

单球驱动平衡机器人运动学和动力学形式化验证*

张善强¹, 张景芝¹, 施智平^{1,2}, 王国辉^{1,2}, 关永^{1,3}

¹(首都师范大学 信息工程学院, 北京 100048)

²(电子系统可靠性技术北京市重点实验室 (首都师范大学), 北京 100048)

³(轻型工业机器人与安全验证北京市重点实验室 (首都师范大学), 北京 100048)

通信作者: 张景芝, E-mail: 6835@cnu.edu.cn



摘 要: 单球驱动平衡机器人是一种具有全向运动性的机器人, 其灵活性能在狭小或复杂环境中得到充分体现, 因此受到广泛关注. 在该型机器人运动学和动力学设计过程中, 保证其模型的正确性至关重要. 基于测试和仿真的传统方法难以穷尽系统所有状态, 因此可能无法捕捉到某些设计缺陷或潜在的安全风险. 为确保单球驱动平衡机器人满足安全攸关机器人的正确性、安全性验证要求, 在定理证明器 HOL Light 中, 基于实分析库、矩阵分析库、机器人运动学和动力学库等定理证明库, 构建单球驱动平衡机器人运动学和动力学的形式化模型, 并进行高阶逻辑推导与证明.

关键词: 单球驱动平衡机器人; 运动学和动力学; 形式化验证; 定理证明; HOL Light

中图法分类号: TP311

中文引用格式: 张善强, 张景芝, 施智平, 王国辉, 关永. 单球驱动平衡机器人运动学和动力学形式化验证. 软件学报, 2025, 36(8): 3462–3476. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/7345.htm>

英文引用格式: Zhang SQ, Zhang JZ, Shi ZP, Wang GH, Guan Y. Formal Verification of Kinematics and Dynamics of Single-sphere Driven Balancing Robot. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2025, 36(8): 3462–3476 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/7345.htm>

Formal Verification of Kinematics and Dynamics of Single-sphere Driven Balancing Robot

ZHANG Shan-Qiang¹, ZHANG Jing-Zhi¹, SHI Zhi-Ping^{1,2}, WANG Guo-Hui^{1,2}, GUAN Yong^{1,3}

¹(Information Engineering College, Capital Normal University, Beijing 100048, China)

²(Beijing Key Laboratory of Electronic System Reliability Technology (Capital Normal University), Beijing 100048, China)

³(Beijing Key Laboratory of Light Industrial Robots and Safety Verification (Capital Normal University), Beijing 100048, China)

Abstract: The single-sphere driven balancing robot is an omnidirectional mobile robot, whose flexibility is particularly evident in narrow or complex environments. During the design of the kinematics and dynamics for this type of robot, it is crucial to ensure the correctness of the model. Traditional methods based on testing and simulation may not cover all system states and thus might fail to identify certain design flaws or potential safety risks. To ensure that the single-sphere driven balancing robot satisfies the correctness and safety verification requirements for safety-critical robots, a formal model of its kinematics and dynamics is constructed using the HOL Light theorem prover. The model is based on theorem libraries such as the real analysis library, matrix analysis library, and robot kinematics and dynamics library, and involves higher-order logic derivation and proof.

Key words: single-sphere driven balance robot; kinematics and dynamics; formal verification; theorem proving; HOL Light

单球驱动平衡机器人主要由球轮、驱动系统、机身 3 大部件组成, 该型机器人利用驱动滚轮与底部支撑球体之间的摩擦产生驱动力, 实现机器人的自平衡、自旋以及全方位移动^[1]. 此类机器人相较于其他轮式机器人最大

* 基金项目: 国家自然科学基金 (62272323, 62272322, 62372312)

本文由“形式化方法与应用”专题特约编辑陈明帅研究员、田聪教授、熊英飞副教授推荐.

收稿时间: 2024-08-24; 修改时间: 2024-10-14; 采用时间: 2024-11-26; jos 在线出版时间: 2024-12-10

CNKI 网络首发时间: 2025-04-17

的优势在于, 利用球体作为驱动轮, 对地形的变化具有较强的适应性. 在运动时能够在受空间限制的环境中实现转向、小半径转弯以及原地进行任意方向的移动, 在运输^[1]、搜救^[2]、医疗服务^[3]等领域都具有广阔的应用前景.

未来的世界将迎来人机共处的新时代, 机器人的普及为人类带来了巨大的便利. 然而, 随着机器人具备了自主运动能力, 与之相关的安全隐患也日益凸显. 机器人故障可能影响效率或引发事故. 2014 年 1 月, 嫦娥三号玉兔月球车因机构控制出现故障而一度进入休眠^[4]. 2016 年 11 月, 在第 18 届中国国际高新技术成果交易会上, 一台服务机器人在无外部指令的情况下突发故障, 冲撞展台并损坏玻璃结构, 导致部分设备受损, 并造成现场人员受伤^[5]. 2024 年 1 月, 美国得克萨斯州某超级工厂发生机器人相关事故, 一名工程师在维修过程中遭机械臂抓伤^[6].

机器人安全隐患已经成为机器人技术普及的重要阻碍, 特别是在人机交互机器人中. 因此, 在执行各项任务时的单球驱动平衡机器人将面临一个至关重要的问题. 以货物运输为例, 机器人是否能够准时且准确地沿指定路线到达目的地. 在人机互动的场景中, 如何有效避免碰撞和倾倒, 确保人员安全, 显得尤为关键. 鉴于此, 深入研究单球驱动平衡机器人的运动学和动力学问题, 不仅会提高其运动性能, 更有利于确保其运动的正确性与安全性.

