的计算要基于任意 Agent i 的估值函数 $\sigma(\mathcal{F}_i, S)$ 的计算.

引理 7. $\sigma(\mathcal{F}_i, S)$ 的计算具有多项式时间复杂度算法.

证明: 由于我们有:

$$\sigma_i(\mathcal{F}_i, S) = \sum_{(\varphi_j, c_j)_i \in \mathcal{F}_i; S, q_s \vDash \varphi_j} c_j.$$

实质上是对 $\mathcal{F}_i$ 中的若干个形如 $(\varphi_j,c_j)_i$ 元组, 逐一判断是否有 $S,q_s\vDash\varphi_j$ 成立, 若成立, 则把对应的 c_j 累加. 而判断是否有 $S,q_s\vDash\varphi_j$ 成立的问题是 ATL 模型检测问题. 该问题已被证明是一个 P 问题[7]. 因此 $\sigma_i(\mathcal{F}_i,S)$ 的计算具有多项式时间复杂度算法.

引理 8. $a(\widehat{\mathcal{F}})$ 的计算是 $\mathrm{FP}^{\mathrm{NP}}$-完全的.

证明: 该问题关联的判定问题为: 给定并发博弈结构 $S=\langle k,Q,q_s,\Pi,\pi,\varepsilon,\delta\rangle$, 协同目标 φ, 以及 Agent 的投标向量 $\widehat{\mathcal{F}}=\{\widehat{\mathcal{F}}_1,\dots,\widehat{\mathcal{F}}_k\}$, 判定是否存在社会法则 $\eta\in\mathcal{SL}_{S,\varphi}$ 满足 $SW(\eta)=\sum_{i=1}^{k}\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger\eta)\geqslant l\in\mathbb{R}^+$. 由于 $\sigma(\mathcal{F}_i,S)$ 的计算具有多项式时间复杂度算法 (引理 7), 上述问题对应的验证问题是一个 P 问题, 因此上述问题属于 NP, 进而可以确定 $a(\widehat{\mathcal{F}})$ 的计算属于 $\mathrm{FP}^{\mathrm{NP}}$.

为了证明 $a(\widehat{\mathcal{F}})$ 的计算 $\mathrm{FP}^{\mathrm{NP}}$-难, 我们将最大权重布尔可满足问题 (MAX WEIGHT SAT)[49]规约到该问题. MAX WEIGHT SAT 的任意实例为: 给定布尔变量 $\phi_1,\dots,\phi_m$ 上的一个命题集 $\{\psi_1,\dots,\psi_n\}$ 以及每个命题关联的一个权重 $\{w_1,\dots,w_n\}$, 找出对上述布尔变量的一个最大化"被满足命题的权重和"的赋值 v^*, 即:

$$v^*=\arg\max_{v\in\{0,1\}^n}\sum_{j\in\{1\leqslant i\leqslant n|v\vDash\psi_i\}}w_j.$$

我们构造一个具有 2 个 Agent, $m+2$ 个状态的并发博弈结构 S, 状态转换关系如图 2 所示.

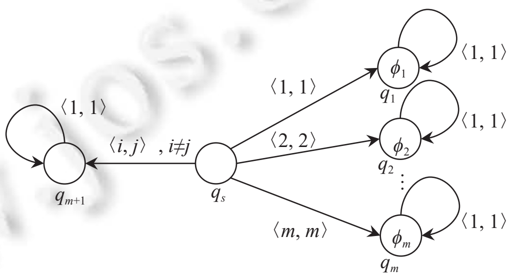

图 2 从 MAX WEIGHT SAT 到 $a(\mathcal{F})$ 计算的规约

- q_s 为初始状态, $\forall i\in\{1,\dots,m\}:\pi(q_i)=\{\phi_i\}$ 且 $\pi(q_s)=\pi(q_{m+1})=\varnothing$.
- 若 $q=q_s$, $\varepsilon_1(q)=\varepsilon_2(q)=\{1,\dots,m\}$, 否则 $\varepsilon_1(q)=\varepsilon_2(q)=\{1\}$.
- 对于任意 $i=j$, $\delta(q_s,\langle i,j\rangle)=q_i$, 否则 $\delta(q_s,\langle i,j\rangle)=q_{m+1}$; 且对于任意 $q\neq q_s$, $\delta(q,\langle 1,1\rangle)=q$.

令 $\widehat{\psi_i}$ 为将 ψ_i 中的任意命题变量 ϕ_j 替换为 $\langle\langle 1,2\rangle\rangle\Diamond\phi_j$ 后所得的公式, 显然有:

$$S\dagger\eta,q_s\vDash\widehat{\psi_i}\text{ 当且仅当 }\widehat{v}(\psi_i)=1\text{, 其中 }v(\phi_j)=0\text{ 当且仅当 }j\in\eta_1(q_s)\cup\eta_2(q_s).$$

令 $\mathcal{F}_1=\{(\widehat{\psi_1},w_1)_1,\dots,(\widehat{\psi_n},w_n)_1\}$, $\mathcal{F}_2=\{(\widehat{\psi_1},w_1)_2,\dots,(\widehat{\psi_n},w_n)_2\}$, 协同目标为 $\top$,

令:

$$\mathrm{SAT}(S\dagger\eta,\widehat{\psi_i})=\begin{cases}1, & S\dagger\eta,q_s\vDash\widehat{\psi_i}\\0, & \text{否则}\end{cases}.$$

于是有:

$$\begin{aligned}a(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)&=\arg\max_{\eta\in\mathcal{SL}_{S,\top}}2\cdot\sigma(\{(\widehat{\psi_1},w_1)_1,\dots,(\widehat{\psi_n},w_n)_1\},S\dagger\eta)\\&=\arg\max_{\eta\in\mathcal{SL}_{S,\top}}\sum_{i=1}^{n}w_i\cdot\mathrm{SAT}(S\dagger\eta,\widehat{\psi_i}).\end{aligned}$$

令 $\eta^*=a(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$, 易证:

$$v^*(\phi_i)=\begin{cases}0, & i\in\eta_1^*(q_s)\cup\eta_2^*(q_s)\\1, & \text{否则}\end{cases}.$$

综上所述, $a(\widehat{\mathcal{F}})$ 的计算是 $\mathrm{FP}^{\mathrm{NP}}$-完全的.

定理 9. VCG-SLM 的计算问题是 $\mathrm{FP}^{\mathrm{NP}}$-完全的.

证明: VCG-SLM 的计算包含 $a(\widehat{\mathcal{F}})$ 的计算及 k 次 $t_i(\widehat{\mathcal{F}})$ 的计算, 可转化为 $\mathrm{O}(k)$ 次 $a(\widehat{\mathcal{F}})$ 的计算. 由于引理 8 已证 $a(\widehat{\mathcal{F}})$ 的计算是 $\mathrm{FP}^{\mathrm{NP}}$-完全的, 故 VCG-SLM 的计算问题是 $\mathrm{FP}^{\mathrm{NP}}$-完全的.

3.2 转化为整数规划

定理 9 意味着我们不能期待为 VCG-SLM 的计算找出多项式时间复杂度的算法. 由于整数规划 (integer programming) 是一种针对此类计算难问题的被广泛采用的有效方法, 我们试图将 VCG-SLM 的计算问题转化为整数规划进行求解, 基本思路是首先将分配函数 $a(\widehat{\mathcal{F}})$ 的计算转化为整数规划, 然后在此基础上进一步得到基于整数规划的支付函数 $t_i(\widehat{\mathcal{F}})$ 的计算方法.

引理 10. $a(\widehat{\mathcal{F}}_\Delta)=\arg\max_{\eta\in\mathcal{SL}_{S,\varphi}}\sigma(\bigcup_{i\in\Delta}\widehat{\mathcal{F}}_i,S\dagger\eta)$.

证明:

$$a(\widehat{\mathcal{F}}_\Delta)=\arg\max_{\eta\in\mathcal{SL}_{S,\varphi}}\sum_{i\in\Delta}\sum_{(\varphi_j,c_j)_i\in\widehat{\mathcal{F}}_i;S\dagger\eta,q_s\vDash\varphi_j}c_j=\arg\max_{\eta\in\mathcal{SL}_{S,\varphi}}\sum_{(\varphi_j,c_j)_i\in\bigcup_{i\in\Delta}\widehat{\mathcal{F}}_i;S\dagger\eta,q_s\vDash\varphi_j}c_j=\arg\max_{\eta\in\mathcal{SL}_{S,\varphi}}\sigma(\bigcup_{i\in\Delta}\widehat{\mathcal{F}}_i,S\dagger\eta).$$

可见分配函数选择的是满足目标且最大化社会福利的社会法则, 这实际上取决于 $\bigcup_{i\in\Delta}\widehat{\mathcal{F}}_i$ 中的各个公式 φ_i 是否在状态 q_s 被满足, 并进一步取决于 Agent 在当前状态有哪些可用的行动及 φ_i 的子公式是否在当前状态及与当前状态相关联的后续状态被满足. 所有上述选择都可以分别用一个布尔变量来反映, 并且对这些布尔变量的联合赋值最终受到 ATL 语义的约束.

定义 15 (公式的闭包). 对于每个公式 φ, 它相关的子公式可以被记为 $cl(\varphi)$, 叫做 φ 的闭包, 定义为:

$$cl(\varphi)=\{\varphi\}\cup sub(\varphi),$$

其中,

$$sub(\varphi)=\begin{cases}cl(\psi)\cup cl(\chi), & \text{如果}\varphi=\psi\vee\chi\text{或}\varphi=\langle\!\langle A\rangle\!\rangle(\psi\,\mathcal{U}\chi)\\ cl(\psi), & \text{如果}\varphi=\neg\psi\text{或}\varphi=\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\psi\text{或}\varphi=\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\psi\\ \{\varphi\}, & \text{如果}\varphi\in\Pi\end{cases}.$$

根据上述定义, 公式的闭包实质上构成了一种树状结构, 如图 3 所示.

