软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
2026,37(7):2953−2967 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.007501] [CSTR: 32375.14.jos.007501]
©中国科学院软件研究所版权所有.
E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel: +86-10-62562563

高铁复合无线通信信道形式化建模与验证*

买 宁[1], 关 永[1], 陈善言[1], 王国辉[1], 李希萌[1], 施智平[1,2]

[1](首都师范大学 信息工程学院, 北京 100048)
[2](北京市科学技术研究院, 北京 100089)
通信作者: 王国辉, E-mail: ghwang@cnu.edu.cn

摘 要: 随着高铁无线通信质量需求日益增长, 高速移动场景下的通信可靠性已成为高铁无线通信中亟需关注和解决的核心问题. 构建可靠的信道模型是解决这一问题的关键. 高铁复合无线通信信道建模应充分考虑实际运行环境与信道传播特性, 以构建通用性强且可靠性高的无线通信信道模型. 在复杂无线信道建模方面, 形式化方法凭借其严谨的数学建模与严格的逻辑推理能力展现出显著优势. 在高架桥这一典型的高铁通信场景中, 结合形式化验证方法, 提出一种基于小尺度衰落模型的复合无线通信信道的高阶逻辑模型. 针对复合信道的长尾分布特性, 运用定理证明技术验证了复合无线通信信道的概率密度函数符合第 2 类修正 Bessel 函数的分布.

关键词: 形式化方法; 高铁无线通信; 复合信道建模; 定理证明
中图法分类号: TP311

中文引用格式: 买宁, 关永, 陈善言, 王国辉, 李希萌, 施智平. 高铁复合无线通信信道形式化建模与验证. 软件学报, 2026, 37(7): 2953–2967. http://www.jos.org.cn/1000-9825/7501.htm

英文引用格式: Mai N, Guan Y, Chen SY, Wang GH, Li XM, Shi ZP. Formalization and Verification of Composite Wireless Communication Channels in High-speed Railway. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2026, 37(7): 2953–2967 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/7501.htm

Formalization and Verification of Composite Wireless Communication Channels in High-speed Railway

MAI Ning[1], GUAN Yong[1], CHEN Shan-Yan[1], WANG Guo-Hui[1], LI Xi-Meng[1], SHI Zhi-Ping[1,2]

[1](Information Engineering College, Capital Normal University, Beijing 100048, China)
[2](Beijing Academy of Science and Technology, Beijing 100089, China)

Abstract: With the growing demand for wireless communication quality in high-speed railway (HSR), ensuring communication reliability in high-mobility scenarios has become a critical challenge. Constructing a reliable channel model is the key to addressing this issue. To build a highly general and reliable channel model, composite wireless communication channel modeling requires full consideration of the actual operating environment and channel propagation characteristics. With rigorous mathematical modeling and logical reasoning capabilities, the formal method demonstrates significant advantages in complex wireless channel modeling. Focusing on the typical HSR communication scenario of viaducts, this study proposes a high-order logic model of composite wireless communication channels based on a small-scale fading model using the formal method. To address the long-tail characteristic of composite channels, the theorem proving technique is used to verify that the probability density function (PDF) of the composite wireless communication channel conforms to the distribution of the modified Bessel function of the second kind.

Key words: formal method; high-speed railway wireless communication; modeling of composite channels; theorem proving

随着京张高铁等智能化高铁的开通, 中国高铁正步入高质量发展的新阶段, 人们对高铁中无线通信质量的需求也日益增长. 在高速移动场景中, 通信可靠性已成为高铁无线通信中亟需重点关注和解决的核心问题[1]. 由于列

* 基金项目: 国家自然科学基金 (62272323, 62272322, 62372312)
收稿时间: 2024-12-28; 修改时间: 2025-03-17, 2025-04-30; 采用时间: 2025-06-30; jos 在线出版时间: 2025-11-20
CNKI 网络首发时间: 2025-11-21

车高速运动引发的多普勒效应和信号衰落, 保障信号传输过程中的稳定性与连续性面临诸多技术挑战[2]. 此外, 高速移动环境下的信道特性复杂多变, 易产生极端传输情形, 深度衰落、严重遮挡等因素会导致信号中断, 严重影响通信的实时性和可靠性. 实际通信中, 无线信道测量难度大、成本高, 不仅依赖昂贵的设备支持, 也难以采集足量的真实数据. 这使得高铁无线信道模型的正确性和可用性面临挑战. 准确、可靠的信道模型不仅能够模拟信道的实际参数, 还能有效预测信道的衰落变化, 对于提高高铁无线通信的质量至关重要.

在构建无线通信信道模型时, 需充分考虑高铁的实际运行场景和信道的传播特性. 高铁的运行场景主要包括高架桥、路堑、车站、丘陵地形和开放空间, 其中高架桥场景是最为典型且具有代表性的场景. 在高架桥场景中, 列车通常运行在无遮挡的开阔环境中. 尽管该场景下直射路径较为清晰, 但由于高架轨道的开阔性和信号的多径反射, 会产生复杂的多径效应. 这种多径传播现象导致小尺度衰落和大尺度衰落效应并存, 从而形成了信道衰落的特性[3]. 信道衰落特性不仅造成信号强度不稳定, 还可能在关键时刻引发通信中断, 进而显著影响高铁通信的信道容量和可靠性.

为有效描述这一信道衰落特性, 研究人员常基于小尺度衰落模型中的瑞利衰落信道和莱斯衰落信道建立高铁无线通信信道模型. 例如, 冯业浩等人[3]结合实测数据和 Matlab 工具对高铁信道模型进行建模与分析, 基于莱斯衰落模型提出了高铁信道的小尺度衰落模型. 王雪丽等人[4]针对高速铁路中的高架桥场景, 基于莱斯信道衰落模型, 结合 LOS 直射分量推导了改进的信道估计公式. 相较于单一信道模型, 张逸康等人[5]提出了一种基于瑞利衰落信道和莱斯衰落信道的复合信道模型, 通过理论推导得到了复合信道概率密度函数数学表达式. 在上述研究中, 张逸康等人[5]聚焦于高架桥这一典型场景, 该场景下无线信道的建模和分析相对容易处理. 其提出的复合信道概率密度函数结果完整, 具有普遍性与通用性. 复合信道模型中, 瑞利信道具有建模简单、计算便捷等优点. 但上述研究工作均使用传统 Matlab 工具进行仿真验证, 可能因测量数据不准确或仿真算法不精确引入误差和不确定性.

为确保无线通信信道模型的正确性和可靠性, 本文采用形式化方法, 通过其严格的数学证明和逻辑推理能力, 可以在理论上消除系统中的漏洞和安全缺陷, 在提高可靠性方面具有显著优势[6]. 在应对复杂多样的无线信道建模时, 形式化方法也展现出强大的潜力. 通过对信道的各种参数进行准确建模, 并借助定理证明工具验证信道模型的正确性和关键性质, 形式化方法能够保障信道模型在各种条件下的可靠性[7]. 这种方法有效满足了构建通用性强且可靠性高的无线通信信道模型的需求, 为提升高铁无线通信的安全性和可靠性提供了重要的理论保障.

现阶段复合信道的形式化建模所需形式化数学理论研究现状如下: Mhamdi 等人[8]在定理证明器 HOL4 中提出一种扩展实数的形式化, 并基于扩展实数进行了测度、积分等数学基础的形式化. 并且, Mhamdi[9]进一步在 HOL4 中完整地形式化数学基础, 并对信息论基础的核心概念进行了形式化建模. 但上述工作所形式化的数学基础理论侧重于测度与 Lebesgue 积分, 对概率理论的内容形式化较少. 在信道的形式化相关研究中, Helali 等人[10]使用形式化方法, 从信道容量方面对级联信道进行了分析, 但其没有限定具体的信道模型. 本文基于以上工作, 在定理证明器 HOL Light 中补充构建了数学基础与信息论基础, 用于复合信道的形式化建模.

