PLN 网络吸引区域的定量分析*

张　铃
(安徽大学计算机系,合肥 230039)
(浙江大学计算机系,杭州 310027)

张　钹
(清华大学计算机系,北京 100084)
(清华大学智能技术与系统实验室,北京 100084)

摘要　本文证明在PLN网络中适当给定广义A—学习律,可使网络满足如下条件:(1)所有训练样本都是稳定状态;(2)每个稳定状态具有最大的吸引域;(3)具有很快的收敛速度.由此可见,将这种PLN网络作为联想记忆器是很理想的.

关键词　PLN网络,训练样本,稳定状态,吸引域.

将神经元网络作为联想记忆器时,网络的如下3项性质最为重要:(1)使所有训练样本都成为稳定状态;(2)使每个样本有尽可能大的吸引区域;(3)有较快的收敛速度.

在文献[1—5]中,我们曾系统地讨论过概率逻辑神经网络(PLN网络)的主要性质.

本文将证明在PLN网络中只要适当选取广义A—学习律能使网络很好地满足上述3个性质.在这个意义下,用PLN网络作联想记忆器是比较理想的.

下面先简单介绍一下PLN网络的广义A—学习律.

1　PLN 网络及其学习律

1.1　PLN 元件模型

设元件A有n个输入$x_1,\cdots,x_n$,简记为向量形式$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,一个输出y,分别取值于$\{0,1\}^n$和$\{0,1\}$.y与x的对应关系记为$y=f(x)$.

假定:(1)A可实现$\{0,1\}^n\to\{0,1\}$的一切对应关系.

(2)关系f,预先未确定,f是在记忆、学习过程中逐步被(部分)确定.

广义A—学习律

设元件输入的定义域为I,值域为O.

令:$W=I\times O$,为训练样本空间.$r\in W$,即$r=(x,y)$,$x\in I$,$y\in O$.

设$K\subseteq W$,若满足:$\forall\ r^1=(x^1,y^1),r^2=(x^2,y^2)\in W$且$x^1=x^2$则有$y^1=y^2$,称$K$是相容训练样本集.

称PLN元件A是经训练样本集K训练过的,是指对应关系f被定义如下.

---

*本文1994—03—04收到,1994—04—19定稿

本研究得到国家攀登计划及863高科技的支持.作者张铃,57岁,教授,主要研究领域为数学,人工智能.张钹,59岁,教授,博士导师,主要研究领域为计算机应用,人工智能.

本文通讯联系人:张钹,北京100084,清华大学计算机系

$$y=f(x)=\begin{cases}y^0 & \text{if } \exists\ (x,y^0)\in K\\ p(x,K) & \text{else}\end{cases} \tag{1}$$

其中 $p(x,K)$ 是与 x,K 有关的概率分布函数(具体定义见下面).

1.2 PLN 网络

由有限个 PLN 元件组成的网络称为 PLN 网络,并假定网络是同步运行的,由某一时间钟控制,时间只取离散值,不妨设时间取 0,1,2,….

设 PLN 网络 N 由 n 个 PLN 元件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 组成,设元件 A_i 的输入定义域为 $I(i)$,网络总输入定义域 $I=\bigcup I(i)$,A_i 的输入、输出的对应关系为 $f_i(x)$.

若网络在 t 时刻的状态为 $x(t)$,则在 $t+1$ 时刻元件 A_i 的输出 $y_i(t+1)=f_i(x(t))$.

设 $s\in I$ 是一状态,s 对应于 $I(i)$ 中分量构成的子向量记为 $s(I(i))$,称为 s 在 $I(i)$ 上的投影.

同样可定义集合对 $I(i)$ 上的投影,如

$$K(I(i))=\{r(I(i))\,|\,r\in K\}$$

仍以 I 表网络总输入定义域,O 为网络总输出的值域,训练样本空间定义为 $W=I*O$.

连接结构

自反馈 PLN 网络 N 的连接结构可用如下符号描述.若 A_j 的输出 y_j 反馈到输入的某一分量 x_α,则用有序指标对 (α,j) 表示.