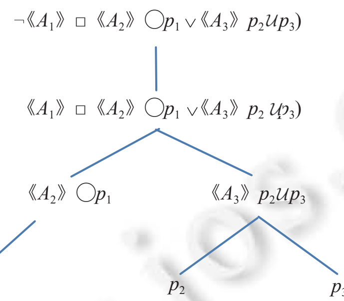

图 3　一个 ATL 公式的闭包及其潜在的树形结构

例 3: 根据定义 2, 给定 Agent 集合 Ag, 命题集合 Π, 对于联盟 $A_1,A_2,A_3\subseteq Ag$ 以及命题 $p_1,p_2,p_3\subseteq\Pi$, $\neg\langle\!\langle A_1\rangle\!\rangle\Box(\langle\!\langle A_2\rangle\!\rangle\bigcirc p_1\vee\langle\!\langle A_3\rangle\!\rangle p_2\mathcal{U}p_3)$ 是一个 ATL 公式, $cl(\neg\langle\!\langle A_1\rangle\!\rangle\Box(\langle\!\langle A_2\rangle\!\rangle\bigcirc p_1\vee\langle\!\langle A_3\rangle\!\rangle p_2\mathcal{U}p_3))$ 包含的公式如图 3 所示可表示为一个树形结构.

易见, 根节点即为给定公式, 且对于任意树结点 v 及其对应的公式 φ, $cl(\varphi)$ 即为以结点 v 为根节点的子树包含的所有结点; $sub(\varphi)$ 为所有以结点 v 的子女为根节点的子树的所有结点 (若结点 v 不是叶子结点) 或仅包含结点 v 的集合 (若结点 v 是叶子结点).

公式的闭包所含公式的数量叫做该公式的规模 (或长度). 公式的规模是其结构复杂性的直接体现, 紧密关联于该公式相关的一些算法的时间复杂度. 如 ATL 模型检测问题存在时间复杂度为 $O(t\cdot l)$ 的算法, 其中 t 为给定并发博弈结构的转换的数量, l 为公式的长度[7]. 本文也将使用这些参数来刻画社会法则合成问题的规模.

对于任意投标的特征集 $\widehat{\mathcal{F}_i}=\{(\varphi_1^i,a_1^i)_i,\dots,(\varphi_{n_i}^i,a_{n_i}^i)_i\}$, 我们令:

$$cl(\widehat{\mathcal{F}_i})=cl(\varphi_1^i)\cup\dots\cup cl(\varphi_{n_i}^i),$$

$$cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})=cl\left(\bigcup_{i\in\Delta}\widehat{\mathcal{F}_i}\right)=\bigcup_{i\in\Delta}cl(\widehat{\mathcal{F}_i}).$$

实质上, $cl\left(\bigcup_{i\in\Delta}\widehat{\mathcal{F}_i}\right)$ 是所有可能影响优化目标函数取值的公式的集合. 我们可以引入如下 4 类布尔变量.

1) $x_\varphi^q\in\{0,1\}$, $\forall q\in Q,\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})$.

2) $y_{i:a}^q\in\{0,1\}$, $\forall q\in Q,i\in\{1,\dots,k\},a\in\varepsilon_i(q)$.

3) $y_{A:\vec{m}_A}^q\in\{0,1\}$, $\forall q\in Q,A\subseteq\{1,\dots,k\},\vec{m}_A\in D_A(q)$.

4) $z_{A:\vec{m}_A}^{q,\varphi}\in\{0,1\}$, $\forall q\in Q,\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),A\subseteq\{1,\dots,k\},\vec{m}_A\in D_A(q)$.

其中,

- $x_\varphi^q=1$ 当且仅当 $S\dagger\eta,q\vDash\varphi$.
- $y_{i:a}^q=1$ 当且仅当在 S 的状态 q Agent i 的行动 a 被禁止.
- $y_{A:\vec{m}_A}^q=1$ 当且仅当在 S 的状态 q Agent 联盟 A 的联合行动 $\vec{m}_A$ 被禁止.
- $z_{A:\vec{m}_A}^{q,\varphi}=1$ 当且仅当在 $S\dagger\eta$ 的状态 q Agent 集合采取联合行动 $\vec{m}_A$ 可以保证 φ 在下一状态被满足.

关于 $y_{i:a}^q$ 和 $y_{A:\vec{m}_A}^q$ 的关系, 由于显然有一个联合行动被禁止当且仅当其中一个行动被禁止, 我们可以确定如下结论成立. 注意, 我们用 $\vec{m}_A[i]$ 表示联合行动 $\vec{m}_A$ 中 Agent i 选择的行动.

命题 11. $y_{A:\vec{m}_A}^q=1$ 当且仅当 $\exists i\in A:y_{i:\vec{m}_A[i]}^q=1$.

$z_{A:\vec{m}_A}^{q,\varphi}$ 实质上描述的是联合行动在下一状态可靠地实现某种属性的能力. 基于 ATL 的语义定义不难证明如下结论.

引理 12. $z_{A:\vec{m}_A}^{q,\varphi}=1$ 当且仅当 $\forall\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q):(y_{\bar{A}:\vec{m}_{\bar{A}}}^q=1$ 或 $x_\varphi^{\delta(q,(\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}))}=1)$.

证明: Agent 联盟 A 采取联合策略 $\vec{m}_A$ 导致的下一状态的不确定性来自于联盟 $\bar{A}$ 的联合策略选择的不确定性. 具体而言, 联盟 $\bar{A}$ 所有可选择的联合行动为 $D_{\bar{A}}(q)$ 中所有不被社会法则禁止的联合行动, 即联合策略集合 $\{\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q)|y_{\bar{A}:\vec{m}_{\bar{A}}}^q=0\}$. 根据定义, 我们有:

$$z_{A:\vec{m}_A}^{q,\varphi}=1 \text{ 当且仅当 } \forall\vec{m}_{\bar{A}}\in\{\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q)|y_{\bar{A}:\vec{m}_{\bar{A}}}^q=0\}:x_\varphi^{\delta(q,(\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}))}=1,$$
$$\text{当且仅当 } \forall\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q):(y_{\bar{A}:\vec{m}_{\bar{A}}}^q=1 \text{ 或 } x_\varphi^{\delta(q,(\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}))}=1).$$

直观来看, $z_{A:\vec{m}_A}^{q,\varphi}=1$ 意为当 Agent 联盟 A 采取联合行动 $\vec{m}_A$ 时, 环境 $\bar{A}$ 的任意联合行动 $\vec{m}_{\bar{A}}$ 要么被禁止, 要么将导致一个满足 φ 的后续状态.

由 ATL 的语义定义, 我们还可以导出如下结论.

命题 13. 如下两个公式是有效的.

1) $\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi\leftrightarrow(\chi\vee(\psi\wedge\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi))$.

2) $\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\varphi\leftrightarrow\varphi\wedge\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\varphi$.

更进一步, 我们可以得到如下结论.

引理 14. 如果 $x_\varphi^q=1$ 当且仅当 $S\dagger\eta,q\vDash\varphi$, 那么:

1) $x_p^q=1$ 当且仅当 $p\in\pi(x)$.

2) $x_{\neg\psi}^q=1$ 当且仅当 $x_\psi^q=0$.

3) $x_{\psi\vee\chi}^q=1$ 当且仅当 $x_\psi^q=1$ 或 $x_\chi^q=1$.

4) $x_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\varphi}^q=1$ 当且仅当 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):(y_{A:\vec{m}_A}^q=0$ 且 $z_{A:\vec{m}_A}^{q,\varphi}=1)$.

5) $x_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi}^q=1$ 当且仅当至少以下一条成立:

- $x_{\chi}^{q}=1$.
- $x_{\psi}^{q}=1$ 且 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):(y_{A:\vec{m}_A}^{q}=0$ 且 $z_{A:\vec{m}_A}^{q,\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi}=1)$.

6) $x_{\langle\langle A\rangle\rangle\Box\varphi}^{q}=1$ 当且仅当以下两条均成立:

- $x_{\varphi}^{q}=1$.
- $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):(y_{A:\vec{m}_A}^{q}=0$ 且 $z_{A:\vec{m}_A}^{q,\langle\langle A\rangle\rangle\Box\phi}=1)$.

证明: 1) 由定义 $x_p^q=1$ 当且仅当 $S\dagger\eta,q\vDash p$ 当且仅当 $p\in\pi(x)$.

2) $x_{\neg\psi}^{q}=1$ 当且仅当 $S\dagger\eta,q\vDash\neg\psi$ 当且仅当 $S\dagger\eta,q\nvDash\psi$ 当且仅当 $x_{\psi}^{q}=0$.

3) $x_{\psi\vee\chi}^{q}=1$ 当且仅当 $S\dagger\eta,q\vDash\psi\vee\chi$ 当且仅当 $S\dagger\eta,q\vDash\psi$ 或 $S\dagger\eta,q\vDash\chi$ 当且仅当 $x_{\psi}^{q}=1$ 或 $x_{\chi}^{q}=1$.