对单球驱动平衡机器人的运动学和动力学建模和分析时, 传统方法主要包括纸笔演算、数值计算和计算机代数系统. 由于在运动学和动力学分析的过程中, 涉及等式代换和求导等复杂运算, 纸笔演算的方法耗时费力, 容易引入人为错误; 计算机数值计算方法指利用计算机软件进行数值计算, 这只能给出待解问题的数值解, 但无法揭示问题的内在逻辑和根本原理, 这对于安全攸关的机器人系统, 显然是不够的; 计算机代数系统比如 Mathematica 能够高效进行符号代数运算, 但是系统的核心包含未经验证的符号算法^[7], 可能为机器人运动学和动力学模型分析引入缺陷. 运动学和动力学的研究对于单球驱动平衡机器人的安全性和正确性十分重要, 仅依赖这些传统技术手段可能会带来灾难性后果.

定理证明的形式化方法^[8]克服了传统方法的局限性, 它使用数学逻辑描述系统及其性质, 借助相应的数学知识对系统设计的性质进行形式化推导. 使用定理证明的方法对机器人运动学和动力学进行建模和分析, 避免了纸笔证明、计算机数值模拟和计算机符号计算的局限性. 进而, 机器人系统的安全性和可靠性获得了强有力的保障. 因此, 采用定理证明的形式化方法对单球驱动平衡机器人运动学和动力学模型进行分析和验证, 可以保证系统的正确性和完备性.

本文使用高阶逻辑定理证明器 HOL Light 对单球驱动平衡机器人的运动学和动力学模型进行形式化验证, 主要贡献如下.

- (1) 形式化建模和验证单球驱动平衡机器人正向运动学模型.
- (2) 形式化建模和验证单球驱动平衡机器人机身和球轮的速度模型.
- (3) 形式化建模和推导单球驱动平衡机器人拉格朗日动力学模型.

本文第 1 节介绍单球驱动平衡机器人运动学动力学形式化验证的相关工作. 第 2 节介绍 HOL Light 定理证明器和单球驱动平衡机器人. 第 3 节介绍单球驱动平衡机器人运动学及其形式化建模和验证. 在第 3 节对单球驱动平衡机器人末端速度形式化验证的基础上, 第 4 节进一步通过拉格朗日方程法分析单球驱动平衡机器人的动力学, 并对其拉格朗日动力学方程进行高阶逻辑建模和推导. 第 5 节总结全文.

1 相关工作

为使读者更清晰地了解单球驱动平衡机器人的发展历程, 且鉴于现有研究尚未涉及其运动学和动力学的形式化验证, 本文的相关工作将首先介绍该机器人的研究现状, 并探讨定理证明方法在其他类型机器人中的应用, 为本研究工作的进一步开展奠定基础.

1.1 单球驱动平衡机器人研究现状

近年来, 单球驱动平衡机器人领域的研究取得了丰硕的成果. Lauwers 等人^[9]把该型机器人简化为一个倒立摆模型, 并使用拉格朗日方程法对其动力学进行建模. Satici 等人^[10]分析了单球驱动平衡机器人的运动学以及应用

拉格朗日方程法对 XOZ 面进行动力学建模. Kumagai 等人^[1]对单球驱动平衡机器人进行了改进, 通过 3 个全向轮与底部支撑球体的摩擦产生驱动力, 控制平衡、自旋以及全方位移动, 使其运动更加稳定. 之后, Fankhauser 等人^[11]基于全三维动力学模型, 使得该型机器人不仅在球体上保持了动态平衡, 还显著提升了灵活性和运动能力. 为使该型机器人的方向控制更加容易, You 等人^[12]利用麦克纳姆轮的全向特性, 设计出了一种麦克纳姆轮驱动的单球驱动平衡机器人.

上述单球驱动平衡机器人的研究现状有助于加深对该型机器人的理解, 为进一步分析其运动学和动力学, 并进行后续验证提供了基础. 本文验证的是 Satıcı 等人^[10]的工作, 对该机器人的运动学和 XOZ 面的动力学方程进行形式化验证. 在此基础上, 为了提高控制的稳定性, 本文还构建并验证了 XOY 面的动力学方程.

1.2 定理证明方法在机器人运动学和动力学领域的应用

在现代机器人系统的研究与应用中, 运动学和动力学的正确性对于确保系统的安全至关重要. 比如, 在高危行业如核设施管理中, 自动化搬运机器人系统对安全性和可靠性的需求极为严格. 这些机器人负责处理和运输放射性或危险物质, 任何系统故障都可能威胁人员安全并造成环境风险. 近年来, 形式化验证已成为开发这些安全攸关型机器人系统的一个关键方法, 以确保它们的功能安全与操作可靠性^[13]. 这种方法不仅提高了机器人系统的整体性能, 也显著提升了它们在关键应用中的安全标准.