令
$$H=\{(\alpha,j)\,|\,x_\alpha\in I,y_j\in O \text{ 且 } x_\alpha(t)=y_j(t),\ \text{当 } t\geqslant 1\}$$

显然,网络 N 的结构由 $H,I(i),i=1,2,\cdots,n$ 所完全确定,有时简记为 $N=N(H,I)$.

定义 1. 训练样本集 K 与 $N(H,I)$ 是一致的 $\leftrightarrow\forall\ r=(x^0,y^0)\in K,(i,j)\in H$ 有 $x_i^0=y_j^0$ 成立.

由[1]知当训练样本集 K 与 $N(H,I)$ 一致时,其中每个训练样本均是 N 的稳定状态.

1.3 广义 A—学习律

本节对上节(1)式 $f(\cdot)$ 进一步具体化.

设训练样本集 $K=\{r^1,r^2,\cdots,r^m\}$

令
$$K^0(i)=\{r^j\,|\,r^j(y_i)=0,r^j\in K\} \tag{2}$$
$$K^1(i)=\{r^j\,|\,r^j(y_i)=1,r^j\in K\}$$

令 $H_i(x,y)$ 表向量 x,y 在 $I(i)$ 上投影的海明距离.

定义向量 x 到集合 B 的距离为

$$\rho_i(x,B)=\min_{r\in B}H_i(x,r) \tag{3}$$

令 $f:[0,1]\to[0,1]$ 的非减函数且 $f(0)=0,f(1)=1$,

作
$$p_i:I\to[0,1]$$
$$p_i(x)=f\left(\frac{\rho_i(x,K^0(i))}{\rho_i(x,K^0(i))+\rho_i(x,K^1(i))}\right),\qquad x\in I \tag{4}$$

特例取
$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{(2t)^k}{2}, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{2-(2(1-t))^k}{2}, & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases} \tag{5}$$

定义 2. 元件 A_i 当输入为 x 时,以概率 $p_i(x)$ 输出 1,以概率 $(1-p_i(x))$ 输出 0.

对每个元件 A_i 都定义了上述的输出概率，则称对网络 N，定义了一个广义 A—学习律.

2　样本的吸引区域

任取 r^α，令 $$D(\alpha,i)=K^u(I(i)),u=\overline{r^\alpha(y_i)}$$
其中 $u=\overline{r^\alpha(y_i)}$ 表示 $r^\alpha(y_i)$ 的补(否定).

$D(\alpha,i)$ 表示训练样本 K 中，其 $r(y_i)$ 分量与 $r^\alpha(y_i)$ 不同的样本在 $I(i)$ 上的投影的集合.

定义. $$d(\alpha,i)=\rho_i(r^\alpha,D(\alpha,i)) \tag{6}$$

由(6)式知，r^α 吸引区的半径 $<\dfrac{d(\alpha,i)}{2}$.

令 $$E(r^\alpha)=\{x\mid\forall\, i,H_i(x,r^\alpha)<\frac{d(\alpha,i)}{2}\} \tag{7}$$

下面证明，$E(r^\alpha)$ 是 r^α 的吸引区域.

定理 1. 在(5)式中取充分大 k，以此定义广义 A—学习律的 PLN 网络，对其相容一致的训练样本集 K 中每个 r^α，$E(r^\alpha)$ 是 r^α 的吸引区域.

证明：设 $x\in E(r^\alpha)$

为书写方便，约定将 $d(\alpha,i)$，$\rho_i(x,K^0(i))$，$\rho_i(x,K^1(i))$，$\rho_i(x,r^\alpha)$ 分别记为 d,ρ^0,ρ^1,ρ.

任取 r^α，不妨设 $r^\alpha=(1,1,\cdots,1)$.

由定义得，$\rho^1\leqslant\rho$，又由 $\rho^0+\rho^1\geqslant d$ 及 $\rho<\dfrac{d}{2}$，

故有 $\rho^0\geqslant d-\rho^1\geqslant d-\rho$.

由 $\dfrac{d-\rho}{d}>\dfrac{1}{2}$ 及(5)式知，令 $t=\dfrac{d-\rho}{d}$ 时，t 对应的 $f(t)=\dfrac{2-(2(1-t))^k}{2}$.