本文参考张逸康等人[5]的建模方法, 针对高架桥场景, 采用形式化方法在 HOL Light 中对基于小尺度衰落模型的高铁复合无线通信信道进行建模与验证. 针对复合信道的长尾分布特性, 本文运用定理证明技术, 验证了信道模型中, 基站经高铁天线转发到用户手机的这一复合信道的概率密度函数符合第 2 类修正 Bessel 函数分布. 本文主要贡献如下.

(1) 构建复合无线信道所需的扩展实数高阶逻辑定理库.

(2) 形式化定义复合无线信道所需的信息论基础概念.

(3) 形式化建立高架桥场景下的高铁复合无线通信信道模型并验证其概率密度函数性质.

本文第 1 节介绍高铁无线信道与建模基础形式化理论的相关工作. 第 2 节介绍定理证明器 HOL Light 和高铁复合信道模型. 第 3 节介绍扩展实数数学基础形式化. 第 4 节介绍基于扩展实数的信息论基础形式化. 第 5 节介绍高架桥场景下高铁复合无线通信信道的形式化建模与验证. 第 6 节总结全文.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

1 相关工作

1.1 高铁无线信道研究现状

高速铁路正迈入无线通信的新时代, 随着 5G、6G 等技术的快速发展, 欧盟提出的“Shift2Rail”计划正推动高铁从有线通信向无线通信的转变[11]. 为推动未来高速铁路通信的可持续发展, 构建高速铁路无线通信的理论框架至关重要, 而可靠的信道模型则是建立这一框架的基础.

近年来, 针对高铁通信信道建模的研究取得了一定进展. Zhou 等人[12]系统总结了先进的高铁信道建模方法, 从统计建模、理论建模等方面对高铁信道模型进行了介绍. Zhao 等人[13]针对城市、路堑和高架桥 3 种高铁通信典型场景, 进行了全面的信道模型评估. 在高架桥这一场景中, 由于环境开阔等多种因素的影响, 衰落效应显著. Lin 等人[14]针对小尺度衰落对高速铁路通信的影响, 重点研究了铃木衰落信道对高铁通信覆盖性能的影响. 同时, 针对类似的开阔场景, 王雪丽等人[4]结合莱斯衰落信道和叠加训练信道估计方法, 提出一种改进的信道估计模型. 相较于单一信道模型, 张逸康等人[5]提出基于瑞利衰落信道和莱斯衰落信道的复合高铁无线通信信道模型, 用于描述高架桥场景下的无线通信系统. 该复合信道模型的推导完整, 且具有较高的通用性.

上述高铁信道建模的研究成果为进一步建模高铁复合无线通信信道及开展后续验证工作奠定了基础. 但这些工作均使用传统研究方法, 如数据建模与系统仿真, 其可能引入误差和不确定性. 而形式化方法能够有效避免潜在错误, 保障信道模型的正确性与可靠性. Ferrari 等人[7]调研并深入分析了形式化方法在铁路系统开发中的应用前景, 强调形式化方法是推动铁路领域实现安全可靠技术进步的重要基础. 综上, 本文基于张逸康等人[5]的研究工作, 对高架桥场景下的高铁复合无线通信信道模型进行了形式化建模, 并在此基础上验证该模型的正确性及其关键性质.

1.2 复合信道模型的形式化数学理论研究现状

高铁复合无线通信信道模型的形式化依赖于一系列数学基础概念, 包括测度与积分、概率以及信息论. 为确保复合信道建模的准确性, 本文对相关数学基础进行了形式化. 近年来, 数学基础的形式化取得了显著进展. Mhamdi 等人[9]在定理证明器 HOL4 中形式化了扩展实数, 并基于此形式化了测度、积分等数学基础. 并且, Mhamdi 等人[15,16]还在 HOL4 中基于扩展实数提出了 Lebesgue 积分的形式化, 该积分相比于普通积分适用于更广泛的场景. Boldo 等人[17,18]在 Coq 中提出了对 σ 代数、测度、简单函数以及非负可测函数积分的形式化. 以上工作集中于测度和 Lebesgue 积分的形式化, 而对概率理论的形式化研究相对较少.

在概率理论方面, Qasim[19]在 HOL4 中提出正态随机变量相关概念的形式化, 并验证了其重要性质. 随后, 尹晓娜等人[20]在 HOL Light 中对测度和概率理论进行了系统的形式化建模, 实现了重要概率分布及其分布性质定理的形式化建模与高阶逻辑推导. 该研究为本文工作提供了较为完善的测度与概率理论基础. 但其主要基于实数域展开, 并不适用于高铁无线通信中极端情况的建模和重要性质的验证. 因此, 本文在 HOL Light 中进一步基于扩展实数域形式化建模了测度、积分与概率等基本数学概念, 补充了正态随机变量的相关定义, 为高铁复合无线通信信道建模提供了坚实的数学基础.

在信息论基础方面, Mhamdi 等人[8,9]基于形式化的数学基础理论, 在 HOL4 中构建了信息论基础框架, 包括熵、互信息和信道容量等核心概念. 在这一框架中, 下述工作进一步完善了信息论基础形式化理论体系. Liu 等人[21,22]进一步形式化了马尔可夫链等概念, 为描述信息传递过程中的状态转移提供了重要工具. 并且, Dunchev 等人[23]形式化了数据处理等式和 Jensen 不等式, 用于验证信息论属性. 在应用层面, Helali 等人[10]使用形式化的信息论基础定义对于级联信道的性质进行了分析. 本文基于上述工作, 形式化了信源与信道、熵与信息等信息论基础核心概念. 同时, 针对高铁复合无线信道建模的需求, 本文对瑞利衰落信道和莱斯衰落信道进行了形式化, 为后续复合信道建模提供形式化基础.

2 基础知识

2.1 HOL Light 定理证明器

HOL Light 是以简洁和轻量级的设计著称的定理证明器, 广泛用于形式化证明数学定理与辅助推理, 其具有

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

灵活性高和可扩展性强的特点. HOL 系列是目前主流的定理证明器之一, 其主要分支有 HOL4 和 HOL Light. HOL4 继承了早期的 HOL 系统并在其基础上进行了扩展和改进, 旨在提供全面的定理证明器. HOL Light 虽然也继承于 HOL 系统, 但其更轻量级, 灵活性更高, 核心设立得较小巧. 其易用性和可用性高于 HOL4, 更适用于科学研究. 尤其是针对特定的理论研究项目, HOL Light 为用户提供了一个可根据具体需求定制与开发的灵活环境, 其常用特殊符号及标准含义如表 1 所示. 因此, 本研究使用 HOL Light 来进行高铁复合无线通信信道的形式化建模与验证, 并构建所需的扩展实数数学基础与信息论基础.

表 1 HOL Light 符号表

HOL Light符号	标准符号	含义
|	或	逻辑或
/\	与	逻辑与
->	$\rightarrow$	函数类型映射
!	$\forall$	对任意的
?	$\exists$	存在
$\backslash x.f(x)$	$\lambda x.f(x)$	定义以 x 为自变量的函数
==>	$\Rightarrow$	蕴含
<=>	$\Leftrightarrow$	等价于
$@l.P(l)$	l	从所有使 $P(l)$ 的 l 中选择一个 l
$\&x$	x	从自然数到实数的类型转换
--	$-$	负号
INTER	$\cap$	交集
IMAGE f s	$range(f)$	函数值域
PREIMAGE f s	$domain(f)$	函数定义域
*power*2	x^2	平方
drop	$real^1 \rightarrow real$	一维向量投影标量
at_posinfinity	$+\infty$	正无穷

2.2 高架桥场景下高铁复合无线通信信道模型

高架桥场景作为高铁通信最常见的场景之一, 其信道建模与计算较为简便. 在高架桥场景中, 高铁顶部一般设置有天线, 将信号从基站直接至用户设备这一路径抽象为无线信道 h_1, 将基站发出信号经天线转发至用户设备这一路径抽象为无线信道 h_2. 假定信道 h_1 和 h_2 都服从小尺度衰落信道瑞利信道的分布函数, 令复合信道 $h = c\times h_1\times h_2$, 对复合信道 h 及其特性进行建模与验证.