在机器人运动学领域, Farooq 等人^[14]在 HOL Light 定理证明器中, 应用 HOL Light 的几何理论对双连杆平面机械手运动学进行形式化分析, 并将其用于分析二维仿人步行机器人; Affeldt 等人^[15]在 Coq 定理证明器^[16]中形式化了反对称矩阵和四元数的指数等理论, 并对等距同构、齐次表示、DH 标定等刚体变换的表示进行了形式化, 在此基础上, 实现了串联机器人运动学模型的构建与验证; Wu 等人^[17]在 HOL4 中建立旋量理论, 结合 HOL4 中的几何理论, 形式化分析了六自由度串联机器人的运动学; 陈琦等人^[18]在 HOL Light 定理证明器中形式化描述平面并联机构的相关数学理论, 建立正向运动学的高阶逻辑模型, 验证正向运动学的一般性求解算法, 从而确保了平面并联机构运动学分析的正确性和分析求解方法的可靠性; 谢果君等人^[19]在 Coq 定理证明器中对 DH 坐标系进行形式化建模, 构建了机械臂正向运动学的形式化定义, 并对机械臂运动的可分解性进行了形式化验证, 还对工业机器人中常见的连杆结构及机器人进行形式化建模, 并完成了正向运动学的形式化验证.

在机器人动力学领域, Abed 等人^[20]在 HOL Light 定理证明器中, 对导航和飞机等的坐标框架进行形式化, 确保了飞机的正确方向和位置, 并形式化无人机的连续动力学, 最后, 对无人机进行形式化稳定性分析; Rashid 等人^[21]使用高阶定理证明器 HOL Light, 通过对注射器、相机和平台等部件的形式化建模以及它们之间相互关系的形式化验证, 并实现注射器移动的形式化, 进而对细胞注射机器人动力学分析进行了形式化验证.

另外, 张景芝^[22]在其博士论文中, 对齐次矩阵、齐次向量、矩阵值函数的微分、空间速度、矩阵伴随变换等机器人运动学基础进行了形式化定义以及相关定理的形式化证明. 除此之外, Zhang 等人^[23]在 HOL Light 定理证明器中实现了泛函变分理论的形式化验证. 在此基础上, Guan 等人^[24]在 HOL Light 定理证明器中建立拉格朗日力学的形式化定理库, 为拉格朗日力学的应用奠定了必要的基础. 基于以上相关工作, 本文使用定理证明器 HOL Light 对单球驱动平衡机器人运动学和动力学进行形式化验证.

2 基础知识

2.1 HOL Light 定理证明器

HOL Light^[25]是国际上最著名的交互式定理证明器之一, 它采用了 OCaml 语言 (一个强类型函数式编程语言 ML 的衍生变体) 作为其定理证明的编程基础^[26]. HOL Light 的理论框架由类型、常数、定义以及定理构成, 新的定理则是通过应用基本公理、原始推理规则以及之前验证过的定理和推理规则得出的^[27]. 在 HOL Light 中, 证明一个目标通常遵循形式 $A_1, A_2, \dots, A_n \implies G$, 其中 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 代表一系列假设或前提条件, 而 G 是需要被证明的结论. 定理的证明过程涉及策略的反复使用和已知定理的应用, 直至与已知条件相匹配, 从而实现定理证明的目标.

目前, 在 HOL Light 定理证明器中存在实分析库、矩阵分析库、机器人运动学库和机器人动力学库等定理

库. 这些定理库为本文的工作提供了基础支持. 因此, 本文选择使用 HOL Light 定理证明器对单球驱动平衡机器人运动学和动力学进行形式化验证. 为了方便对其他部分的理解, 这里对 HOL Light 定理证明器中一些常用的符号和函数进行说明, 如表 1 所示.

表 1 HOL Light 中的符号与函数

HOL Light符号	标准符号	含义
$\wedge$	与	逻辑与
$\implies$	$\Rightarrow$	推出
$--$	$-$	负号
$!$	$\forall$	对所有的
$?$	$\exists$	存在
$\backslash$	λ	定义函数
$\&x$	x	从自然数到实数的类型转换
$v\$i$	v_i	向量 v 的第 i 个分量
$A**B$	AB	矩阵乘
$c\%v$	cv	向量标量乘
$c\%\%A$	cA	矩阵标量乘
$xcrossy$	$x\times y$	向量的外积
$vec0$	$\vec{0}$	零向量
$basis3$	e_3	单位向量 $[0,0,1]^T$
$matrix_invA$	A^{-1}	矩阵 A 的逆
$x\ IN\ S$	$x\in S$	x 属于集合 S

2.2 单球驱动平衡机器人

单球驱动平衡机器人主要构成包括 3 个核心部分, 分别是球轮、驱动系统以及机器人的机身. 一般情况下, 机身与驱动系统设计为一体, 机身部分整合了驱动系统 (包括电机和驱动滚轮) 及其他关键组件, 如电池和惯性测量单元等^[9].

单球驱动平衡机器人的驱动系统由电机驱动、驱动皮带和驱动滚轮等组成. 这些驱动滚轮紧贴 in 球体的赤道线上^[28]. 驱动滚轮通过驱动皮带与电机相连, 借助于驱动滚轮与球体之间的摩擦力驱动球体移动. 如图 1 所示. 偏航轴承是一种旋转轴承, 主要用于控制机身的旋转. 编码器作为关键的反馈传感器, 用于精确测量机器人的位置和运动. 编码器能够准确检测旋转角度和直线位移, 为机器人的精确运动提供数据支持. 皮带张紧器则用于调节皮带的松紧度.