因为当 $k\to\infty$ 有 $(2(1-t))^k\to0$，故存在 k 充分大时使
$$\frac{(2(1-t))^{k-1}}{2}<\frac{\rho}{n} \tag{8}$$

将(8)式简化得 $$\frac{n}{d}(\frac{2\rho}{d})^{k-2}\leqslant1$$

令 $\alpha=\dfrac{n}{d}$，$\beta=\dfrac{d-1}{d}$，有 $$\frac{2\rho}{d}\leqslant\frac{d-1}{d}=\beta$$

取 $\dfrac{n}{d}(\dfrac{d-1}{d})^{k-2}\leqslant1$，即 $$\alpha\beta^{k-2}\leqslant1 \tag{9}$$

由(9)取 k 下界为：$$k>\frac{|\ln\alpha|}{|\ln\beta|}+2 \tag{10}$$

故有 $$k\sim O(\ln n).$$

又由 $f(\cdot)$ 是 t 的单调上升函数，故有
$$f(x)=\frac{2-(2(1-\frac{\rho^0}{\rho^0+\rho^1}))^k}{2}\geqslant\frac{2-(2(1-\frac{d-\rho}{d}))^k}{2}\geqslant\frac{2-(\frac{d-1}{d})^k}{2}>\frac{n-\rho\beta}{n} \tag{11}$$

最后的不等式，由(9)式得.

由(11)式得，当 $x\in E(r^\alpha)$，输入 x 时，A_i 的输出是 $r^\alpha(y_i)$ 的概率 $>\dfrac{n-\rho\beta}{n}$.

对每个 A_i 都进行上述讨论(不妨设 $d(\alpha,i)$ 均相同)，得到网络 n 个元件的输出之和的均

值$>n(\frac{n-\rho\beta}{n})=n-\rho\beta$. 换句话说，其输出与 r^a 输出的海明距离$<\rho\beta$.

进行 j 次叠代，则输出与 r^a 输出的海明距离小于 $\rho\beta^j$，令 $j\to\infty$，得 $\rho\beta^j\to 0$，即 x 将单调收敛于 r^a，即得 $E(r^a)$是 r^a 的吸引区域. 证毕.

应该指出，以上是以输出的均值进行分析，严格地说，必须以输出的概率分布进行分析，好在根据概率论中心极限定理，当 n 充分大时，其和的均值的分布将渐近于正态分布. 故按均值进行分析，犯错误的概率可以任意小. 故上面的结论在统计意义下是成立的.

推论. $E(r^a)$是 r^a 的最大吸引区域.

证明：任取 $x\notin E(r^a)$，不妨设 $\rho_1(x,r^a)\geqslant\frac{d(\alpha,1)}{2}$，于是存在 $r^1\in K$，$r^1(y_1)\neq r^a(y_1)$，且 $\rho_1(x,r^1)\leqslant\rho_1(x,r^a)$，则按(4)和(5)式可得 A_1 将以更大的概率输出 $r^1(y_1)(\neq r^a(y_1))$，故 x 不属 r^a 的吸引区域，即得 $E(r^a)$是 r^a 的最大吸引区域. 证毕.

3　收敛速度的估计

本节讨论在样本吸引区内的点收敛的步长.

设 $x\in E(r^a)$，当输入 x 时，A_i 的第 1 轮输出 $y_i(1)$不为 $r^a(y_i)$的概率为 p_1，于是由(11)式得

$$p_1\leqslant\frac{1}{2}(\frac{2\rho}{d})^k\leqslant\frac{1}{2}(\frac{d-1}{d})^k$$

再由(9)式得

$$\frac{2np_1}{d}\leqslant\frac{n}{d}(\frac{d-1}{d})^k\leqslant\beta^2 \tag{12}$$

设 A_i 的第 j 轮输出 $y_i(j)$(即当输入为 $y(j-1)$时)不为 $r^a(y_i)$的概率为 p_j，用归纳法及(12)式，易得

$$\frac{2np_j}{d}\leqslant\beta^{\frac{k^j-1}{k-1}+1} \tag{13}$$

对每个 A_i 均进行上述讨论，令 A_i 对应的 p_j 为 $p_j(i)$，当输入 x 时网络第 j 轮输出 $y(j)$ 与 r^a 的输出相同的概率 p 满足：

$$p\geqslant\prod_{i=1}^{n}(1-p_j(i))\geqslant 1-n\,\overline{p_j} \tag{14}$$

$\overline{p_j}$为 $p_j(i)$之和的均值.