在这种情况下, 复合信道的概率密度函数如公式 (1) 所示, 其符合第 2 类修正 Bessel 函数 K_0 分布. 与瑞利分布相比, K_0 分布表现出更强的不对称性, 而非瑞利分布那样平稳衰减. K_0 分布尾部衰减更缓慢, 即复合信道具有长尾分布的特性. 这种分布特性在高铁无线通信系统的设计和优化中具有重要意义. 通过准确的信道建模, 可以提升系统设计的可靠性与鲁棒性. 例如, 在信道估计和解码算法的优化中, 考虑长尾分布的特性能够提高误码率性能[3]. 在高铁场景的站点规划中, 需结合长尾特性计算站点的有效覆盖范围, 以确保列车高速移动时通信连接的连续性与可靠性.

$$p(h) = \frac{2h}{\sigma_1^2\sigma_2^2}K_0\left(\frac{|h|}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right),\ h \neq 0,\ c = 1 \tag{1}$$

为完成复合信道的建模, 需要对信道模型、衰落信道等信息论基础概念进行形式化建模. 这些概念的形式化建模依赖于一系列数学基础的定义. 因此, 本文首先基于扩展实数对测度、积分、概率等相关内容进行建模, 以确保数学基础能够处理复杂条件与极限情况. 基于此, 本文进一步形式化建模信源、信道、互信息等信息论基础的核心概念. 最后, 基于衰落信道模型, 进行了高铁复合无线通信信道的建模, 并验证复合信道的概率密度函数符合 K_0 分布.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

3 基于扩展实数的数学基础形式化

高速铁路复合无线通信信道的建模需要充分考虑极端情况, 例如高速移动环境中信号幅度的剧烈波动和无穷大值的出现. 扩展实数可以处理一些在标准实数系统中没有定义的数学运算和情况, 例如无穷大、极限和不定值, 还可确保测度、积分和导数运算在极限处的连续性. 使用扩展实数可有效避免因标准实数系统局限性导致的建模误差, 使得高铁信道的建模更加严谨, 从而提升信道模型的通用性和可靠性. 因此, 本文在 HOL Light 中建模了扩展实数基础定义及其数学运算, 并基于此建模信息论基础, 作为高铁复合无线通信信道形式化的定义基础. 本文针对扩展实数的数学运算性质证明了共 170 余条定理, 用于后续高铁复合无线通信信道模型建模与性质验证.

在数学上, 扩展实数又称广义实数, 包括正无穷、负无穷和普通实数 $\mathbb{R}$, 其高阶逻辑模型如定义 1 所示.

定义 1. 扩展实数.

```
let extreal_INDUCT, extreal_RECURSION = define_type
"extreal = NegInf | PosInf | Normal real";;
```

定义 1 中的“NegInf”表示 $-\infty$; “PosInf”表示 $+\infty$; “Normal”表示类型转换符, 代表从实数到扩展实数的类型映射. 以其上确界为例, 扩展实数的运算需要对无穷大进行特殊处理. 定义 2 形式化描述扩展实数上确界的计算.

定义 2. 扩展实数的上确界.

```
⊢ extreal_sup p = (if !x. (!y. p y ==> extreal_le y x) ==> x = PosInf then PosInf
                  else if !x. p x ==> x = NegInf then NegInf else Normal (sup (\r. p (Normal r))))
```

定义 2 可用于 Lebesgue 测度的形式化建模. 其中, “extreal_le”表示扩展实数中重定义的“$\leqslant$”运算符. “sup”是 HOL Light 中对普通实数构成的集合 P 求上确界的函数, 即 $\varepsilon s.\ \forall y.\ (\exists x.\ (P(x) \wedge y < x) \Leftrightarrow y < s)$.

3.1 基于扩展实数的测度形式化

利用扩展实数定义测度, 不仅能定义 σ 有限测度, 还可以定义无穷测度. 测度用于表示几何集合的度量, 包括长度、面积和体积等, 它是形式化积分和概率的基础. 在测度的形式化过程中, 涉及代数相关概念的定义, 本文参考了首都师范大学尹晓娜等人[20]在 HOL Light 中对代数和测度基本概念的形式化, 并对部分测度定义进行了扩展实数域上的推广. 本文通过三元组来定义测度, 使空间、代数、扩展实数上的测度函数关联起来. 测度的高阶逻辑模型如定义 3 所示.

定义 3. 测度.

```
⊢ measure_ext (sp:A->bool, sts:(A->bool)->bool, mu:(A->bool)->extreal) = mu
```

Lebesgue 测度是欧几里得空间上的标准测度, 任何区间都是 Lebesgue 可测的, 而 Borel 测度是一种特定测度, 只能测量 Borel 可测集. 假设 X 是实数集, P 是有界半闭区间 $[a,b)$ 的集合, S 是由 P 生成的 σ 代数, μ 是定义在 P 上的集合函数, 其表达式为 $\mu[a,b) = b - a$. 此时 S 的集合表示 X 上的 *Borel*-σ 代数. 若 μ 对所有 Borel 集合 S 都有定义, 且 S 的集合是完备的, 则测度 μ 称为 Lebesgue 测度, 其形式化描述如定义 4 所示.

定义 4. Lebesgue 测度.

```
⊢ lebesgue = (:real^1), {A | !n. indicator A integrable_on line_1 n},
             (\A. extreal_sup {Normal (drop (integral (line_1 n) (indicator A))) | n IN (:num)})
```

本文在对 Lebesgue 测度形式化时参考了其数学定义和其在 Mhamdi 等人[15,16]的研究工作中的定义, 将其定义为所有有限区间 $[-n, n]$ 规范积分的上确界. 定义 4 中, “line_1”表示一维空间中边界为 $[-n, n]$ 的线段, 即 $line_1(n) = \{x \in \mathbb{R}^1 | -n \leqslant x \leqslant n\}$, 此处用其来表示实数集 X.

本文结合 Lebesgue 测度与 Borel 可测集, 定义了 Lebesgue-Borel 测度, 使其既能够对 Borel 集合进行测量, 又扩展了 Lebesgue 测度并继承其优点. 在对其形式化时, 本文将 Lebesgue-Borel 定义为由 Lebesgue 测度、Borel 空间、*Borel*-σ 代数构成的三元组, 如定义 5 所示, 并将高铁复合无线信道建模在该测度之上.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

定义 5. Lebesgue-Borel 测度.

⊢ lborel = space_s real_borel, subsets real_borel, measure_ext lebesgue

定义 5 中, “space_s”表示空间; “subsets”表示子集; “real_borel”表示 *Borel*-σ 代数, 其数学含义为指定空间上所有开集的最小 σ 代数.

3.2 基于扩展实数的积分形式化

扩展实数的引入进一步扩展了积分的适用范围, 它允许积分结果取无穷值. 扩展实数可以精确地表达积分过程中极限运算的结果, 这在单调收敛性定理的证明中尤为关键. Lebesgue 积分将积分运算扩展至任意测度空间, 其通过对函数值进行分段处理, 避免了传统黎曼积分对函数连续性的要求, 能够更灵活地处理不可积函数和复杂的测度空间. 本研究重点形式化了 Lebesgue 积分相关定义, 作为后续高铁复合通信信道建模的基础. Lebesgue 积分的核心思想是将函数值域划分为若干区间, 并对这些子区间的测度与函数值进行加权求和. 公式 (2) 表示 Lebesgue 积分的数学定义.

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

其中, $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 分别称为函数 $f(x)$ 在 E 上的正部和负部, 二者皆是非负可测函数, 且存在 Lebesgue 积分. 当二者的 Lebesgue 积分都是有限值时, 称函数 $f(x)$ 在 E 上 Lebesgue 可积.

本研究结合 Lebesgue 积分数学定义与 Mhamdi 等人[8,9]在 HOL4 中的对其构建的形式化定义, 在 HOL Light 中构建 Lebesgue 积分的高阶逻辑模型. 具体而言, 需先形式化正简单函数的 Lebesgue 积分, 再形式化非负可测函数的 Lebesgue 积分, 最后推广至一般形式的 Lebesgue 积分. 定义 6 表示一般形式 Lebesgue 积分的形式化模型.

定义 6. Lebesgue 积分.