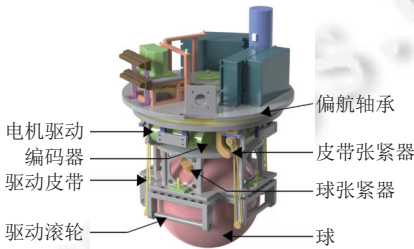


图 1 驱动系统

单球驱动平衡机器人是一种典型的欠驱动系统, 欠驱动系统是指独立控制输入的维数少于系统自由度的系统, 本质上属于非线性系统. 通过减少驱动器数量, 不仅可以简化设计, 提高系统的灵活性, 还能够有效降低成本, 减少系统的重量和体积, 并降低能耗. 在实际工程应用中, 使用少于标准数量的执行器来实现系统控制是一项具有挑战性的尝试. 欠驱动系统作为一种特殊的非线性系统, 其研究有助于深化对一般非线性系统的控制问题的理解.

尽管欠驱动特性在设计和制造上带来了便利,但也使得系统的动力学特性相比全驱动系统更加复杂.因此,研究单球驱动平衡机器人不仅具有推动自动控制理论,尤其是非线性控制理论发展的重要理论意义,更具有显著的实际应用价值.

3 单球驱动平衡机器人运动学分析及其形式化验证

3.1 单球驱动平衡机器人运动学分析

单球驱动平衡机器人依靠一个球作为驱动元件,而非传统的轮子.这种驱动方式具有全方位运动的能力,即机器人可以在任意方向上移动,而不需要转向.机器人机身的姿态变化与球轮的运动直接相关,随着球轮的旋转,机器人机身会发生倾斜,通常为了保持平衡需要对其进行动态调整,即球轮以任何方向运动,机身的姿态也要相应调整.

随着球的滚动,机身相对于球轮会发生变化.球轮的运动引起的坐标变换是复杂的,因为球是一个全方位的驱动元件,其旋转并不局限于单个轴向,需要时刻计算球的转动角度及其对机身位置和姿态的影响.单球驱动平衡机器人需要精确的运动规划和控制策略,特别是在加速、减速和转弯等过程中.由于它的球轮能够全方位运动,运动学和动力学模型要更复杂,需要考虑到球轮与地面之间的接触点以及机身重心的变化.

在机器人学中,通过齐次变换矩阵^[29] g_{ij} 表示刚体坐标系 j 相对于刚体坐标系 i 的位置和姿态,其表达形式为 $\begin{bmatrix} R_{ij} & p_{ij} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 其中, R_{ij} 是三阶旋转矩阵,表示刚体坐标系 j 相对于刚体坐标系 i 的旋转; 向量 p_{ij} 描述了刚体坐标系 j 的原点在刚体坐标系 i 中的位置,由一个三维向量给出; 通过齐次变换矩阵的正逆变换和相乘操作,可实现位姿的变换.

机器人运动学通常分为正向运动学和逆向运动学.正向运动学的求解依赖于位姿矩阵,该矩阵用于表示刚体的位置和姿态.与之相关的速度则涉及对位姿矩阵的求导.空间速度的物理意义是刚体上的某一点通过惯性坐标系原点的瞬时速度; 相对速度由线速度和角速度的列向量组成,表示刚体的总运动; 反对称矩阵的应用源于其优良的数学性质以及其与向量叉乘运算的等效性.

在正向运动学分析中,对于具有 n 个关节的串联机器人,已知刚体坐标系 l_k 相对于刚体坐标系 l_{k-1} 的齐次变换矩阵 $g_{l_{k-1}l_k}$,则末端刚体坐标系 j 相对于刚体坐标系 i 的位姿可以通过矩阵相乘得到.如公式 (1) 所示:

$$g_{ij} = g_{il_1} * g_{l_1l_2} * \dots * g_{l_{n-1}l_n} * g_{l_nj} \quad (1)$$

在通过齐次变换矩阵的乘积获得末端位姿之后,还需要确定空间速度和末端速度的表示,此时需要求解末端位姿的导数以及其逆矩阵.虽然 $\dot{g}_{ij}$ 本身并没有特别的物理意义,但是 $\dot{g}_{ij}g_{ij}^{-1}$ 却非常关键,其计算结果

$$\dot{g}_{ij}g_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{R}_{ij} & \dot{p}_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{ij}^T & -R_{ij}^T p_{ij} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{R}_{ij}R_{ij}^T & -\dot{R}_{ij}R_{ij}^T p_{ij} + \dot{p}_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 其中, } \hat{\omega}_{ij} = \dot{R}_{ij}R_{ij}^T \text{ 和 } v_{ij} = -\dot{R}_{ij}R_{ij}^T p_{ij} + \dot{p}_{ij}; \text{ 定义空间速度 } \hat{V}_{ij} = \dot{g}_{ij}g_{ij}^{-1} \text{ 和 相对速度 } V_{ij} = \begin{bmatrix} v_{ij} \\ \omega_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{R}_{ij}R_{ij}^T p_{ij} + \dot{p}_{ij} \\ (\dot{R}_{ij}R_{ij}^T)^\vee \end{bmatrix}, \text{ 则空间速度表示如公式 (2) 所示:}$$

$$\hat{V}_{ij} = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_{ij} & v_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中, v_{ij} 表示刚体坐标系 j 相对于刚体坐标系 i 的线速度, ω_{ij} 表示刚体坐标系 j 相对于刚体坐标系 i 的角速度, $\hat{\omega}_{ij}$ 表示

ω_{ij} 的反对称矩阵, $\vee$ 为 $\wedge$ 的逆操作^[30], 即由反对称矩阵变换为对应的向量. 假设 $\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$, 则 $\hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}$, 且有 $(\hat{\omega})^\vee = \omega$.