由(14)式知当 $j\to\infty$，$\overline{p_j}\to 0$，故对任给 $\varepsilon>0$，存在 j_0，当 $j\geqslant j_0$ 时有$(1-n\,\overline{p_j})>1-\varepsilon$.

对$\overline{p_j}$也利用(13)式，由(13)式直接可得：

$$n\,\overline{p_j}\leqslant\frac{d}{2}\beta^{\frac{k^j-1}{k-1}+1}<\varepsilon$$

故得

$$k^j\geqslant\frac{k^j-1}{k-1}+1\geqslant\frac{|\ln\varepsilon_1|}{|\ln\beta|},\varepsilon_1=\frac{2\varepsilon}{d}.$$

最后得

$$j>\frac{1}{\ln k}[\ln|\ln\varepsilon_1|-\ln|\ln\beta|]$$

即

$$j\sim O(\ln|\ln\varepsilon|).$$

由上面分析得

定理 2. 在定理 1 的条件下，当 $x\in E(r^a)$，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $j_0(j_0\sim O(\ln|\ln\varepsilon|))$当 x 叠代$\geqslant j_0$ 步后，将以大于$(1-\varepsilon)$的概率收敛于 r^a.

由于 $j_0 \sim O(\ln|\ln\epsilon|)$ 故当 $x \in E(r^a)$,其收敛速度是非常快的(双重对数!).

4 结 论

从上面分析可知,当我们采用(3)、(4)、(5)式函数定义 PLN 网络的广义 A—学习律时,取参数 $k > \frac{|\ln\alpha|}{|\ln\beta|} + 2$,当训练样本集 K 与网络 N 是相容一致时,则网络 N 具有:(1)每个训练本样均是稳定状态;(2)每个训练样本 r^a 都具有最大吸引区域 $E(r^a)$;(3)$E(r^a)$ 内的状态运行 j 步之后 $j \sim O(\ln|\ln\epsilon|)$,将以大于 $(1-\epsilon)$ 概率收敛于 r^a.

由此可知,利用广义 A—学习律的 PLN 网络作为联想记忆器,是很理想的.

计算机模拟结果[6]也证明以上理论推导的结果是正确的.

参考文献

1 张钹,张铃.概率逻辑神经元网络收敛性的分析.计算机学报,1993,**16**(1):1—12.

2 张钹,张铃.单层反馈 PLN 网络的识别复杂性.计算机学报,1993,**16**(5):321—326.

3 张钹,张铃.概率逻辑神经元网络的记忆容量.计算机学报,1993,**16**(11):807—813.

4 张铃,张钹.论概率逻辑神经元网络(Ⅰ)—Aleksander 算法性质.模式识别与人工智能,1992,**5**(2):90—96.

5 Zhang Bo, Zhang Ling, Zhang Huai. A quantitative analysis of the behaviors of the PLN network. Neural Networks, 1992,**5**(4):639—644.

6 张钹,张铃.PLN 网络的改进及其应用.软件学报,1994,**5**(3):1—11.

THE QUANTITATIVE ANALYSIS OF THE ATTRACTIVE REGION OF THE PLN NETWORK

Zhang Ling

(*Department of Computer Science*, *Anhui University*, *Hefei* 230039)

(*Department of Computer Science*, *Zhejiang University*, *Hangzhou* 310027)

Zhang Bo

(*Department of Computer Science*, *Tsinghua University*, *Beijing* 100084)

(*Laboratory of Intelligent Technology and Systems*, *Tsinghua University*, *Beijing* 100084)

Abstract This paper shows that when a generalized A—learning rule of a PLN net is given properly, the net can satisfy the following conditions. (1) All training samples are its stable states. (2) Each stable state has a maximal attractive region. (3) The net has very fast convergence speed. Therefore, as an associative memory the PLN network is an ideal one.

Key words PLN network, training sample, stable state, attractive region.