4) $x_{\langle\langle A\rangle\rangle\varphi}^{q}=1$ 当且仅当 $S\eta,q\vDash\langle\langle A\rangle\rangle\bigcirc\varphi$ 当且仅当在并发博弈结构 $S\dagger\eta$ 中存在 A-行动 $\vec{m}_A$, 对于任意 $q'\in out(q,\vec{m}_A)$, 都有 $S\dagger\eta,q'\vDash\varphi$ 当且仅当在并发博弈结构 S 中存在 A-行动 $\vec{m}_A$, 满足 $y_{A:\vec{m}_A}^{q}=0$ 且对于任意 $\vec{m}_{\bar{A}}$, 若 $y_{\bar{A}:\vec{m}_{\bar{A}}}^{q}=0$ 则有 $x_{\varphi}^{\delta(q,(\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}))}=1$ 当且仅当 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):(y_{A:\vec{m}_A}^{q}=0$ 且 $z_{A:\vec{m}_A}^{q,\varphi}=1)$.

5) $x_{\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi}^{q}=1$ 当且仅当 $S\eta,q\vDash\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi$ (由命题 13 的 1)) 当且仅当 $S\dagger\eta,q\vDash\chi\vee(\psi\wedge\langle\langle A\rangle\rangle\bigcirc\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi)$ 当且仅当 $S\dagger\eta,q\vDash\chi$ 或 $S\dagger\eta,q\vDash\psi\wedge\langle\langle A\rangle\rangle\bigcirc\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi$,

当且仅当 $S\dagger\eta,q\vDash\chi$ 或 ($S\dagger\eta,q\vDash\psi$ 与 $S\dagger\eta,q\vDash\langle\langle A\rangle\rangle\bigcirc\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi$),

(由引理 14 的 4)) 当且仅当 $x_{\chi}^{q}=1$ 或 ($x_{\psi}^{q}=1$ 且 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):(y_{A:\vec{m}_A}^{q}=0$ 且 $z_{A:\vec{m}_A}^{q,\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi}=1)$).

6) $x_{\langle\langle A\rangle\rangle\Box\varphi}^{q}=1$ 当且仅当 $S\dagger\eta,q\vDash\langle\langle A\rangle\rangle\Box\varphi$ (由命题 13 的 2)) 当且仅当 $S\dagger\eta,q\vDash\varphi\wedge\langle\langle A\rangle\rangle\bigcirc\langle\langle A\rangle\rangle\Box\varphi$ 当且仅当 $S\dagger\eta,q\vDash\varphi$ 且 $S\dagger\eta,q\vDash\langle\langle A\rangle\rangle\bigcirc\langle\langle A\rangle\rangle\Box\varphi$,

(由引理 14 的 4)) 当且仅当 $x_{\varphi}^{q}=1$ 且 ($\exists\vec{m}_A\in D_A(q):(y_{A:\vec{m}_A}^{q}=0$ 且 $z_{A:\vec{m}_A}^{q,\langle\langle A\rangle\rangle\Box\phi}=1)$).

综合命题 11, 引理 12 及引理 14 的结论, 实质上为我们完善地展现了各引入变量之间的约束关系, 将公式的满足性最终规约为“各 Agent 可用行动的选择”及“子公式在后续状态的满足性”. 接下来我们试图进一步引入一些中间变量, 将上述变量之间的约束关系进一步等价地表述为整数规划的约束集. 令 $\Delta\subseteq Ag$ 且 $\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta}=\bigcup_{i\in\Delta}\widehat{\mathcal{F}}_i$, $\varphi^*\in\mathcal{L}_{\mathrm{ATL}}$ 为协同目标, 我们可以得到如下整数规划:

ILP-SWA(Δ): Maximize

$$\sum_{(\varphi_j,c_j)_i\in\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta}}c_j\cdot x_{\varphi_j}^{q_s}\tag{1}$$

s.t.

$$x_{\varphi}^{q}\in\{0,1\},\forall q\in Q,\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta})\tag{2}$$

$$y_{i:a}^{q}\in\{0,1\},\forall q\in Q,i\in\{1,\ldots,k\},a\in\varepsilon_i(q)\tag{3}$$

$$y_{i:a}^{q}=0,\forall q\in Q,i\in\{1,\ldots,k\}\setminus\Delta,a\in\varepsilon_i(q)\tag{4}$$

$$\sum_{a\in\varepsilon_i(q)}(1-y_{i:a}^{q})\geqslant 1,\forall q\in Q,i\in\{1,\ldots,k\}\tag{5}$$

$$y_{A:\vec{m}_A}^{q}\in\{0,1\},\forall q\in Q,\langle\langle A\rangle\rangle\text{或}\langle\langle\bar{A}\rangle\rangle\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q)\tag{6}$$

$$y_{A:\vec{m}_A}^{q}\geqslant y_{i:\vec{m}_A[i]}^{q},\forall q\in Q,\langle\langle A\rangle\rangle\text{或}\langle\langle\bar{A}\rangle\rangle\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q),i\in A\tag{7}$$

$$y_{A:\vec{m}_A}^{q}\leqslant\sum_{i\in A}y_{i:\vec{m}_A[i]}^{q},\forall q\in Q,\langle\langle A\rangle\rangle\text{或}\langle\langle\bar{A}\rangle\rangle\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q)\tag{8}$$

$$s_{A:\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}}^{q,\varphi}\in\{0,1\},\forall q\in Q,\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta}),\langle\langle A\rangle\rangle\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q),\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q)\tag{9}$$

$$s_{A:\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}}^{q,\varphi}\geqslant y_{\bar{A}:\vec{m}_{\bar{A}}}^{q},\forall q\in Q,\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta}),\langle\langle A\rangle\rangle\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q),\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q)\tag{10}$$

$$s_{A:\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}}^{q,\varphi}\geqslant x_{\varphi}^{\delta(q,(\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}))},\forall q\in Q,\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta}),\langle\langle A\rangle\rangle\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q),\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q)\tag{11}$$

$$s_{A:\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}}^{q,\varphi}\leqslant y_{\bar{A}:\vec{m}_{\bar{A}}}^{q}+x_{\varphi}^{\delta(q,(\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}))},\forall q\in Q,\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta}),\langle\langle A\rangle\rangle\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q),\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q)\tag{12}$$

$$z^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A}\in\{0,1\},\forall q\in Q,\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q)\tag{13}$$

$$z^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A}\leqslant s^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}},\forall q\in Q,\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\ \langle\!\langle A\rangle\!\rangle\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q),\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q)\tag{14}$$

$$z^{q,\phi}_{A:\vec{m}_A}\geqslant 1-\sum_{\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q)}(1-s^{q,\phi}_{A:\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}}),\forall q\in Q,\phi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q)\tag{15}$$

$$x^q_p=1,\forall q\in Q,p\in(\Pi\cap cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}))\cap\pi(q)\tag{16}$$

$$x^q_p=0,\forall q\in Q,p\in(\Pi\cap cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}))\setminus\pi(q)\tag{17}$$

$$x^q_{\neg\varphi}=1-x^q_\varphi,\forall q\in Q,\neg\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})\tag{18}$$

$$x^q_{\psi\vee\chi}\geqslant x^q_\psi,\forall q\in Q,\psi\vee\chi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})\tag{19}$$

$$x^q_{\psi\vee\chi}\geqslant x^q_\chi,\forall q\in Q,\psi\vee\chi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})\tag{20}$$

$$x^q_{\psi\vee\chi}\leqslant x^q_\psi+x^q_\chi,\forall q\in Q,\psi\vee\chi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})\tag{21}$$

$$e^{q,\phi}_{A:\vec{m}_A}\in\{0,1\},\forall q\in Q,\phi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q)\tag{22}$$

$$e^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A}\geqslant z^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A}-y^q_{A:\vec{m}_A},\forall q\in Q,\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q)\tag{23}$$

$$e^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A}\leqslant z^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A},\forall q\in Q,\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q)\tag{24}$$

$$e^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A}\leqslant 1-y^q_{A:\vec{m}_A},\forall q\in Q,\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q)\tag{25}$$

$$x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\varphi}\geqslant e^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A},\forall q\in Q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q)\tag{26}$$

$$x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\varphi}\leqslant\sum_{\vec{m}_A\in D_A(q)}e^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A},\forall q\in Q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})\tag{27}$$

$$r^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi}\in\{0,1\},\forall q\in Q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})\tag{28}$$

$$r^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi}\leqslant x^q_\psi,\forall q\in Q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})\tag{29}$$

$$r^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi}\leqslant\sum_{\vec{m}_A\in D_A(q)}e^{q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi}_{A:\vec{m}_A},\forall q\in Q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})\tag{30}$$

$$r^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi}\geqslant 1-((1-x^q_\psi)+(1-e^{q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi}_{A:\vec{m}_A})),\forall q\in Q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q)\tag{31}$$

$$x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi}\geqslant x^q_\chi,\forall q\in Q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})\tag{32}$$

$$x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi}\geqslant r^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi},\forall q\in Q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})\tag{33}$$

$$x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi}\leqslant x^q_\chi+r^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi},\forall q\in Q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})\tag{34}$$

$$x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\varphi}\leqslant x^q_\varphi,\forall q\in Q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})\tag{35}$$

$$x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\varphi}\leqslant\sum_{\vec{m}_A\in D_A(q)}e^{q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\varphi}_{A:\vec{m}_A},\forall q\in Q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})\tag{36}$$

$$x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\varphi}\geqslant 1-((1-x^q_\varphi)+(1-e^{q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\varphi}_{A:\vec{m}_A})),\forall q\in Q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta}),\vec{m}_A\in D_A(q)\tag{37}$$

$$x^{q_s}_{\varphi^*}=1\tag{38}$$

从 ILP-SWA(Δ) 的约束集可以看出, 形如 $x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\varphi}$, $x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\varphi\mathcal{U}\psi}$ 和 $x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\varphi}$ 的变量的取值通过若干引入的中间变量, 最终受制于形如 x^q_ψ 和 $y^q_{i:a}$ 的变量的取值. 部分变量之间的约束关系可清晰地描绘为图 4.