由上述可知,末端速度的表示如公式 (3) 所示:

$$\dot{p}_{ij} = v_{ij} + \hat{\omega}_{ij} p_{ij} \quad (3)$$

单球驱动平衡机器人的结构如图 2 所示,该机器人由刚性球轮和刚性圆柱体构成,机身不能相对球轮平移,但可以自由移动.因此,机器人的构型空间为 $Q = \mathbb{R}^2 \times SO(3) \times SO(3)$. 其中,坐标系 S 是惯性坐标系,坐标系 B 和坐标

系 T 分别在球轮和机身的质心, l 是机身质心与球轮质心的距离^[30].

对于单球驱动平衡机器人而言, 其运动学研究涵盖了正向运动学、空间速度及末端速度. 在对单球驱动平衡机器人的正向运动学分析中, 通过坐标系 B 相对于惯性系 S 的齐次矩阵 g_{sb} 和坐标系 T 相对于坐标系 B 的齐次矩阵 g_{bt} 的乘积来确定末端位姿 g_{st} . 此外, 该机器人的空间速度 $\hat{V}_{bt}$ 可通过计算位姿矩阵的导数 $\dot{g}_{bt}$ 与位姿矩阵的逆矩阵 g_{bt}^{-1} 的乘积得到. 最后, 在确定了末端位姿和空间速度的基础上, 可以进一步确定机器人的末端速度 $\dot{p}_{st}$.

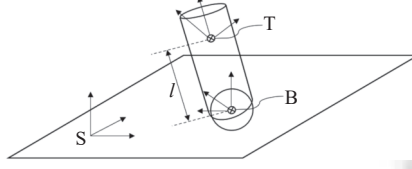


图2 单球驱动平衡机器人模型图

3.2 正向运动学形式化验证

末端位姿, 即坐标系 T 相对于惯性系 S 的位姿, 由坐标系 B 相对于惯性系 S 的位姿和坐标系 T 相对于坐标系 B 的位姿通过矩阵相乘得到. 由公式 (1) 得, 如下:

$$g_{st} = g_{sb}g_{bt} = \begin{bmatrix} R_{sb} & p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{bt} & lR_{bt}e_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sb}R_{bt} & R_{sb}lR_{bt}e_3 + p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{st} & R_{sb}lR_{bt}e_3 + p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中, g_{st} 表示坐标系 T 相对于惯性系 S 的位姿, g_{sb} 表示坐标系 B 相对于惯性系 S 的位姿, g_{bt} 表示坐标系 T 相对于坐标系 B 的位姿, R_{st} 表示坐标系 T 相对于惯性系 S 的旋转矩阵, R_{sb} 表示坐标系 B 相对于惯性系 S 的旋转矩阵, R_{bt} 表示坐标系 T 相对于坐标系 B 的旋转矩阵, p_{sb} 表示坐标系 B 相对于惯性系 S 的位置向量, e_3 表示单位向量 $[0, 0, 1]^T$. 对公式 (4) 进行形式化描述如定理 1 所示.

定理 1. 末端位姿.

$!gsb \ gbt \ gst \ pbt \ Rst \ psb \ pst \ Rbt \ Rsb \ t \ l$.

[A1]: $gsb = (\backslash t.homo_trans(psb \ t)(Rsb \ t))/\backslash$

[A2]: $gbt = (\backslash t.homo_trans(pbt \ t)(Rbt \ t))/\backslash$

[A3]: $pbt = (\backslash t.l\% (Rbt \ t) \ast (basis \ 3))/\backslash$

[A4]: $Rst = (\backslash t.(Rsb \ t) \ast (Rbt \ t))/\backslash$

[A5]: $gst = (\backslash t.gsb(t) \ast gbt(t))$

[G1]: $==> \ gst = (\backslash t.homo_trans(psb \ t + Rsb \ t \ast l\% (Rbt \ t) \ast (basis \ 3))(Rstt)),$

其中, $homo_trans$ 表示给定位置向量和旋转矩阵返回对应的齐次变换矩阵; 条件 A1 和条件 A2 分别是 $gsb = \begin{bmatrix} R_{sb} & p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $gbt = \begin{bmatrix} R_{bt} & p_{bt} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的形式化表示; $\backslash t$ 表示函数的自变量为 t ; 条件 A3 是 $p_{bt} = lR_{bt}e_3$ 的形式化表示; 条件 A4 和条件 A5 分别是 $R_{st} = R_{sb}R_{bt}$ 和 $gst = g_{sb}g_{bt}$ 的形式化表示; 目标 G1 是 $gst = \begin{bmatrix} R_{st} & R_{sb}lR_{bt}e_3 + p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的形式化表示.

定理 1 的证明首先通过采用 SIMP_TAC 策略将条件 A5 代入到目标 G1 中, 其次将条件 A1–A4 代入到当前目标, 随后应用矩阵乘法定理进行重写, 以此完成该定理的证明.