⊢ L_integral *m f* = extreal_sub (pos_fn_integral *m* (fn_plus *f*)) (pos_fn_integral *m* (fn_minus *f*))

定义 6 的作用域均为扩展实数, “extreal_sub”表示扩展实数的“ – ”运算符; “pos_simple_fn_integral”定义了正简单函数的 Lebesgue 积分, 即 $\int_s \sum_i x_i I_{A_i}(x) = \sum_i \mu(A_i)\cdot x_i$; “pos_fn_integral”定义了非负可测函数的 Lebesgue 积分, 即 $\int f\mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int g\mathrm{d}\mu \middle| g \leqslant f\right\}$, 其中 g 为正简单函数.

3.3 基于扩展实数的概率形式化

本文基于尹晓娜等人[20]的概率形式化工作, 将概率相关定义进行了扩展实数域的推广, 重点形式化了随机变量和概率分布等核心概念. 随机变量本质上是一个可测函数. 扩展随机变量的定义域, 能够使其更广泛地适用于不同类型的随机过程和更复杂的概率空间, 以适用于复杂信道的建模. 定义 7 表示扩展实数上的随机变量 X 定义在概率空间 p 上, 取值范围为 p 中的可测集合.

定义 7. 随机变量.

⊢ !*X p s*. random_variable_ext *X p s* <=>

prob_space_ext *p* ∧ *X* IN gen_measurable (p_space_ext *p*, events_ext *p*) *s*

定义 7 中, “prob_space_ext”“p_space_ext”“events_ext”分别表示扩展实数上的概率空间、样本空间和事件集.

概率分布通常定义为函数, 表示随机变量取某个特定值或落入某个区间的概率. 定义 8 描述了随机变量 X 在测度空间上的概率分布, 其数学含义为 $distribution(X, p) = \lambda s.P(X^{-1}(s)\cap\Omega)$.

定义 8. 概率分布.

⊢ !*X p*. distribution_ext *p X* = (*s*. prob_ext *p* (*PREIMAGE X s INTER* p_space_ext *p*))

除了通用定义外, 本研究还形式化了一些信道中常用的概率相关定义, 包括概率密度函数和正态随机变量. 连续型随机变量在区域 P 上的取值为概率密度函数在 P 上的积分. 因此在形式化概率密度函数时, 可采用求导的思路. 本文参考 Mhamdi 等人[8,9]的形式化建模思路, 使用 Radon-Nikodym (RN) 导数来定义概率密度函数. 而 Radon-Nikodym 定理是证明该导数存在性的重要定理, 该定理反映了概率测度可由其 Lebesgue 测度 λ 的 RN 导数的积

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

分形式描述, 即保证了公式 (3) 成立.

$$\mu(A) = \int A f(x)\mathrm{d}\lambda(x) \tag{3}$$

公式 (3) 描述了概率测度和 Lebesgue 测度间的关系. 假设 μ 是随机变量 A 的概率测度, λ 代表 Lebesgue 测度, 则 $f(x)$ 就是随机变量的概率密度函数, 它是概率测度 μ 对 Lebesgue 测度 λ 的 RN 导数.

依据公式 (3) 对 RN 导数进行形式化建模, 需要先建模概率测度 μ, 如定义 9 所示. 基于定义 9, 形式化建模 RN 导数, 如定义 10 所示.

定义 9. Lebesgue 测度的密度测度.

⊢ density_measure *m f* = (*s*. pos_fn_integral *m* (*x*. extreal_mul (*f x*) (indicator_fn_ext *s x*)))

定义 10. RN 导数.

⊢ RN_deriv *v m* =

(@*f*. *f* IN gen_measurable (m_space_ext *m*, measurable_sets_ext *m*) borel_ext

∧ (!*x*. extreal_le (extreal_of_num 0) (*f x*))

∧ (!*s*. *s* IN measurable_sets_ext *m* ==> density_measure *m f s* = *v s*))

定义 9 中, “extreal_mul”表示扩展实数的“×”运算符, “indicator_fn_ext”定义了扩展实数的指数函数. 定义 10 中, “extreal_of_num”用于将自然数转换为扩展实数, 通过这种转换操作确保变量类型的严格一致性, 从而避免类型不一致导致的潜在错误.

对于连续型随机变量, 通常使用 Lebesgue 测度来描述其定义的函数测度空间. 本文使用 Lebesgue-Borel 测度, 同时基于 Radon-Nikodym 定理, 将概率密度函数形式化为概率测度相对于 Lebesgue-Borel 测度的 RN 导数, 如定义 11 所示.

定义 11. 概率密度函数.

⊢ !*p X*. PDF *p X* = RN_deriv (distribution_ext *p X*) lborel

正态随机变量作为概率论中最重要的分布之一, 其在理论分析与实际应用中被广泛使用. 以正态分布为基础的高斯信道模型, 常用于复合信道模型的建模. 在构建正态随机变量形式化模型时, 先形式化建模正态概率测度, 定义 12 给出了正态分布在特定可测集上的概率测度.

定义 12. 正态概率测度.

⊢ !*mu sigma A*. normal_pmeasure *mu sigma A* =

(if *A* IN measurable_sets_ext lborel then

pos_fn_integral lborel (*x*. extreal_mul (Normal (normal_density mu *sigma* (*drop x*))) (indicator_fn_ext *A x*))

else extreal_of_num 0)

定义 12 通过积分表示正态分布的概率测度, 如果 A 是可测集, 则根据正态分布的密度函数进行积分, 否则概率测度值为 0. 其中, “measurable_sets_ext”表示扩展实数上的可测集合, “normal_density”表示正态分布的概率密度函数.

正态随机变量可描述为与正态测度保持一致的随机变量, 其形式化模型如定义 13 所示.

定义 13. 正态随机变量.

⊢ !*p X mu sigma*.

normal_rv *X p mu sigma* <=>

random_variable_ext *X p* real_borel ∧ measurable_distr *p X* = normal_pmeasure *mu sigma*

在定义 13 中, 给出了正态随机变量的定义条件: X 必须是定义在某个概率空间 p 上的随机变量, 且其取值空间是实数集上的 *Borel*-σ 代数, X 的概率分布必须满足正态分布.

4 信息论基础形式化

本文依据高铁无线通信信道模型形式化建模的需要, 对信息论基础构建高阶逻辑模型. 信息论中的核心概念包

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

括信源、信道与信道容量、熵、互信息等基本量, 这些核心概念在理论研究和实际通信问题中都具有重要意义.

4.1 信源和信道通用模型的形式化

信源是信息产生的来源, 信源可以看作是一个随机变量 X, 它在某个概率空间 P 上定义, 并取值于一个离散或连续的集合 M. 信源的形式化如定义 14 所示.

定义 14. 信源.

⊢ !*p X M*. source *X p M* <=> random_variable_ext *X p* real_borel ∧ (!*a*. *X a* IN *M*)

信道是信息进行传输的通道, 其数学定义为 $f(x,y) = P(Y = y \mid X = x)$, X 表示信号, Y 表示传输结果, $f(x,y)$ 表示信道, 即信号在传递中的变化过程. 根据数学定义, 信道的形式化如定义 15 所示, 表示从输入至输出间的条件概率模型.

定义 15. 信道模型.

⊢ channel *p X Y f* <=>
  random_variable_ext *X p* real_borel ∧ random_variable_ext *X p* real_borel
  ∧ (!*x y*. *x* IN *IMAGE X* (p_space_ext *p*) ∧ *y* IN *IMAGE X* (p_space_ext *p*)
  ∧ *f* (*x*, *y*) = conditional_distribution_ext *p Y X* {*y*} {*x*})

定义 15 中, “conditional_distribution_ext”定义了扩展实数上的条件分布.

信道容量的数学定义为 $C = \sup_{p(x)} I(X,Y)$, 即信道在传输信号时所能达到速率的上确界. 故信道容量的形式化建模依赖于互信息的形式化定义. 而互信息的形式化建模又依赖于相对熵的定义. 因此, 在形式化建模信道容量时, 需先构建相对熵的形式化模型, 如定义 16 所示. 相对熵又称 KL 散度, 其用于衡量两个概率分布之间的差异.