易见 ILP-SWA(Δ) 的一个解实质上是一个赋值 ℓ, 在满足约束集的前提下为任意变量赋以 0 或 1 的值. 令 $\eta_\ell(i,q)=\{a\in\varepsilon_i(q)|\ell(y^q_{i:a})=1\}$, 即赋值 ℓ 对应的社会法则. 进一步我们可以证明如下结论.

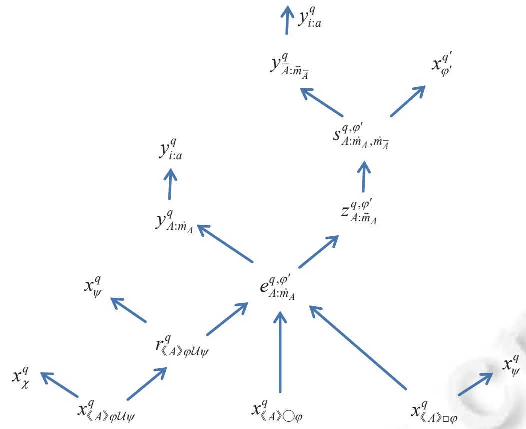

图 4 ILP-SWA(Δ) 中部分变量之间的依赖关系

引理 15.

1) $\forall q\in Q, i\in\{1,\ldots,k\}, a\in\varepsilon_i(q):\ell(y^q_{i:a})=1$ 当且仅当 $a\in\eta_\ell(i,q)$.

2) $\forall q\in Q, A\subseteq\{1,\ldots,k\}, \vec{m}_A\in D_A(q):\ell(y^q_{A:\vec{m}_A})=1$ 当且仅当 $\exists i\in A:\ell(y^q_{i:\vec{m}_A[i]})=1$.

3) $\forall q\in Q, \langle\langle A\rangle\rangle\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_\Delta), \vec{m}_A\in D_A(q), \vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q):\ell(s^{q,\phi}_{A:\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}})=1$ 当且仅当 $\ell(y^q_{\bar{A}:\vec{m}_{\bar{A}}})=1$ 或 $\ell(x_\varphi^{\delta(q,(\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}))})=1$.

4) $\ell(z^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A})=1$ 当且仅当 $\forall\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q):\ell(s^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}})=1$.

5) $\forall q\in Q, \varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_\Delta), A\subseteq\{1,\ldots,k\}, \vec{m}_A\in D_A(q):\ell(e^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A})=1$ 当且仅当 $\ell(y^q_{A:\vec{m}_A})=0$ 且 $\ell(z^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A})=1$.

6) $\forall q\in Q, \langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_\Delta):$

$$\ell(r^q_{\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi})=1 \text{ 当且仅当 } \ell(x^q_\psi)=1 \text{ 且 } \exists\vec{m}_A\in D_A(q):(\ell(y^q_{A:\vec{m}_A})=0 \text{ 且 } \ell(z^{q,\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi}_{A:\vec{m}_A})=1).$$

证明:

1) 由 $\eta_\ell(i,q)$ 的定义可直接导出.

2) 若 $\ell(y^q_{A:\vec{m}_A})=1$, 那么由约束 (8) 得 $\sum_{i\in A}\ell(y^q_{i:\vec{m}_A[i]})\geqslant 1$, 故 $\exists i\in A:\ell(y^q_{i:\vec{m}_A[i]})=1$; 若 $\exists i\in A:\ell(y^q_{i:\vec{m}_A[i]})=1$, 那么由约束 (7) 得 $\ell(y^q_{A:\vec{m}_A})\geqslant 1$, 故 $\ell(y^q_{A:\vec{m}_A})=1$.

3) 若 $\ell(s^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}})=1$, 由约束 (12) 得 $\ell(y^q_{\bar{A}:\vec{m}_{\bar{A}}})+\ell(x_\varphi^{\delta(q,(\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}))})\geqslant 1$, 故 $\ell(y^q_{\bar{A}:\vec{m}_{\bar{A}}})=1$ 或 $\ell(x_\varphi^{\delta(q,(\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}))})=1$; 若 $\ell(y^q_{\bar{A}:\vec{m}_{\bar{A}}})=1$ 或 $\ell(x_\varphi^{\delta(q,(\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}))})=1$, 由约束 (10) 和约束 (11) 得 $\ell(s^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}})\geqslant 1$, 故 $\ell(s^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}})=1$.

4) 若 $\ell(z^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A})=1$, 那么由约束 (14) 得 $\forall\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q):\ell(s^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}})\geqslant 1$, 故 $\forall\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q):\ell(s^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}})=1$; 若 $\forall\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q):\ell(s^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}})=1$, 那么由约束 (15) 得 $\ell(z^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A})\geqslant 1$, 故 $\ell(z^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A})=1$.

5) 若 $\ell(e^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A})=1$, 那么由约束 (24) 得 $\ell(z^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A})\geqslant 1$, 故有 $\ell(z^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A})=1$; 且由约束 (25) 得 $\ell(y^q_{A:\vec{m}_A})\leqslant 0$, 故有 $\ell(y^q_{A:\vec{m}_A})=0$; 若 $\ell(y^q_{A:\vec{m}_A})=0$ 且 $\ell(z^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A})=1$, 那么由约束 (23) 得 $\ell(e^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A})\geqslant 1$, 因此可得 $\ell(e^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A})=1$.

6) 若 $\ell(r^q_{\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi})=1$, 那么由约束 (29) 得 $\ell(x^q_\psi)\geqslant 1$, 因此 $\ell(x^q_\psi)=1$, 且由约束 (30) 可得 $\sum_{\vec{m}_A\in D_A(q)}\ell(e^{q,\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi}_{A:\vec{m}_A})\geqslant 1$, 这意味着 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):\ell(e^{q,\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi}_{A:\vec{m}_A})=1$, 由引理 15 的 5) 可以得到 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):(\ell(y^q_{A:\vec{m}_A})=0$ 且 $\ell(z^{q,\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi}_{A:\vec{m}_A})=1)$; 若 $\ell(x^q_\psi)=1$ 且 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):(\ell(y^q_{A:\vec{m}_A})=0$ 且 $\ell(z^{q,\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi}_{A:\vec{m}_A})=1)$, 那么由引理 15 的 5) 可以得到 $\ell(x^q_\psi)=1$ 且 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):\ell(e^{q,\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi}_{A:\vec{m}_A})=1$, 进一步由约束 (31) 可以导出 $\ell(r^q_{\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi})\geqslant 1$, 这意味着 $\ell(r^q_{\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi})=1$.

接下来, 我们可以证明整数规划 ILP-SWA 的约束集等价地表述了 ATL 语义.

引理 16. 对于任意 $\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_\Delta)$, $\ell(x^q_\varphi)=1$ 当且仅当 $S\dagger\eta_\ell,q\vDash\varphi$.

证明: 对于任意 $\varphi\in cl(\widehat{\mathcal{F}}_\Delta)$, 以下我们将基于结构归纳法证明该结论.

1) 若 $\varphi=p$, $p\in\Pi$: 由约束 (16) 和约束 (17) 得 $\ell(x^q_p)=1$ 当且仅当 $p\in(\Pi\cap cl(\widehat{\mathcal{F}}_\Delta))\cap\pi(q)$ 当且仅当 $p\in\pi(q)$ 当且仅当 $S\dagger\eta_\ell,q\vDash\varphi$.

2) 若 $\varphi=\neg\psi$: 由约束 (18) 得 $\ell(x^q_{\neg\psi})=1$ 当且仅当 $\ell(x^q_{\psi})=0$ (由归纳假设知) 当且仅当 $S\dagger\eta_\ell,q\nvDash\varphi$ (由 ATL 语义知) 当且仅当 $S\dagger\eta_\ell,q\vDash\neg\varphi$.

3) 若 $\varphi=\psi\vee\chi$: 由约束 (19–21) 得 $\ell(x^q_{\psi\vee\chi})=1$ 当且仅当 $\ell(x^q_{\psi})=1$ 或 $\ell(x^q_{\chi})=1$ (由归纳假设知) 当且仅当 $S\dagger\eta_\ell,q\vDash\psi$ 或 $S\dagger\eta_\ell,q\vDash\chi$ (由 ATL 语义知) $S\dagger\eta_\ell,q\vDash\psi\vee\chi$.

4) 若 $\varphi=\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\psi$:

若 $\ell(x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\psi})=1$, 那么由约束 (27) 得 $\sum_{\vec{m}_A\in D_A(q)}\ell(e^{q,\psi}_{A:\vec{m}_A})\geqslant 1$, 因此 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):\ell(e^{q,\psi}_{A:\vec{m}_A})=1$, 由引理 15 的 5) 有 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q)$: ($\ell(y^q_{A:\vec{m}_A})=0$ 且 $\ell(z^{q,\psi}_{A:\vec{m}_A})=1$).

若 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):(\ell(y^q_{A:\vec{m}_A})=0$ 且 $\ell(z^{q,\psi}_{A:\vec{m}_A})=1)$, 那么由引理 15 的 5) 知 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):\ell(e^{q,\psi}_{A:\vec{m}_A})=1$, 进一步由约束 (26) 得到 $\ell(x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\psi})\geqslant 1$, 因此 $\ell(x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\psi})=1$.

以上意味着: $\ell(x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\psi})=1$ 当且仅当 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):(\ell(y^q_{A:\vec{m}_A})=0$ 且 $\ell(z^{q,\psi}_{A:\vec{m}_A})=1)$.