在定理证明的过程中, 是以目标为导向的, 所有的条件都是为了服务最终的证明目标, 直到该目标被证明完成. 在数学表示和计算中, 齐次矩阵 g 、旋转矩阵 R 和位置向量 p 虽然常以简单的符号形式出现, 但这些符号实际上代表了更为具体的数学对象或函数. 在形式化的数学表示中, 这些矩阵和向量的函数属性被明确表示出来, 从而保证了形式化证明的严谨性和正确性.

形式化验证过程通常要求扎实的数学理论基础, 不仅需要明确每个变量的类型, 还需在推理过程中灵活应用

多种策略和定理, 这些都使得形式化验证成为一项颇具挑战的任务.

3.3 空间速度形式化验证

在运动过程中, 单球驱动平衡机器人展现出了包括旋转和平移的复合运动特性, 因此, 这种机器人的速度是由其旋转速度和平移速度共同构成的. 空间速度 $\hat{V}_{bt}$, 即坐标系 T 相对于坐标系 B 的速度, 由坐标系 T 相对于坐标系 B 的位姿的导数 $\dot{g}_{bt}$ 和其逆 g_{bt}^{-1} 的乘积表示, 由公式 (2) 得, 具体计算过程如下.

$$\hat{V}_{bt} = \dot{g}_{bt} g_{bt}^{-1} = \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} R_{bt} & lR_{bt}e_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} R_{bt}^T & -le_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{bt}R_{bt} & l\dot{\omega}_{bt}R_{bt}e_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{bt}^T & -le_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{bt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中, R_{bt}^T 表示坐标系 T 相对于坐标系 B 的旋转矩阵的转置, ω_{bt} 表示坐标系 T 相对于坐标系 B 的角速度, $\dot{\omega}_{bt}$ 表示 ω_{bt} 的反对称矩阵^[30]. 公式 (5) 通过矩阵求导、矩阵求逆和矩阵相乘得到坐标系 T 相对于坐标系 B 的线速度为 0. 对公式 (5) 进行形式化描述如定理 2 所示.

定理 2. 空间速度.

$!g_{bt} R_{bt} R_{bt}^T t l$.

[A1]: $(!t.rotation_matrix(R_{bt} t)) / \backslash$

[A2]: $(R_{bt} has_v1matrix_derivative(R_{bt}^T t))(at t) / \backslash$

[A3]: $g_{bt} = (\backslash t.homo_trans((l \% (R_{bt} t)) * (basis 3))(R_{bt} t)) / \backslash$

[G1]: $==> spatial_velocity g_{bt} UNIV t =$

$twist_wedge(pastecart(vec 0 : real^3)(matrix3_vee(spatial_velocity R_{bt} UNIV t))),$

其中, $spatial_velocity$ 表示给定位姿矩阵返回该位姿矩阵的导数和逆的乘积, $twist_wedge$ 表示线速度和角速度的组合, $pastecart$ 表示两个向量的拼接, $matrix3_vee$ 表示给定反对称矩阵返回对应的向量. 条件 A1 是 R_{bt} 是旋转矩阵的形式化表示; 条件 A2 是旋转矩阵 R_{bt} 有导函数 $\dot{R}_{bt}$ 的形式化表示; 条件 A3 是 $g_{bt} = \begin{bmatrix} R_{bt} & lR_{bt}e_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的形式化表示; 目标 G1 是 $\dot{g}_{bt} g_{bt}^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{bt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的形式化表示.

定理 2 的证明通过采用 REWRITE_TAC 策略, 将空间速度重写为对应齐次矩阵的导数与其逆矩阵乘积的形式 ($\hat{V}_{bt} = \dot{g}_{bt} g_{bt}^{-1}$). 接着, 证明过程分为两个子目标, 一是证明齐次矩阵求导后的表达式成立 $\left(\frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} R_{bt} & lR_{bt}e_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{bt}R_{bt} & l\dot{\omega}_{bt}R_{bt}e_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$, 在此过程中, 证明 $\dot{R}_{bt} = \dot{\omega}_{bt}R_{bt}$ ^[30] 这一等式, 对齐次矩阵导数的表达式进行代换; 二是证明其求逆后的表达式成立 $\left(\begin{bmatrix} R_{bt} & lR_{bt}e_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{bt}^T & -le_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$. 最终, 结合 SIMP_TAC 策略应用正交矩阵的定义以及齐次零矩阵和齐次矩阵乘法定理, 完成整个证明过程.

3.4 末端速度形式化验证

在应用拉格朗日方程法进行动力学分析过程中, 首先需求解系统的动能和势能, 其中动能包括机身和球轮的动能. 为此, 关键在于确定机身相对于惯性系的速度, 亦即末端速度. 具体计算过程如下所示.

$$\begin{aligned} \dot{p}_{st} &= v_{st} + \omega_{st} \times p_{st} & ① \\ &= v_{sb} + p_{sb} \times R_{sb} \omega_{bt} + \omega_{st} \times p_{st} & ② \\ &= \dot{p}_{sb} - \omega_{sb} \times p_{sb} + p_{sb} \times R_{sb} \omega_{bt} + \omega_{sb} \times p_{st} + R_{sb} \omega_{bt} \times p_{st} & ③ \\ &= \dot{p}_{sb} + \omega_{st} \times (p_{st} - p_{sb}) & ④ \\ &= \dot{p}_{sb} + \omega_{st} \times p_{bt} & ⑤ \\ &= \dot{p}_{sb} + l \omega_{st} \times R_{st} e_3 & ⑥ \end{aligned} \quad (6)$$