定义 16. 相对熵.

⊢ KL_divergence *b s u v* =
  extreal_ainv (L_integral (space_s *s*, subsets *s*, *u*)
    (*x*. extreal_logr *b* (RN_deriv *u* (space_s *s*, subsets *s*, *v*) *x*)))

在定义 16 中, 通过使用 RN 导数来计算测度 μ 相对于测度 v 的密度, 随后结合 Lebesgue 积分和对数函数来量化这两个概率分布间的距离, 即相对熵. 其中, “extreal_ainv”表示扩展实数中的相反数, “extreal_logr”则表示扩展实数的对数运算.

互信息是相对熵的一种特殊情形, 其被定义为联合分布 $P(X \mid Y)$ 与独立分布乘积 $P(X)P(Y)$ 的相对熵. 相对熵的形式化模型如定义 17 所示.

定义 17. 互信息.

⊢ mutual_information *b p s*1 *s*2 *X Y* =
  let prod_space =
  prod_measure_space (space_s *s*1, subsets *s*1, distribution_ext *p X*)
    (space_s *s*2, subsets *s*2, distribution_ext *p Y*)
  in KL_divergence *b* (p_space_ext prod_space, events_ext prod_space)
    (joint_distribution_ext *p X Y*) (prob_ext prod_space))

定义 17 中, “distribution_ext”和“joint_distribution_ext”分别定义了扩展实数上的分布与联合分布, “prod_measure_space”定义了乘积测度空间. 基于上述内容, 本文将信道容量形式化为所有输入分布下互信息的最大值, 如定义 18 所示.

定义 18. 信道容量.

⊢ !*b s*1 *s*2 *X Y*. channel_capacity *b s*1 *s*2 *X Y* =
  (@*c*. (?*p*. *c* = mutual_information *b p s*1 *s*2 *X Y*) ∧ (!*p*. extreal_le (mutual_information *b p s*1 *s*2 *X Y*) *c*))

4.2 通用衰落信道模型的形式化

第 4.1 节定义了理想条件下的信道模型, 但实际通信中必须考虑信号在信道中的衰落情况. 衰落信道是无线

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

通信系统中常见的信道模型. 本文根据高铁复合无线信道形式化的需要建模了一系列通用衰落信道, 包括传播路径损耗信道、阴影衰落信道以及小尺度衰落模型中的莱斯衰落信道和瑞利衰落信道. 其中, 瑞利衰落信道的统计特性能够较好地描述高架桥场景中无线信道的随机波动特征. 其信道模型简单, 具有良好的数学可处理性, 常用于理论建模和性能分析. 瑞利衰落信道模型假设信号通过无线信道之后, 其信号幅度随机变化. 当主导传播路径非直射路径时, 信号的衰落分布可用瑞利分布描述. 其概率密度函数如公式 (4) 所示.

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} \mathrm{e}^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}} \tag{4}$$

此处重点介绍瑞利信道的形式化建模过程, 其建模思路与第 3.3 节中正态随机变量的形式化思路一致. 首先, 依据公式 (4) 形式化瑞利概率密度函数, 如定义 19 所示.

定义 19. Rayleigh 概率密度函数.

⊢ !*r sigma*. Rayleigh_loss_density *r sigma* =

r / *power*2 *sigma* * exp (--*power*2 *r* / (&2 * *power*2 *sigma*))

其次, 基于瑞利概率密度函数的形式化模型, 定义 20 所反映的瑞利概率测度被描述为定义 19 在 Lebesgue-Borel 测度上的积分形式.

定义 20. Rayleigh 概率测度.

⊢ !*sigma A*. rayleigh_pmeasure *sigma A* =

(if *A* IN measurable_sets_ext lborel then pos_fn_integral lborel

(*x*. extreal_mul (Normal (Rayleigh_loss_density (*drop x*) *sigma*)) (indicator_fn_ext *A x*))

else extreal_of_num 0)

最后, 以概率测度为基础形式化瑞利衰落信道, 通过验证随机变量的测度分布与 Rayleigh 概率测度一致表示其满足 Rayleigh 分布特性. 瑞利衰落信道的形式化如定义 21 所示.

定义 21. Rayleigh 衰落信道.

⊢ !*p X sigma*. rayleigh_rv *X p sigma* <=>

random_variable_ext *X p* real_borel ∧ measurable_distr *p X* = rayleigh_pmeasure *sigma*

瑞利衰落信道是复合无线信道形式化建模的基础, 当信道由两个或多个瑞利信道级联而成时, 信号分布将发生改变, 不再是标准的瑞利分布.

5 高铁复合无线通信信道形式化建模与验证

高铁通信中, 高速移动、地形复杂和信号衰落等因素使信道建模变得困难. 而对信道进行形式化建模可以解决实测数据难获取、成本高等问题, 同时能够准确建模信道特性, 为构建可靠的通信系统提供坚实的理论基础. 在高架桥这一典型高铁通信场景中, 信号从基站直接至用户设备这一路径为第 2 条无线信道 h_1, 基站发出信号经车顶中继天线转发至用户设备为第 1 条无线信道 h_2, 其信道模型如图 1 所示. 上述两条无线信道可建模为小尺度衰落模型中的瑞利信道, 对应复合信道形式化模型如定义 22 所示, 即信号在复合信道中的分布模型与复合信道的概率测度空间保持一致.

定义 22. 复合信道模型.

⊢ !*p X sigma*. product_rayleigh_rv *X p sigma* <=>

random_variable_ext *X p* real_borel ∧ measurable_distr *p X* = product_rayleigh_pmeasure *sigma*

定义 22 中, “product_rayleigh_pmeasure”表示复合信道的概率测度, 其形式化建模依赖于复合信道的概率密度函数. 依据文献 [5] 中给出的复合信道 h 的概率密度函数, h 表示信道 h_1 和 h_2 复合后的随机变量. 当衰减因子 $c = 1$ 时, 复合信道的概率密度函数 $p(h)$ 数学定义可由边缘分布与联合分布的关系简要表示为公式 (5). 衰减因子 c 反映了信号转发过程中由于反射、散射、吸收所引入的额外衰减, 公式 (5) 表示信道经车顶中继转发至用户过程中, 不产生额外衰减时复合信道的概率密度函数.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

$$p(h)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|h_1|}p\left(h_1,\frac{h}{h_1}\right)\mathrm{d}h_1 \tag{5}$$

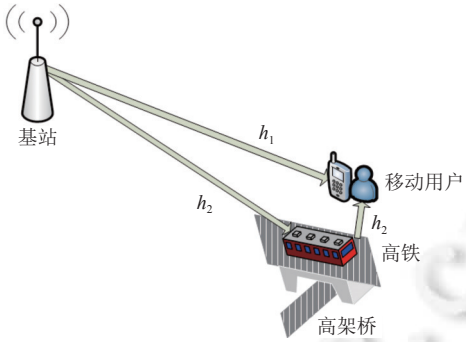

图 1 高架桥场景无线通信模型

但是文献 [5] 并没有严谨地讨论 $h_1=0$ 时的情况. 当 $h_1=0$ 时, $\frac{1}{|h_1|}$ 无定义, 且 $\frac{h}{h_1}$ 无定义, 即点 $h_1=0$ 为函数的奇点. 经过在定理证明器中推导与验证, 被积函数在点 $h_1=0$ 处不可积、不连续, 且导数不存在. 因此, 在对复合信道进行形式化建模时, 必须对积分区域进行分割, 即对点 $h_1=0$ 处的函数值进行特殊处理. 点 $h_1=0$ 实际上对应于实际通信中基站到车顶中继这一链路完全失效的情形, 即信号从基站至中继天线的传输产生了深度衰落或被严重遮挡, 导致该路径上没有有效信号传输. 在文献 [5] 关于复合信道概率密度函数的数学分析中, 默认不考虑信道失效以致通信中断的情形. 但这一深度衰落情形会产生信号中断风险, 理论模型如果不包含极端情况下的误码率与链路失效概率, 会影响整体通信系统的鲁棒性与可靠性. 在形式化建模中, 对 $h_1=0$ 的处理不仅确保了积分在数学上可计算, 同时对实际通信系统中可能出现的极端衰落情况做出了隐性假设.