(由引理 15 的 1), 2) 及 4)) 当且仅当 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):(\forall i\in A:\vec{m}_A[i]\notin\eta_\ell(i,q)$ 且 $\forall\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q)$: $\ell(s^{q,\psi}_{A:\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}})=1$) (由引理 15 的 3)) 当且仅当 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):(\forall i\in A:\vec{m}_A[i]\notin\eta_\ell(i,q)$ 且 $\forall\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q):(\ell(y^q_{\bar{A}:\vec{m}_{\bar{A}}})=1$ 或 $\ell(x^{\delta(q,(\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}))}_{\psi})=1$)).

(由引理 15 的 1) 及 2)) 当且仅当 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):(\forall i\in A:\vec{m}_A[i]\notin\eta_\ell(i,q)$ 且 $\forall\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q)$: ($\exists i\in\bar{A}:\ell(y^q_{i:\vec{m}_{\bar{A}}[i]})=1$ 或 $\ell(x^{\delta(q,(\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}))}_{\psi})=1$)).

(由归纳假设) 当且仅当 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):(\forall i\in A:\vec{m}_A[i]\notin\eta_\ell(i,q)$ 且 $\forall\vec{m}_{\bar{A}}\in D_{\bar{A}}(q):\exists i\in\bar{A}:(\ell(y^q_{i:\vec{m}_{\bar{A}}[i]})=1$ 或 $S\dagger\eta_\ell,\delta(q,(\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}))\vDash\psi$)).

(由 ATL 语义) 当且仅当 $S\dagger\eta_\ell,q\vDash\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\psi$.

5) 若 $\varphi=\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi$:

若 $\ell(x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi})=1$, 那么由约束 (34) 得 $\ell(x^q_{\chi})+\ell(r^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi})\geqslant 1$, 因此 $\ell(x^q_{\chi})=1$ 或 $\ell(r^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi})=1$.

若 $\ell(x^q_{\chi})=1$ 或 $\ell(r^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi})=1$, 那么由约束 (32) 及约束 (33) 得 $\ell(x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi})=1$.

以上意味着: $\ell(x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi})=1$ 当且仅当 $\ell(x^q_{\chi})=1$ 或 $\ell(r^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi})=1$, (由引理 15 的 6)) 当且仅当 $\ell(x^q_{\chi})=1$ 或 ($\ell(x^q_{\psi})=1$ 且 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):(\ell(y^q_{A:\vec{m}_A})=0$ 且 $\ell(z^{q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi}_{A:\vec{m}_A})=1)$), (由上述 4 的证明过程) 当且仅当 $\ell(x^q_{\chi})=1$ 或 ($\ell(x^q_{\psi})=1$ 且 $\ell(x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi})=1$), (由归纳假设) 当且仅当 $S\dagger\eta_\ell,q\vDash\chi$ 或 ($S\dagger\eta_\ell,q\vDash\psi$ 且 $S\dagger\eta_\ell,q\vDash\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi$), (由 ATL 语义) 当且仅当 $S\dagger\eta_\ell,q\vDash\chi\vee(\psi\wedge\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi)$, (由命题 13 的 1)) 当且仅当 $S\dagger\eta_\ell,q\vDash\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\psi\mathcal{U}\chi$.

6) 若 $\varphi=\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\psi$:

若 $\ell(x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\psi})=1$, 那么由约束 (35) 得 $\ell(x^q_{\psi})\geqslant 1$, 故有 $\ell(x^q_{\psi})=1$, 并且由约束 (36) 可得 $\sum_{\vec{m}_A\in D_A(q)}\ell(e^{q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\psi}_{A:\vec{m}_A})\geqslant 1$, 因此 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):\ell(e^{q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\psi}_{A:\vec{m}_A})=1$.

若 $\ell(x^q_{\psi})=1$ 且 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):\ell(e^{q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\psi}_{A:\vec{m}_A})=1$, 那么由约束 (37) 得 $\ell(x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\psi})\geqslant 1$, 因此 $\ell(x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\psi})=1$.

以上意味着: $\ell(x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\psi})=1$ 当且仅当 $\ell(x^q_{\psi})=1$ 且 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):\ell(e^{q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\psi}_{A:\vec{m}_A})=1$, (由引理 15 的 5)) 当且仅当 $\ell(x^q_{\psi})=1$ 且 $\exists\vec{m}_A\in D_A(q):(\ell(y^q_{A:\vec{m}_A})=0$ 且 $\ell(z^{q,\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\psi}_{A:\vec{m}_A})=1)$, (由上述 4 的证明过程) 当且仅当 $\ell(x^q_{\psi})=1$ 且 $\ell(x^q_{\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\psi})==1$, (由归纳假设) 当且仅当 $S\dagger\eta_\ell,q\vDash\psi$ 且 $S\dagger\eta_\ell,q\vDash\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\psi$, (由 ATL 语义) 当且仅当 $S\eta_\ell,q\vDash\psi\wedge\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\bigcirc\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\psi$, (由命题 13 的 2)) 当且仅当 $S\dagger\eta_\ell,q\vDash\langle\!\langle A\rangle\!\rangle\Box\psi$.

接下来我们可以证明整数规划 ILP-SWA 的解对应着一个满足协同目标且最大化社会福利的高效社会法则, 这实质上意味着机制 VCG-SLM 的分配函数的计算已被正确地转化为整数规划.

定理 17. 若 ℓ 为 ILP-SWA(Δ) 的一个解, 那么 η_ℓ 是一个 Δ-社会法则, 满足 $S\dagger\eta_\ell,q_s\vDash\varphi^*$ 且最大化 $SW_\Delta(\eta)$.

证明: 若 ℓ 为 ILP-SWA(Δ) 的一个解, 那么约束 (5) 保证每个状态每个 Agent 均至少会有一个被允许的行动, 因此 η_ℓ 是一个 Δ-社会法则; 约束 (38) 要求 $\ell(x^{q_s}_{\varphi^*})=1$, 由引理 16 可以导出 $S\dagger\eta_\ell,q_s\vDash\varphi^*$, 且优化目标函数满足:

$$\sum_{(\varphi_j,c_j)_i\in\widehat{\mathcal{F}}_\Delta}c_j\cdot x^{q_s}_{\varphi_j}=\sum_{i\in\Delta}\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger\eta)=SW_\Delta(\eta).$$

综上所述, η_ℓ 是一个 Δ-社会法则, 满足 $S\dagger\eta_\ell,q_s\vDash\varphi^*$ 且最大化 $SW_\Delta(\eta)$.

基于上述结论, 我们可以提出如下基于整数规划的机制 VCG-SLM-ILP, 并证明其与 VCG-SLM 机制的等价性.

算法 1. FIND-OSL.

输入: 并发博弈结构 $S=\langle k,Q,q_s,\Pi,\pi,\varepsilon,\delta\rangle$, 投标 $\widehat{\mathcal{F}}_1,\ldots,\widehat{\mathcal{F}}_k$, 目标 φ^*, Agent 集合 $\Delta\subseteq[k]$;

1. 生成 ILP-SWA(Δ) 并求其解 ℓ;
2. 令 $\eta_\ell(i,q)=\{a\in\varepsilon_i(q)|\ell(y^q_{i:a})=1\}$;

输出: 选择的社会法则 η_ℓ.

机制 1. VCG-SLM-ILP.

输入: 并发博弈结构 $S=\langle k,Q,q_s,\Pi,\pi,\varepsilon,\delta\rangle$, 投标 $\widehat{\mathcal{F}}_1,\ldots,\widehat{\mathcal{F}}_k$, 目标 φ^*;

1. $\eta^*\leftarrow$ FIND-OSL(Ag);
2. 对于每个 Agent $i\in Ag$:
   - $\eta\leftarrow$ FIND-OSL($Ag\setminus\{i\}$);
   - $t_i\leftarrow\sum_{j\neq i}\sigma(\widehat{\mathcal{F}}_j,S\dagger\eta)-\sum_{j\neq i}\sigma(\widehat{\mathcal{F}}_j,S\dagger\eta^*)$;

输出: 选择的社会法则 η^* 以及对各个 Agent 的支付 $t_1,\ldots,t_k$.

定理 18. 当 $\mathcal{SL}_{S,\varphi}\neq\varnothing$ 且 $\forall i:\mathcal{SL}^{-i}_{S,\varphi}\neq\varnothing$ 时, VCG-SLM-ILP 激励相容且所有的 Agent 参与投标并服从社会法则是一个纳什均衡.

证明: 由定理 17 的结论知 $\eta^*=\arg\max_{\eta\in\mathcal{SL}_{S,\varphi}}\sum_{i=1}^{k}\sigma(\widehat{\mathcal{F}}_i,S\dagger\eta)$, 且对于每个 Agent i, 对其支付 t_i 满足 $t_i=\sum_{j\neq i}\sigma(\hat{F}_j,S\dagger\eta)-\sum_{j\neq i}\sigma(\hat{F}_j,S\dagger\eta^*)=\max_{\eta\in\mathcal{SL}^{-i}_{S,\varphi}}\sum_{j\neq i}\sigma(\widehat{\mathcal{F}}_j,S\dagger\eta)-\sum_{j\neq i}\sigma(\widehat{\mathcal{F}}_j,S\dagger a(\widehat{\mathcal{F}}))$.

故 VCG-SLM-ILP 实质上是 VCG-SLM 的一种基于整数规划的正确实现, 故由定理 2 及定理 3 得, $\mathcal{SL}_{S,\varphi}\neq\varnothing$ 且 $\forall i:\mathcal{SL}^{-i}_{S,\varphi}\neq\varnothing$ 时, VCG-SLM-ILP 激励相容且所有的 Agent 服从社会法则是一个纳什均衡.