其中, p_{st} 是坐标系 T 相对于惯性系 S 的位置向量, $\dot{p}_{st}$ 表示坐标系 T 相对于惯性系 S 的速度, $\dot{p}_{sb}$ 表示坐标系 B 相对于惯性系 S 的速度, v_{st} 表示坐标系 T 相对于惯性系 S 的线速度, “ $\times$ ” 表示向量的叉乘. ① 由上述相对速度 $v_{st} = -\dot{R}_{st} R_{st}^T p_{st} + \dot{p}_{st}$ 结合 $\dot{R}_{st} = \dot{\omega}_{st} R_{st}$ ^[30] 这一等式以及 $\hat{x}y = x \times y$ 运算法则得到; ① 到 ② 则根据公式 (2) 和公式 (5) 得,

$v_{bt} = 0$, 因为 $v_{st} = v_{sb} + R_{sb}v_{bt} + p_{st} \times R_{sb}\omega_{bt}$ ^[30], 故有 $v_{st} = v_{sb} + p_{st} \times R_{sb}\omega_{bt}$; 公式 (5) 的结果为公式 (6) 的进一步简化计算提供了便利。②到③中 v_{sb} 的化简和①类似, 再结合 $\omega_{st} = \omega_{sb} + R_{sb}\omega_{bt}$ ^[30]得到③; 后续的化简过程相对简单, 这里不再详细说明。

公式 (6) 的计算涉及等式代换、向量叉乘和向量减法等性质, 对上式进行形式化描述如定理 3 所示。

定理 3. 末端速度。

$!Rsb\ Rbt\ Rst\ Rsb'\ Rbt'\ psb\ pbt\ gsb\ gbt\ gst\ wsb\ vsb\ wbt\ vbt\ wst\ vst\ t.$

[A1]: $(!t.rotation_matrix(Rsb\ t)) / (!t.rotation_matrix(Rbt\ t)) / \backslash$

[A2]: $(Rsb\ has_v1matrix_derivative(Rsb'\ t))(at\ t) / (Rbt\ has_v1matrix_derivative(Rbt'\ t))(at\ t) / \backslash$

[A3]: $(psb\ has_vector_derivative(psb'\ t))(at\ t) / \backslash$

[A4]: $Rst = (\backslash t.(Rsb\ t) ** (Rbt\ t)) / \backslash gst = (\backslash t.gsb(t) ** gbt(t)) / \backslash$

[A5]: $pst = (\backslash t.psb\ t + Rsb\ t ** l\%Rbt\ t ** basis\ 3) / \backslash pbt = (\backslash t.l\%(Rbt\ t) ** (basis\ 3)) / \backslash$

[A6]: $gsb = (\backslash t.homo_trans(psb\ t)(Rsb\ t)) / \backslash$

$gbt = (\backslash t.homo_trans(pbt\ t)(Rbt\ t)) / \backslash$

$gst = (\backslash t.homo_trans(pst\ t)(Rst\ t)) / \backslash$

[A7]: $vsb = homo_matrix_snd(spatial_velocity\ gsb\ UNIV\ t) / \backslash$

$wsb = matrix3_vee(homo_matrix_fst(spatial_velocity\ gsb\ UNIV\ t)) / \backslash$

$vbt = homo_matrix_snd(spatial_velocity\ gbt\ UNIV\ t) / \backslash$

$wbt = matrix3_vee(homo_matrix_fst(spatial_velocity\ gbt\ UNIV\ t)) / \backslash$

$vst = homo_matrix_snd(spatial_velocity\ gst\ UNIV\ t) / \backslash$

$wst = matrix3_vee(homo_matrix_fst(spatial_velocity\ gst\ UNIV\ t)) / \backslash$

[G1]: $==> vector_derivative\ pst\ (at\ t) =$

$vector_derivative\ psb\ (at\ t) + l\%wst\ cross\ (Rst\ t ** (basis\ 3)),$

其中, $homo_matrix_fst$ 表示取齐次矩阵的第 1 个元素, 得到对应的旋转矩阵; $homo_matrix_snd$ 表示取齐次矩阵的第 2 个元素, 得到对应的位置向量; $vector_derivative$ 表示向量函数的导函数。

条件 A1 是 R_{sb} 和 R_{bt} 是旋转矩阵的形式化表示; 条件 A2 是旋转矩阵 R_{sb} 的导函数为 $\dot{R}_{sb}$ 和旋转矩阵 R_{bt} 的导函数为 $\dot{R}_{bt}$ 的形式化表示; 条件 A3 是位置向量 p_{sb} 的导函数为 $\dot{p}_{sb}$ 的形式化表示; 条件 A4 是 $R_{st} = R_{sb}R_{bt}$ 和 $g_{st} = g_{sb}g_{bt}$ 的形式化表示; 条件 A5 是 $p_{st} = p_{sb} + R_{sb}lR_{bt}e_3$ 和 $p_{bt} = lR_{bt}e_3$ 的形式化表示; 条件 A6 是 $g_{sb} = \begin{bmatrix} R_{sb} & p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $g_{bt} = \begin{bmatrix} R_{bt} & p_{bt} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $g_{st} = \begin{bmatrix} R_{st} & p_{st} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的形式化表示; 条件 A7 表示坐标系 B 相对于惯性系 S、坐标系 T 相对于坐标系 B 以及坐标系 T 相对于惯性系 S 的线速度和角速度; 目标 G1 是 $\dot{p}_{st} = \dot{p}_{sb} + l\omega_{st} \times R_{st}e_3$ 的形式化表示。