$p(h)$ 的规范数学表达式应如公式 (6) 所示. 本文基于公式 (6) 对 $p(h)$ 中 $h_1\neq 0$ 的部分进行了形式化定义, 如定义 23 所示.

$$p(h)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{|h_1|}p\left(h_1,\frac{h}{h_1}\right)\mathrm{d}h_1+\lim\limits_{x\to 0^-}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{|h_1|}p\left(h_1,\frac{h}{h_1}\right)\mathrm{d}h_1, & h_1\neq 0\\ 0, & h_1=0\end{cases} \tag{6}$$

定义 23. 复合信道概率密度函数.

```
⊢ !sigma1 h sigma2.
  Product_Rayleigh_Density h sigma1 sigma2 =
    reallim (atreal (&0) within {x | &0 <= x})
    (\a. reallim at_posinfinity (\b. real_integral (real_interval [a, b])
            (\h1. &1 / abs h1 * Rayleigh_loss_density h1 sigma1 * Rayleigh_loss_density (h / h1) sigma2)))
  + reallim (atreal (&0) within {x | x <= &0})
    (\a. reallim at_neginfinity (\b. real_integral (real_interval [b, a])
            (\h1. &1 / abs h1 * Rayleigh_loss_density h1 sigma1 * Rayleigh_loss_density (h / h1) sigma2)))
```

定义 23 中, “(atreal (&0) within {x | &0 <= x})”表示 0^+. “Rayleigh_loss_density”即定义 19 Rayleigh 概率密度函数, 表示信道 h_1 与 h_2 的概率分布. 由于该函数在 $h_1=0$ 处无实际应用意义, 此处只建模 $h_1\neq 0$ 的函数部分以进一步探究 $p(h)$ 的分布规律.

信道复合后, 信号不再服从瑞利分布, 而是服从第 2 类修正 Bessel 函数 K_0 分布. K_0 分布具有长尾特性, 即信号在初始阶段增长和衰减较快, 而尾部衰减缓慢. 定理 1 给出了瑞利信道经复合后服从 K_0 分布的形式化描述.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

定理 1. 复合信道符合 K_0 分布.

val it : thm = ⊢ *sigma*1 > &0 ∧ *sigma*2 > &0

==> Product_Rayleigh_Density *h sigma*1 *sigma*2 =

(&2 * *h*) / (*power*2 *sigma*1 * *power*2 *sigma*2) * Bessel_K0_real (abs *h* / (*sigma*1 * *sigma*2))

定理 1 中, “reallim”来表示实数序列的极限, 即数学符号 lim. “Bessel_K0_real”表示第 2 类修正 Bessel 函数 K_0 分布, 其数学积分形式如公式 (7) 所示. 本文依据公式 (7) 对 K_0 分布进行形式化建模, 以确保其与 $p(h)$ 的最终化简结果保持一致, 其形式化模型如定义 24 所示.

$$K_0(z) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{-1}\mathrm{e}^{-t-\frac{z^2}{4t}}\mathrm{d}t \tag{7}$$

定义 24. 第 2 类修正 Bessel 函数 K_0.

⊢ !*z*. Bessel_K0_real *z* =

&1 / &2 * reallim (atreal (&0) within {*x* | &0 <= *x*})

(*a*. reallim *at_posinfinity* (*b*. real_integral (real_interval [*a*, *b*])

(*t*. &1 / *t* * exp (--*t* + --(*power*2 *z* / (&4 * *t*))))))

第 2 类修正 Bessel 函数是一类在数学物理和工程领域中广泛应用的特殊函数, 其具有多种积分形式和渐近表达式. 在处理概率分布和无线通信中的复合信道建模时, 第 2 类修正 Bessel 函数的积分形式和渐近性质常被用来描述信号的长尾分布特性.

为证明定理 1, 需进一步化简并研究复合概率密度函数的分布规律. 在公式 (6) 中代入瑞利概率密度函数公式并化简, 得到结果如公式 (8), 其形式化描述如定理 2 所示.

$$p(h) = \lim_{x\to 0^+}\int_x^{+\infty}\frac{1}{|h_1|}\frac{h}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\mathrm{e}^{-\frac{h_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{h^2}{2\sigma_2^2h_1^2}}\mathrm{d}h_1 + \lim_{x\to 0^-}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{|h_1|}\frac{h}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\mathrm{e}^{-\frac{h_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{h^2}{2\sigma_2^2h_1^2}}\mathrm{d}h_1 \tag{8}$$

定理 2 对公式 (6)–(8) 的推导过程进行了验证, 其证明过程中需充分考虑复合极限的处理、被积函数不连续点处理以及积分等价性等问题, 且涉及了大量符号操作和复杂的公式推导, 相对复杂, 此处不做赘述.

定理 2. 复合概率密度函数代入化简定理.

val it : thm =

⊢ !*h sigma*1 *sigma*2. *h* = *c* * *h*1 * *h*2 ∧ *c* = &1 ∧ *sigma*1 > &0 ∧ *sigma*2 > &0

==> Product_Rayleigh_Density *h sigma*1 *sigma*2 =

reallim (atreal (&0) within {*x* | &0 <= *x*})

(*a*. reallim *at_posinfinity* (*b*. real_integral (real_interval [*a*, *b*])

(*h*1. &1 / abs *h*1 * *h* / (*power*2 *sigma*1 * *power*2 *sigma*2) * exp (--*power*2 *h*1 / (&2 * *power*2 *sigma*1) + --*power*2 *h* / (&2 * *power*2 *sigma*2 * *power*2 *h*1)))))

+ reallim (atreal (&0) within {*x* | *x* <= &0})

(*a*. reallim at_neginfinity (*b*. real_integral (real_interval [*b*, *a*])

(*h*1. &1 / abs *h*1 * *h* / (*power*2 *sigma*1 * *power*2 *sigma*2) * exp (--*power*2 *h*1 / (&2 * *power*2 *sigma*1) + --*power*2 *h* / (&2 * *power*2 *sigma*2 * *power*2 *h*1)))))

此时在公式 (8) 的基础上分析 $p(h)$ 的被积函数, 可验证其为偶函数. 根据偶函数的对称性质对公式 (8) 进行化简, 进一步得到化简结果如公式 (9).

$$p(h) = 2\lim_{x\to 0^+}\int_x^{+\infty}\frac{1}{h_1}\frac{h}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\mathrm{e}^{-\frac{h_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{h^2}{2\sigma_2^2h_1^2}}\mathrm{d}h_1 \tag{9}$$

对公式 (9) 进行形式化建模, 如定理 3 所示. 定理 3 的证明过程需充分考虑被积函数为偶函数这一隐藏前提条件. 其关键在于使用形如 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{-b} f(-x)\mathrm{d}x$ 的积分对称性形式化定理. 在使用该定理前, 仍需先经过对证明目标重写、化简、实例化、消去相同项等一系列复杂的证明步骤, 将证明目标化简为与积分定理一致的形式.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

从而匹配积分对称性定理的表示形式, 完成证明. 继而, 定理 3 成功验证了公式 (8) 和 (9) 化简过程的正确性.