以上结论说明, 借助于求解整数规划, VCG-SLM-ILP 是对机制 VCG-SLM 的一种正确的实现方式. 接下来还需进一步探讨的问题是机制 VCG-SLM-ILP 的计算可行性.

定理 19. 生成 ILP-SWA(Δ) 的时间复杂度为 $O(|Q|\cdot kt\cdot l^2)$, 其中 $|Q|$、k、t 分别为给定并发博弈结构的状态数量、Agent 数量及状态转换的数量, l 为 Δ 中所有 Agent 各自的特征集中的所有 ATL 公式的总长度之和.

证明: 由于对于长度为 l 的 ATL 公式 ψ, $cl(\psi)$ 中包含的 ATL 公式的数量为 $O(l)$ [7], 于是可以得到:

$$|cl(\widehat{\mathcal{F}}_\Delta)|=|\bigcup_{i\in\Delta}cl(\widehat{\mathcal{F}}_i)|=|\bigcup_{i\in\Delta}(cl(\varphi^i_1)\cup\ldots\cup cl(\varphi^i_{n_i}))|=|cl(\bigvee_{i\in\Delta}\bigvee_{1\leqslant j\leqslant n_i}\varphi^i_j)|=O(l).$$

故 $cl(\widehat{\mathcal{F}}_\Delta)$ 中形如 p、$\neg\varphi$、$\varphi_1\vee\varphi_2$、$\langle\langle A\rangle\rangle\bigcirc\varphi$、$\langle\langle A\rangle\rangle\Box\varphi$ 及 $\langle\langle A\rangle\rangle\varphi_1\mathcal{U}\varphi_2$ 的公式的数量, 以及涉及的 Agent 联盟的数量均为 $O(l)$. 此外, 根据并发博弈结构的定义, 各状态下联合行动与状态转换一一对应, 即有:

$$\sum_{q\in Q}|D(q)|=t.$$

因此, 对于任意的 $A\subseteq\{1,\ldots,k\}$, 均有 $|D_A(q)|=O(t)$ 成立.

根据 ILP-SWA(Δ) 的定义, 其约束集由分别形如约束 (2)–约束 (38) 构成:

- 形如约束 (2) 限定所有变量 x^q_φ 的取值范围, 其数量为 $|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}}_\Delta)|$.

- 形如约束 (3)–约束 (5) 限定所有变量 $y^q_{i:q}$ 的取值范围, 其数量不超过:

$$2\sum_{q\in Q}\sum_{1\leqslant i\leqslant k}|\varepsilon_i(q)|+k|Q|\leqslant 2\sum_{q\in Q}\Pi_{1\leqslant i\leqslant k}|\varepsilon_i(q)|+k|Q|=2\sum_{q\in Q}|D(q)|+k|Q|=2t+k|Q|.$$

- 形如约束 (6)–约束 (8) 限定所有变量 $y^q_{A:\vec{m}_A}$ 的取值范围, 其数量不超过:

$$2\cdot|Q|\cdot 2|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|\cdot|D_A(q)|+k\cdot|Q|\cdot 2|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|\cdot|D_A(q)|\leqslant 6kt\cdot|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|.$$

- 形如约束 (9)–约束 (12) 限定所有变量 $s^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A,\vec{m}_{\bar{A}}}$ 的取值范围, 其数量不超过 $4t\cdot|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|^2$.
- 形如约束 (13)–约束 (15) 限定所有变量 $z^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A}$ 的取值范围, 其数量不超过:

$$2\cdot|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|^2\cdot t+|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|^2\cdot t=3t\cdot|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|^2.$$

- 形如约束 (16) 和约束 (17) 限定所有变量 x^q_p 的取值范围, 其数量不超过 $|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|$.
- 形如约束 (18) 限定所有变量 $x^q_{\neg\varphi}$ 的取值范围, 其数量不超过 $|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|$.
- 形如约束 (19)–约束 (21) 限定所有变量 $x^q_{\varphi\vee\chi}$ 的取值范围, 其数量不超过 $3\cdot|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|$.
- 形如约束 (22)–约束 (25) 限定所有变量 $e^{q,\varphi}_{A:\vec{m}_A}$ 的取值范围, 其数量不超过 $4t\cdot|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|^2$.
- 形如约束 (26) 和约束 (27) 限定所有变量 $x^q_{\langle\langle A\rangle\rangle\bigcirc\phi}$ 的取值范围, 其数量不超过 $t\cdot|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|+|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|$.
- 形如约束 (28)–约束 (31) 限定所有变量 $r^q_{\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi}$ 的取值范围, 其数量不超过 $3|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|+t|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|$.
- 形如约束 (32)–约束 (34) 限定所有变量 $x^q_{\langle\langle A\rangle\rangle\psi\mathcal{U}\chi}$ 的取值范围, 其数量不超过 $3\cdot|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|$.
- 形如约束 (35)–约束 (37) 限定所有变量 $x^q_{\langle\langle A\rangle\rangle\Box\phi}$ 的取值范围, 其数量不超过 $2|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|+t\cdot|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|$.
- 形如约束 (38) 要求协同目标在初始状态被满足, 其数量仅有 1 个.

综上所述, 由于约束集中的约束由上述各类约束构成, 其数量至多为:

$$11t\cdot|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|^2+(6kt+3t+15)|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|+2t+k|Q|+1\leqslant 39kt\cdot|Q|\cdot|cl(\widehat{\mathcal{F}_\Delta})|^2.$$

因此, 整数规划 ILP-SWA(Δ) 中包含约束的数量为 $O(|Q|\cdot kt\cdot l^2)$. 由于生成每条约束需要单位时间, 生成该整数规划需要的时间也为 $O(|Q|\cdot kt\cdot l^2)$.

根据机制 VCG-SLM-ILP 的定义, 其计算的时间开销主要源于对 FIND-OSL 函数的 $k+1$ 次调用, 而函数 FIND-OSL 的计算开销主要来自 ILP-SWA(Δ) 的生成以及 ILP-SWA(Δ) 的求解. 定理 19 意味着 ILP-SWA(Δ) 的生成所需的时间是问题规模的多项式函数, 此外 ILP-SWA(Δ) 的求解借助于目前已深入大规模工业应用的整数规划求解器, 可在多项式时间内得到精度较高的解, 这意味着函数 FIND-OSL 以及机制 VCG-SLM-ILP 的计算都是现实可行的. 此外, 由于建模为整数规划是进一步寻找具有可证明性能下界保证的近似算法的良好开端, 本文的工作也为后续的近似机制的研究奠定了良好的基础.

3.3 提高不精确分配下机制的激励相容性

值得注意的是, 我们借助于求解器实现的其实是一个与 FIND-OSL 略有区别的算法 (不妨叫做 FIND-OSLX), 其中得到的是整数规划 ILP-SWA (Δ) 的近似解而非精确解.同时, 我们不妨把相应的调用 FIND-OSLX 实现的机制叫做 VCG-SLM-ILPX. 而已有结论表明, 当 VCG 机制实施时, 如果不能精确地得到社会福利最大的分配, 那么机制的激励相容性就可能会受到影响[43]. 该问题在本文的场景中同样存在.

回顾机制激励相容性 (定理 3) 的证明, 我们可以发现, 其关键步骤在于确定下面 “$\leqslant$”成立:

对于任意 Agent $i\in\Delta$,

$$\begin{aligned}u_i(\mathcal{F}_i,(\widehat{\mathcal{F}_i},\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))&=\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger a(\widehat{\mathcal{F}_i},\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))+\sum_{j\in\Delta\backslash\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}_j},S\dagger a(\widehat{\mathcal{F}_i},\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))-\max_{\eta\in\mathcal{SL}^{\Delta\backslash\{i\}}_{S,\varphi}}\sum_{j\in\Delta\backslash\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}_j},S\dagger\eta)-\sigma(\mathcal{F}_i,S)\\&\leqslant\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger a(\mathcal{F}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))+\sum_{j\in\Delta\backslash\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}_j},S\dagger a(\mathcal{F}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))-\max_{\eta\in\mathcal{SL}^{\Delta\backslash\{i\}}_{S,\varphi}}\sum_{j\in\Delta\backslash\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}_j},S\dagger\eta)-\sigma(\mathcal{F}_i,S)=u_i(\mathcal{F}_i,(\mathcal{F}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})).\end{aligned}$$

进而可以证明对于任意 Agent $i\in\Delta$, 其非诚实投标的效用 $u_i(\mathcal{F}_i,(\widehat{\mathcal{F}_i},\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))$ 不超过其诚实投标的效用 $u_i(\mathcal{F}_i,(\mathcal{F}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))$, 由此说明诚实投标是任意 Agent 的占优策略.

实际上任意 Agent i 仅能改变 $a(\widehat{\mathcal{F}_i},\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})$ 中自己的投标 $\widehat{\mathcal{F}_i}$, 从而影响以下两项的取值:

$$\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger a(\widehat{\mathcal{F}_i},\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))+\sum_{j\in\Delta\backslash\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}_j},S\dagger a(\widehat{\mathcal{F}_i},\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})).$$

不难发现这实质上是选择社会法则 $a(\widehat{\mathcal{F}_i},\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})$ 时, 一组特征集为 $(\mathcal{F}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})$ 的 Agent 的社会福利. 而根据定义, $a(\widehat{\mathcal{F}_i},\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})$ 是一个使一组特征集为 $(\widehat{\mathcal{F}_i},\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})$ 的 Agent 社会福利最大的社会法则. 因此当 Agent i 选择 $\widehat{\mathcal{F}_i}=\mathcal{F}_i$ 时, 上

述式子会取得最大值. 现在的问题在于, 我们不能期待在有意义的时间内精确地算得 $a(\widehat{\mathcal{F}}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})$, 而仅能得到一个社会福利接近的社会法则 $a'(\widehat{\mathcal{F}}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})$, 因此以下不等式并不一定成立:

$$\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger a'(\widehat{\mathcal{F}}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))+\sum_{j\in\Delta\backslash\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}}_j,S\dagger a'(\widehat{\mathcal{F}}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))\leqslant\sigma(\mathcal{F}_i,S\dagger a'(\mathcal{F}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))+\sum_{j\in\Delta\backslash\{i\}}\sigma(\widehat{\mathcal{F}}_j,S\dagger a'(\widehat{\mathcal{F}}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i})),$$

因而不一定能得到 $u_i(\mathcal{F}_i,(\widehat{\mathcal{F}}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))\leqslant u_i(\mathcal{F}_i,(\mathcal{F}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))$.