定理 3. 复合概率密度函数对称化简定理.

```
val it : thm =
⊢ !h sigma1 sigma2.
  reallim (atreal (&0) within {x | &0 <= x})
  (\a. reallim at_posinfinity (\b. real_integral (real_interval [a, b]) (\h1. &1 / abs h1 * h / (power2 sigma1 * power2 sigma2) *exp (--power2 h1 / (&2 * power2 sigma1) + --power2 h / (&2 * power2 sigma2 * power2 h1)))))
+ reallim (atreal (&0) within {x | x <= &0})
  (\a. reallim at_neginfinity (\b. real_integral (real_interval [b, a]) (\h1. &1 / abs h1 * h / (power2 sigma1 * power2 sigma2) * exp (--power2 h1 / (&2 * power2 sigma1) + --power2 h / (&2 * power2 sigma2 * power2 h1)))))
= &2 * reallim (atreal (&0) within {x | &0 <= x})
      (\a. reallim at_posinfinity (\b. real_integral (real_interval [a, b]) (\h1. &1 / h1 * h / (power2 sigma1 * power2 sigma2) * exp (--power2 h1 / (&2 * power2 sigma1) + --power2 h / (&2 * power2 sigma2 * power2 h1)))))
```

接下来在公式 (9) 的基础上对被积函数进行了换元, 该步骤的化简结果如公式 (10) 所示.

$$令 v=\frac{h_1^2}{\sigma_1^2},\ p(h)=\frac{h}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\lim_{x\to 0^+}\int_x^{+\infty}\frac{1}{v}\mathrm{e}^{-v-\frac{h^2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2 v}}\mathrm{d}v \tag{10}$$

在形式化证明中, 由于定理的使用需要严格满足数学逻辑的要求, 在换元时必须确保被积函数的可积性和连续性. 这不仅是换元操作的充分条件, 也是复合信道的重要数学性质. 故本文在验证换元这一步骤前, 先证明了复合信道概率密度函数中被积函数的连续性与可积性, 分别如定理 4 和定理 5 所示.

定理 4. 复合概率密度函数连续性.

```
val it : thm =
⊢ !h sigma1 sigma2 a b. &0 < a
  ==> (\h1. &1 / h1 * h / (power2 sigma1 * power2 sigma2)
      * exp (--power2 h1 / (&2 * power2 sigma1) + --power2 h / (&2 * power2 sigma2 * power2 h1)))
      real_continuous_on real_interval [a, b]
```

定理 5. 复合概率密度函数可积性.

```
val it : thm =
⊢ !h sigma1 sigma2 a b. &0 < a
  ==> (\h1. &1 / h1 * h / (power2 sigma1 * power2 sigma2)
      * exp (--power2 h1 / (&2 * power2 sigma1) + --power2 h / (&2 * power2 sigma2 * power2 h1)))
      real_integrable_on real_interval [a, b]
```

定理 4 的证明主要依赖于一系列倒数函数、指数函数、函数乘法等相关实数函数连续定理. 定理 5 的证明则依赖于定理 4 和函数可积性形式化定理, 该定理描述了连续函数在有限闭区间上可积这一性质. 定理 4 和定理 5 为换元定理的证明提供了充分条件, 该换元定理对公式 (10) 进行了形式化建模, 如定理 6 所示.

定理 6. 换元定理.

```
val it : thm =
⊢ !h sigma1 sigma2. sigma1 > &0 /\ sigma2 > &0
  ==> &2 * reallim (atreal (&0) within {x | &0 <= x})
          (\a. reallim at_posinfinity (\b. real_integral (real_interval [a, b])
                    (\h1. &1 / h1 * h / (power2 sigma1 * power2 sigma2) * exp (--power2 h1 / (&2 * power2 sigma1) + --power2 h / (&2 * power2 sigma2 * power2 h1)))))
    = h / (power2 sigma1 * power2 sigma2) *
```

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

reallim (atreal (&0) within {x | &0 <= x})

(\$a$. reallim *at_posinfinity* (\$b$. real_integral (real_interval [a, b])

(\v. &1 / v * exp (--v + --(*power*2 h / (&4 * *power*2 *sigma*1 * *power*2 *sigma*2 * v))))))

定理 6 证明了 $p(h)$ 从公式 (9) 至公式 (10) 的化简与推导过程, 其关键证明步骤依赖于实数积分换元定理的实例化. 该定理规定了实数积分换元的条件与结果, 即 $\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\mathrm{d}x$. 通过定理 6, $p(h)$ 经过换元, 化简为与公式 (10) 一致的结果. 此时结合公式 (7) 与 (10), 经过推导与验证, 可得出 $p(h)$ 符合 K_0 分布这一结论, 即定理 7.

定理 7. 换元结果符合 K_0.

val it : thm =

⊢ *sigma*1 > &0 /\ *sigma*2 > &0

==> (&2 * h) / (*power*2 *sigma*1 * *power*2 *sigma*2) * Bessel_K0_real (abs h / (*sigma*1 * *sigma*2))

= h / (*power*2 *sigma*1 * *power*2 *sigma*2) *

reallim (atreal (&0) within {x | &0 <= x})

(\$a$. reallim *at_posinfinity* (\$b$. real_integral (real_interval [a, b]) (\$v$. &1 / v * exp (--v + --(*power*2 h / (&4 * *power*2 *sigma*1 * *power*2 *sigma*2 * v))))))

至此, 通过定理 2–7 的逐步验证, 本文完成了定理 1 的形式化证明. 为进一步清晰定理 1 的证明过程, 公式 (11) 给出了 $p(h)$ 的完整化简和换元推导过程. 其实质是将两条瑞利信道的统计特性综合起来, 建模用户最终接收到的信号分布. 公式 (11) 的推导过程实际上反映了在高架桥这一高速移动场景下, 无线信号既受直接传输至用户的直射衰落影响, 也受经车顶天线转发的多径衰落的综合影响, 复合信道共同决定高铁无线通信质量.

$$
\begin{cases}
p(h) = \lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{|h_1|}p\left(h_1,\frac{h}{h_1}\right)\mathrm{d}h_1 + \lim\limits_{x\to 0^-}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{|h_1|}p\left(h_1,\frac{h}{h_1}\right)\mathrm{d}h_1,\ h_1\neq 0 \\
\quad = \lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{|h_1|}\frac{h_1}{\sigma_1^2}\mathrm{e}^{-\frac{h_1^2}{2\sigma_1^2}}\frac{\frac{h}{h_1}}{\sigma_2^2}\mathrm{e}^{-\frac{h^2}{2\sigma_2^2h_1^2}}\mathrm{d}h_1 + \lim\limits_{x\to 0^-}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{|h_1|}\frac{h_1}{\sigma_1^2}\mathrm{e}^{-\frac{h_1^2}{2\sigma_1^2}}\frac{\frac{h}{h_1}}{\sigma_2^2}\mathrm{e}^{-\frac{h^2}{2\sigma_2^2h_1^2}}\mathrm{d}h_1 \\
\quad = \lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{|h_1|}\frac{h}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\mathrm{e}^{-\frac{h_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{h^2}{2\sigma_2^2h_1^2}}\mathrm{d}h_1 + \lim\limits_{x\to 0^-}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{|h_1|}\frac{h}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\mathrm{e}^{-\frac{h_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{h^2}{2\sigma_2^2h_1^2}}\mathrm{d}h_1 \\
\quad = 2\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{h_1}\frac{h}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\mathrm{e}^{-\frac{h_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{h^2}{2\sigma_2^2h_1^2}}\mathrm{d}h_1 \\
\text{令}v = \dfrac{h_1^2}{\sigma_1^2},\ p(h) = 2\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{h}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\frac{1}{h_1}\times\frac{\sigma_1^2}{h_1}\mathrm{e}^{-v-\frac{h^2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2v}}\mathrm{d}v \\
\qquad = \dfrac{h}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{2\sigma_1^2}{h_1^2}\mathrm{e}^{-v-\frac{h^2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2v}}\mathrm{d}v = \frac{h}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^{+\infty}\frac{1}{v}\mathrm{e}^{-v-\frac{h^2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2v}}\mathrm{d}v \\
\qquad = \dfrac{2h}{\sigma_1^2\sigma_2^2}K_0\left(\dfrac{|h|}{\sigma_1\sigma_2}\right),\ h\neq 0
\end{cases}
\tag{11}
$$

根据定理 1 可知, 在高架桥场景下, 复合信道概率密度函数在非零点处符合第 2 类修正 Bessel 函数 K_0 分布, 且具有连续性与可积性. 由其符合 K_0 分布, 可推出复合信道具有长尾特性, 该性质对无线通信系统设计与优化具有重要意义.

6 总 结

本文针对高架桥场景下的高铁复合无线通信信道, 提出了一种基于小尺度衰落模型的复合信道的形式化建模方法. 针对复合信道的长尾分布特性, 本文证明了基站信号经高铁车顶天线转发至用户终端这一复合信道的概率

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

密度函数符合第 2 类修正 Bessel 函数的分布. 在建模过程中, 本文在高阶逻辑定理证明器 HOL Light 中构建了扩展实数基础与信息论基础, 为复合信道建模提供了坚实的理论支撑. 这一工作为高铁通信信道的形式化建模与验证提供了可靠的理论指导, 也为后续其他复杂通信场景下的信道模型形式化建模与验证提供了通用的形式化建模框架, 探索了实际通信场景形式化验证的可能性.

References

[1] Zhong ZD, Guan K, Chen W, Ai B. Challenges and perspective of new generation of railway mobile communications. ZTE Technology Journal, 2021, 27(4): 44–50 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.12142/ZTETJ.202104009]

[2] Wang YF. Application of high speed railway signal system based on wireless communication technology. Smart City Application, 2019, 2(1): 29–31 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.33142/sca.v2i1.130]

[3] Feng YH, Zheng M, Bu ZY. Modelling and simulating radio channel in high-speed rail environment. Computer Applications and Software, 2013, 30(3): 96–99, 169 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3969/j.issn.1000-386x.2013.03.026]

[4] Wang XL Wang HQ, Li X, Yang DK. Channel estimation method for massive MIMO system in rice channel. Telecommunications Science, 2017, 33(9): 10–19 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.11959/j.issn.1000-0801.2017257]

[5] Zhang YK, Wang GP, Ye RY. Composite wireless channel characteristics for communication systems on viaducts of high-speed railway. ZTE Technology Journal, 2021, 27(4): 30–35 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.12142/ZTETJ.202104007]

[6] Hasan O, Tahar S. Formal verification methods. In: Khosrow-Pour M, ed. Encyclopedia of Information Science and Technology. 3rd ed., Hershey: IGI Global Scientific Publishing, 2015. 7162–7170. [doi: 10.4018/978-1-4666-5888-2.ch705]

[7] Ferrari A, Beek MHT. Formal methods in railways: A systematic mapping study. ACM Computing Surveys, 2022, 55(4): 69. [doi: 10.1145/3520480]

[8] Mhamdi T, Hasan O, Tahar S. Formalization of entropy measures in HOL. In: Proc. of the 2nd Int'l Conf. on Interactive Theorem Proving. Berg en Dal: Springer, 2011. 233–248. [doi: 10.1007/978-3-642-22863-6_18]

[9] Mhamdi T. Information-theoretic analysis using theorem proving [Ph.D. Thesis]. Montréal: Concordia University, 2012.

[10] Helali G, Hasan O, Tahar S. Formal analysis of information flow using min-entropy and belief min-entropy. In: Proc. of the 16th Brazilian Symp. on Formal Methods: Foundations and Applications. Brasilia: Springer, 2013. 131–146. [doi: 10.1007/978-3-642-41071-0_10]

[11] Hu FY, Ling Z, Liu TD, Li HL, Ai B. Wireless perception of high-speed railway communication: Challenges, framework, and future directions. IEEE Wireless Communications, 2024, 31(4): 284–292. [doi: 10.1109/MWC.022.2200630]

[12] Zhou T, Li HY, Wang Y, Liu L, Tao C. Channel modeling for future high-speed railway communication systems: A survey. IEEE Access, 2019, 7: 52818–52826. [doi: 10.1109/ACCESS.2019.2912408]

[13] Zhao YR, Wang XY, Wang GP, He RS, Zou YL, Zhao ZY. Channel estimation and throughput evaluation for 5G wireless communication systems in various scenarios on high speed railways. China Communications, 2018, 15(4): 86–97. [doi: 10.1109/CC.2018.8357743]

[14] Lin SH, Wang HY, Li WY, Wang JY. Coverage analysis for high-speed railway communications with narrow-strip-shaped cells over Suzuki fading channels. Entropy, 2024, 26(8): 657. [doi: 10.3390/e26080657]

[15] Mhamdi T, Hasan O, Tahar S. Formalization of measure and Lebesgue integration over extended reals in HOL. Technical Report, MLX TR11, Concordia University, 2011.

[16] Mhamdi T, Hasan O, Tahar S. Formalization of measure theory and Lebesgue integration for probabilistic analysis in HOL. ACM Trans. on Embedded Computing Systems (TECS), 2013, 12(1): 13. [doi: 10.1145/2406336.2406349]

[17] Boldo S, Clément F, Faissole F, Martin V, Mayero M. A Coq formalization of Lebesgue integration of nonnegative functions. Journal of Automated Reasoning, 2022, 66(2): 175–213. [doi: 10.1007/s10817-021-09612-0]

[18] Boldo S, Clément F, Martin V, Mayero M, Mouhcine H. A Coq formalization of Lebesgue induction principle and Tonelli's theorem. In: Proc. of the 25th Int'l Symp. on Formal Methods. Lübeck: Springer, 2023. 39–55. [doi: 10.1007/978-3-031-27481-7_4]

[19] Qasim M. Formalization of normal random variables [Ph.D. Thesis]. Montréal: Concordia University, 2016.

[20] Yin XN, Wang GH, Shi ZP, Guan Y, Zhang QY, Zhang JZ. High-order-logical modeling and verification of region coverage algorithm with swarm robots. Journal of Chinese Computer Systems, 2022, 43(3): 475–482 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.20009/j.cnki.21-1106/TP.2021-0576]

[21] Liu LY, Hasan O, Tahar S. Formal reasoning about finite-state discrete-time Markov chains in HOL. Journal of Computer Science and Technology, 2013, 28(2): 217–231. [doi: 10.1007/s11390-013-1324-6]

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

[22] Liu LY, Hasan O, Aravantinos V, Tahar S. Formal reasoning about classified Markov chains in HOL. In: Proc. of the 4th Int'l Conf. on Interactive Theorem Proving. Rennes: Springer, 2013. 295–310. [doi: 10.1007/978-3-642-39634-2_22]

[23] Dunchev C, Helali G, Hasan O, Tahar S. Formalization of DPI and Jensen's inequality in HOL. Technical Report, DPI TR16, Concordia University, 2016.

附中文参考文献

[1] 钟章队, 官科, 陈为, 艾渤. 铁路新一代移动通信的挑战与思考. 中兴通讯技术, 2021, 27(4): 44–50. [doi: 10.12142/ZTETJ.202104009]

[2] 王亚飞. 基于无线通信技术的高速铁路信号系统应用. 智能城市应用, 2019, 2(1): 29–31. [doi: 10.33142/sca.v2i1.130]

[3] 冯业浩, 郑敏, 卜智勇. 高速铁路环境下的无线信道建模与仿真. 计算机应用与软件, 2013, 30(3): 96–99, 169. [doi: 10.3969/j.issn.1000-386x.2013.03.026]

[4] 王雪丽, 王海泉, 李肖, 杨大款. 莱斯衰落信道下大规模 MIMO 系统中的信道估计方法. 电信科学, 2017, 33(9): 10–19. [doi: 10.11959/j.issn.1000-0801.2017257]

[5] 张逸康, 王公仆, 叶如意. 高速铁路高架桥场景中的复合无线信道特性. 中兴通讯技术, 2021, 27(4): 30–35. [doi: 10.12142/ZTETJ.202104007]

[20] 尹晓娜, 王国辉, 施智平, 关永, 张倩颖, 张景芝. 群机器人区域覆盖算法高阶逻辑建模与验证. 小型微型计算机系统, 2022, 43(3): 475–482. [doi: 10.20009/j.cnki.21-1106/TP.2021-0576]

作者简介

买宁, 硕士, 主要研究领域为形式化验证, 高可靠嵌入式系统.

关永, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 专业会员, 主要研究领域为形式化验证, 高可靠嵌入式系统.

陈善言, 博士, 主要研究领域为形式化验证, 高可靠嵌入式系统.

王国辉, 博士, 高级实验师, CCF 专业会员, 主要研究领域为形式化验证, 高可靠嵌入式系统.

李希萌, 博士, 副教授, CCF 专业会员, 主要研究领域为形式化方法, 软件验证.

施智平, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为形式化验证, 视觉信息处理.

www.jos.org.cn