即有可能存在某个 $\mathcal{F}_i'$, 满足 $u_i(\mathcal{F}_i,(\mathcal{F}_i',\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))>u_i(\mathcal{F}_i,(\mathcal{F}_i,\widehat{\mathcal{F}}_{\Delta-i}))$.

此处可见如下两项事实.

1) VCG-SLM-ILPX 不满足激励相容性. 诚实投标并不是 Agent 的占优策略. 任意 Agent i 存在策略性地投标 $\mathcal{F}_i'$ 从而获得更高的效用的可能.

2) 对任意 Agent i 而言, 是否选择诚实投标取决于能否在有意义的时间内算得一个上述 $\mathcal{F}_i'$. 如果不能, 那么由于诚实投标能为 Agent 带来接近最优值的效用, 仍是 Agent 的合理选择.

简而言之, VCG-SLM-ILPX 并不是严格的激励相容机制. 它虽然保持了一定的激励诚实投标的属性, 但是如果 Agent 能找出优于诚实投标的策略, 其激励相容性就会遭到一定程度地削弱. 针对此问题, 一方面我们可以试图进一步证明 Agent 计算上述更优投标的问题是难计算问题 (由于本文利用第三方的求解器来计算整数规划, 隐藏了实现了细节, 证明该结论存在一定的困难); 另一方面, 我们可基于 Nisan 等人[19]提出的再次机会机制 (second chance mechanism), 提高不精确分配下 VCG 机制的激励相容性. 具体做法是允许任意 Agent i 在规定的时间 T 内随投标上交一个函数 $p_i(\cdot)$. 对于任意的投标向量 $\widehat{\mathcal{F}}=\langle\widehat{\mathcal{F}}_1,\ldots,\widehat{\mathcal{F}}_k\rangle$, $p_i(\widehat{\mathcal{F}})=\widehat{\mathcal{F}}'$, 其中 $\widehat{\mathcal{F}}'$ 是一个该 Agent 找出的会带来更大社会福利的投标向量; 在此基础上可将 VCG-SLM-ILPX 机制扩充成如机制 2.

机制 2. VCG-SLM-ILPX-SC.

输入: 并发博弈结构 $S=\langle k,Q,q_s,\Pi,\pi,\varepsilon,\delta\rangle$, 投标 $\widehat{\mathcal{F}}_1,\ldots,\widehat{\mathcal{F}}_k$, 函数 $p_1,\ldots,p_k$, 目标 φ^*;

1. $\eta_0^*\leftarrow$ FIND-OSLX(Ag , $\widehat{\mathcal{F}}$);

  对每个 Agent $i\in Ag$: $\eta_i^*\leftarrow$ FIND-OSLX(Ag , $p_i(\widehat{\mathcal{F}})$);

  $\eta^*\leftarrow\eta_0^*,\ldots,\eta_k^*$ 中对 $\widehat{\mathcal{F}}$ 具有最大的社会福利的社会法则;

2. 对于每个 Agent $i\in Ag$:

- $\eta_0\leftarrow$ FIND-OSLX($Ag\backslash\{i\}$, $\widehat{\mathcal{F}}$);
- 对每个 Agent $j\in Ag\backslash\{i\}$: $\eta_j\leftarrow$ FIND-OSLX($Ag\backslash\{i\}$, $p_i(\widehat{\mathcal{F}})$);
- $\eta\leftarrow\eta_0,\ldots,\eta_{i-1},\eta_{i+1},\ldots,\eta_k$ 中对 $\widehat{\mathcal{F}}$ 具有最大的社会福利的社会法则;
- $t_i\leftarrow\sum_{j\neq i}\sigma(\widehat{\mathcal{F}}_j,S\dagger\eta)-\sum_{j\neq i}\sigma(\widehat{\mathcal{F}}_j,S\dagger\eta^*)$;

输出: 选择的社会法则 η^* 以及对各个 Agent 的支付 $t_1,\ldots,t_k$.

VCG-SLM-ILPX-SC 机制的核心思想是, 各个 Agent 可在规定的时间内将自己能找到的社会福利更高的非诚实投标告知机制. 机制将据此优化社会法则的选择并确定支付. 基于 Nisan 等人[19]的结论, 该机制能得到社会福利接近最优的社会法则, 且在一定程度上克服不精确分配的影响, 激励 Agent 诚实投标.

4 结论与展望

在信息不完全的策略环境下可靠地合成社会法则, 并实现 Agent 对社会法则的自觉服从是社会法则合成领域亟待解决的重要问题. 本文在算法机制设计的框架下为上述问题寻求系统的解决方案, 发现策略环境下的社会法则合成问题可被建模为一类特殊的以社会福利最大化为目标的公共货物拍卖问题, 上述意义的“可靠性”与“自觉服从性”可分别由拍卖机制的激励相容性和个体理性保证; 社会法则即公共货物, Agent 对其估值不具有非负性. 这意味着著名的 VCG 机制可被考虑采用, 但在非负估值环境中能实现个体理性的 Clarke 基准规则似乎并不直接

适用于当前问题的支付函数设计. 本文证明任何不区分交互互模拟等价结构的估值函数均可被等价地表示为特征集, 从而为通常情况下的结构估值函数找出了一种具有良好理论基础的紧凑表示方法, 使 Agent 在投标中能清晰、准确地表述自己的结构估值函数; 进而以 VCG 机制为基础设计了一种社会法则合成机制 VCG-SLM, 把社会法则实现为一种权利与义务的综合体, Agent 想要享受作为社会成员的权利就必须服从社会法则的约束, 并进一步证明了基于 Clarke 基准规则可设计一种使所有 Agent 选择参与投标、承诺服从社会法则的约束并诚实投标是纳什均衡的支付规则, 这意味着没有 Agent 会单方面地脱离社会法则的约束; 本文证明了上述机制的计算是 FP^{NP}-完全的, 这意味着不能期望找到多项式时间复杂度的有效算法.本文从而将分配与支付的计算转化为整数规划来实现, 基于 ATL 的语法及语义系统地导出了整数规划的优化目标函数及约束集, 严格地证明了其正确性, 并证明了上述到整数规划的转化仅需多项式时间. 由于整数规划是一类已被深入研究的难计算问题, 已有许多成熟的工业级整数规划求解器, 这实际上为上述机制的计算问题设计了一种现实可行的算法. 同时考虑到不精确的分配函数会损害 VCG 机制的激励相容性, 本文基于再次机会机制实现了一种克服该问题的方法.

本文的工作可看作是将算法机制设计的理论与技术应用于基于 ATL 逻辑的社会法则, 解决其中亟待解决的问题的初步的尝试. 同时我们发现, 社会法则合成所带来的公共货物拍卖问题为算法机制设计的研究提供了新的场景, 带来了新的挑战. 基于本文的框架, 主要可进行如下 4 方面进一步的工作: 一是, 探索 Clarke 基准规则之外的支付函数设置方式, 使所有的 Agent 选择参与机制满足某种 (不限于纳什均衡) 的博弈解概念, 从而实现个体理性并展现出不同的计算属性; 二是寻找保持激励相容和个体理性的优良属性且具有可证明性能下界的近似机制, 寻求机制计算方面更深入的结果, 并在此基础上尝试证明 Agent 操纵机制是难计算问题, 从而从另一角度确立本文提出的非精确分配 VCG 机制的激励相容性; 三是探讨优化目标或约束与支付相关的场景, 这将紧密联系于最优机制设计的工作, 是算法机制设计领域当前研究的重点与热点; 最后, 探讨无支付机制在社会法则领域的理论与应用, 从而使机制适用于那些不能包含支付的场景, 大大拓宽机制的适应范围.

References:

[1] Shoham Y, Tennenholtz M. On the synthesis of useful social laws for artificial agent societies. In: Proc. of the 10th National Conf. on Artificial Intelligence. San Jose: AAAI Press, 1992. 276–281.

[2] Shoham Y, Tennenholtz M. On social laws for artificial agent societies: Off-line design. In: Agre PE, Rosenschein SJ, eds. Computational Theories of Interaction and Agency. Cambridge: MIT Press, 1996. 597–618.

[3] van der Hoek W, Roberts M, Wooldridge M. Social laws in alternating time: Effectiveness, feasibility, and synthesis. Synthese, 2007, 156(1): 1–19. [doi: 10.1007/s11229-006-9072-6]

[4] Wu J, Wang CJ, Xie JY. A framework for coalitional normative systems. In: Proc. of the 10th Int'l Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems. Taipei: Int'l Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2011. 259–266.

[5] Ågotnes T, van der Hoek W, Wooldridge M. Conservative social laws. In: Proc. of the 20th European Conf. on Artificial Intelligence. Montpellier: IOS Press, 2012. 49–54.

[6] Alur R, Henzinger TA, Kupferman O. Alternating-time temporal logic. In: Proc. of the 38th Annual Symp. on Foundations of Computer Science. Washington: IEEE, 1997. 100–109.

[7] Alur R, Henzinger TA, Kupferman O. Alternating-time temporal logic. Journal of the ACM, 2002, 49(5): 672–713. [doi: 10.1145/585265.585270]

[8] Ågotnes T, van der Hoek W, Wooldridge M. Normative system games. In: Proc. of the 6th Int'l Conf. on Autonomous Agents and Multi-agent Systems. Honolulu: ACM, 2007. 129. [doi: 10.1145/1329125.1329284]

[9] Fitoussi D, Tennenholtz M. Minimal social laws. In: Proc. of the 15th National Conf. on Artificial Intelligence and the 10th Innovative Applications of Artificial Intelligence Conf. Wisconsin: AAAI Press, 1998. 26–31.

[10] Fitoussi D, Tennenholtz M. Choosing social laws for multi-agent systems: Minimality and simplicity. Artificial Intelligence, 2000, 119(1–2): 61–101. [doi: 10.1016/S0004-3702(00)00006-0]

[11] Nisan N, Ronen A. Algorithmic mechanism design. In: Proc. of the 31st Annual ACM Symp. on Theory of Computing. Atlanta: ACM, 1999. 129–140. [doi: 10.1145/301250.301287]

[12] Nisan N, Ronen A. Algorithmic mechanism design. Games and Economic Behavior, 2001, 35(1–2): 166–196. [doi: 10.1006/game.1999.0790]

[13] Nisan N, Roughgarden T, Tardos É, Vazirani VV. Algorithmic Game Theory. New York: Cambridge University Press, 2007.

[14] Alur R, Henzinger TA, Kupferman O, Vardi MY. Alternating refinement relations. In: Proc. of the 9th Int'l Conf. on Concurrency Theory. Nice: Springer, 1998. 163–178. [doi: 10.1007/BFb0055622]
[15] van der Hoek W, Ruan J, Wooldridge M. Strategy logics and the game description language. In: Proc. of the 2007 Workshop on Logic Rationality & Interaction. 2007.
[16] Clarke EH. Multipart pricing of public goods. Public Choice, 1971, 11(1): 17–33. [doi: 10.1007/BF01726210]
[17] Vickrey W. Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. The Journal of Finance, 1961, 16(1): 8–37. [doi: 10.1111/j.1540-6261.1961.tb02789.x]
[18] Groves T. Incentives in teams. Econometrica, 1973, 41(4): 617–631. [doi: 10.2307/1914085]
[19] Nisan N, Ronen A. Computationally feasible VCG mechanisms. Journal of Artificial Intelligence Research, 2007, 29: 19–47. [doi: 10.1613/jair.2046]
[20] Emerson EA. Temporal and modal logic. In: van Leeuwen J, ed. Handbook of Theoretical Computer Science (Vol. B): Formal Models and Semantics. Cambridge: MIT Press, 1991. 995–1072.
[21] Ågotnes T, van der Hoek W, Rodríguez-Aguilar JA, Sierra C, Wooldridge M. On the logic of normative systems. In: Proc. of the 20th Int'l Joint Conf. on Artifical Intelligence. Hyderabad: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2007. 1175–1180.
[22] Ågotnes T, van der Hoek W, Wooldridge M. Robust normative systems. In: Proc. of the 7th Int'l Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems. Estoril: Int'l Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2008. 747–754.
[23] Ågotnes T, van der Hoek W, Tennenholtz M, Wooldridge M. Power in normative systems. In: Proc. of the 8th Int'l Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems. Budapest: Int'l Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2009. 145–152.
[24] Ågotnes T, Wooldridge M. Optimal social laws. In: Proc. of the 9th Int'l Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems. Toronto: Int'l Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2010. 667–674.
[25] van der Hoek W, Wooldridge M. Cooperation, knowledge, and time: Alternating-time temporal epistemic logic and its applications. Studia Logica, 2003, 75(1): 125–157. [doi: 10.1023/A:1026185103185]
[26] van der Hoek W, Wooldridge M. On the logic of cooperation and propositional control. Artificial Intelligence, 2005, 164(1–2): 81–119. [doi: 10.1016/j.artint.2005.01.003]
[27] Wang CJ, Wu J, Wang ZC, Xie JY. Strategic ability updating in concurrent games by coalitional commitment. IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 2011, 41(6): 1442–1457. [doi: 10.1109/TSMCB.2011.2146248]
[28] Wang CJ, Wu J, Zhang L, Xie JY. On the limitation of the power of coalitional normative systems. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2012, 23(7): 1796−1804 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4135.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2012.04135]
[29] Binmore K. Game Theory and the Social Contract, Vol. 1: Playing Fair. Cambridge: MIT Press, 1994.
[30] Binmore K. Game Theory and the Social Contract, Vol. 2: Just Playing, Cambridge: MIT Press, 1998.
[31] Bulling N, Dastani M. Verifying normative behaviour via normative mechanism design. In: Proc. of the 22nd Int'l Joint Conf. on Artificial Intelligence. Barcelona: AAAI Press, 2011. 103–108.
[32] Bulling N, Dastani M. Norm-based mechanism design. Artificial Intelligence, 2016, 239: 97–142. [doi: 10.1016/j.artint.2016.07.001]
[33] Dughmi S, Hartline J, Kleinberg RD, Niazadeh R. Bernoulli factories and black-box reductions in mechanism design. Journal of the ACM, 2021, 68(2): 1–30. [doi: 10.1145/3440988]
[34] Archer A, Tardos É. Frugal path mechanisms. ACM Trans. on Algorithms, 2007, 3(1): 3. [doi: 10.1145/1186810.1186813]
[35] Elkind E, Sahai A, Steiglitz K. Frugality in path auctions. In: Proc. of the 15th Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms. New Orleans: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004. 701–709.
[36] Zhang L, Chen HB, Wu J, Wang CJ, Xie JY. False-name-proof mechanisms for path auctions in social networks. In: Proc. of the 22nd European Conf. on Artificial Intelligence. The Hague: IOS Press, 2016. 1485–1492. [doi: 10.3233/978-1-61499-672-9-1485]
[37] Cheng H, Zhang WT, Zhang Y, Zhang L, Wu J, Wang CJ. Fast core pricing algorithms for path auction. Autonomous Agents and Multi-agent Systems, 2020, 34(1): 18. [doi: 10.1007/s10458-019-09440-y]
[38] Talwar K. The price of truth: Frugality in truthful mechanisms. In: Proc. of the 20th Annual Symp. on Theoretical Aspects of Computer Science. Berlin: Springer, 2003. 608–619. [doi: 10.1007/3-540-36494-3_53]
[39] Bikhchandani S, de Vries S, Schummer J, Vohra RV. Linear programming and vickrey auctions. IMA Volumes in Mathematics and its Applications, 2001, 127: 75–116.
[40] Garg R, Kumar V, Rudra A, Verma A. Coalitional games on graphs: Core structures, substitutes and frugality. In: Proc. of the 4th ACM Conf. on Electronic Commerce. New York: ACM, 2003. 248–249. [doi: 10.1145/779928.779982]
[41] Tang PZ. Computational economics and the optimal mechanism design problem. Communications of CCF, 2013, 9(10): 18–23 (in Chinese with English abstract).

[42] Sandholm T. Algorithm for optimal winner determination in combinatorial auctions. Artificial Intelligence, 2002, 135(1–2): 1–54. [doi: 10.1016/S0004-3702(01)00159-X]
[43] Dobzinski S, Nisan N. Limitations of VCG-based mechanisms. In: Proc. of the 39th Annual ACM Symp. on Theory of Computing. San Diego: ACM, 2007. 338–344. [doi: 10.1145/1250790.1250842]
[44] Myerson RB. Optimal auction design. Mathematics of Operations Research, 1981, 6(1): 58–73. [doi: 10.1287/moor.6.1.58]
[45] Hartline J. Lectures on optimal mechanism design. 2006. http://users.eecs.northwestern.edu/~hartline/omd.pdf
[46] Wu J, Qiao Y, Zhang L, Wang CJ, Liu ML. A multi-unit profit competitive mechanism for cellular traffic offloading. In: Proc. of the 34th AAAI Conf. on Artificial Intelligence. Palo Alto: AAAI Press, 2020. 2294–2301. [doi: 10.1609/aaai.v34i02.5607]
[47] Wu J, Zhang L, Wang CJ, Xie JY. Synthesizing optimal social laws for strategical agents via bayesian mechanism design. In: Proc. of the 16th Int'l Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems. São Paulo: Int'l Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2017. 1214–1222.
[48] Wu J, Zhang L, Wang CJ, Xie JY. Mechanism design for social law synthesis under incomplete information. In: Proc. of the 16th Int'l Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems. São Paulo: Int'l Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2017. 1757–1759.
[49] Papadimitriou CH. Computational Complexity. Boston: Addison-Wesley, 1994.

附中文参考文献:

[28] 王崇骏, 吴骏, 张雷, 谢俊元. 联盟规范系统及其规范能力极限. 软件学报, 2012, 23(7): 1796–1804. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4135.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2012.04135]
[41] 唐平中. 计算经济学与最优机制设计问题. 中国计算机学会通讯, 2013, 9(10): 18–23.

吴骏(1981－), 男, 博士, 讲师, 主要研究领域为算法机制设计, 多智能体系统.

王崇骏(1976－), 男, 博士, 教授, CCF 高级会员, 主要研究领域为多智能体系统, 智能信息处理, 机器学习.

曹杰(1969－), 男, 博士, 教授, CCF 专业会员, 主要研究领域为商务智能, 数据挖掘基础理论, 电子商务平台支撑技术.

谢俊元(1961－), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为人工智能.