根据上述数学推导过程, 可以得到其形式化的推导。定理 3 的证明首先建立末端速度这一子目标 ($\dot{p}_{st} = v_{st} + \omega_{st} \times p_{st}$), 之后通过空间速度的定义 $\hat{V}_{st} = \dot{g}_{st}g_{st}^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{R}_{st}R_{st}^{-1} & -\dot{R}_{st}R_{st}^{-1}p_{st} + \dot{p}_{st} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 结合 $\dot{R}_{st} = \hat{\omega}_{st}R_{st}$ 这一等式执行 SIMP_TAC 策略应用叉乘和点乘的运算性质证明这一子目标。接下来, 使用伴随变换结合坐标系 T 相对于坐标系 B 的速度和坐标系 B 相对于惯性系 S 的速度等于坐标系 T 相对于惯性系 S 的线速度和角速度 ($V_{st} = V_{sb} + Ad_{gsb}V_{bt} = \begin{bmatrix} v_{st} \\ \omega_{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{sb} + R_{sb}v_{bt} + p_{sb} \times R_{sb}\omega_{bt} \\ \omega_{sb} + R_{sb}\omega_{bt} \end{bmatrix}$) 这一性质, 对 v_{st} 和 ω_{st} 进行变量代换, 之后类比 $\dot{p}_{st} = v_{st} + \omega_{st} \times p_{st}$ 这一子目标的验证对 v_{sb} 进行变量代换, 应用定理 2, 对当前等式进行化简, 最后使用 REWRITE_TAC 这一策略重写加法分配律、向量加法结合律和负矩阵和向量乘法等定理完成该定理的证明。

通过验证机器人的位姿, 能够确定其在空间中的位置和姿态。进一步地, 通过分析从位姿得出的速度信息, 不仅能够深化对机器人当前运动状态的理解和分析, 还能确保动能计算的正确性, 为之后的动力学分析与验证打下

坚实的基础. 因此, 在设计一个高效、稳定且安全的单球驱动平衡机器人系统中, 这种验证过程是至关重要的.

4 单球驱动平衡机器人动力学分析及其形式化验证

4.1 单球驱动平衡机器人动力学分析

单球驱动平衡机器人动力学研究的问题是机器人位移、速度和加速度与驱动力之间的关系. 对于机器人动力学建模问题的分析和研究, 一般有牛顿力学和拉格朗日力学这两种理论. 拉格朗日力学相对于牛顿力学的优点是只需根据已知条件计算系统的动能、势能和广义力, 求出整个系统的能量函数方程, 不需要分析系统各部件的内部作用力, 可显著简化建模过程. 图 3 展示了单球驱动平衡机器人的三维动力学模型^[11].

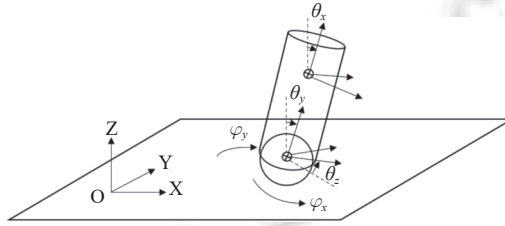


图 3 单球驱动平衡机器人三维动力学模型

图 3 中, θ_x 表示机身相对于坐标系 T 的 Z 轴的偏转角, θ_y 和 θ_z 分别表示球体相对于坐标系 B 的 Z 轴和 X 轴的偏转角, 而 φ_x 和 φ_y 则描述球体的方位, 即确定球体在空间中的位置. 由于这些角度在运动过程中存在复杂的耦合关系, 这给建模带来了显著挑战. 许多研究者采用了一种巧妙的策略来解决这一问题, 即通过分析单一平面内的动力学方程来简化建模. 经过分析, 发现 XOZ 面和 YOZ 面的动力学方程是相似的^[28], 因此, 可以通过为这两个独立且相同的平面系统设计独立的控制器来设计全三维系统的控制器^[9], 下面以分析 XOZ 面的动力学方程为例进行阐述. 另外, 为了提高控制的准确性, 本文还构建并分析了 XOY 面的动力学方程.

综上, 基于上述运动学计算出的末端速度, 采用拉格朗日方程法分析作用在单球驱动平衡机器人上的广义力引起系统的动能和势能变化, 得到 XOZ 面的动力学方程并对其进行高阶逻辑建模和推导. 随后, 构建并验证 XOY 面的动力学方程.

4.2 XOZ 面动力学方程形式化建模与验证

首先, XOZ 面的平面模型如图 4 所示. m_b 表示球轮质量, r 表示球轮半径, m_t 表示机身质量, l 表示机身质心到球轮质心的距离. x , θ 分别表示末端相对于惯性系的旋转角和末端相对于球的旋转角.

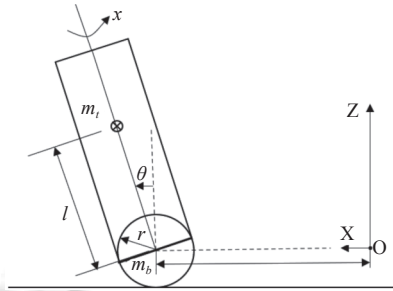


图 4 XOZ 面平面模型图

选取 x , θ 为广义坐标, 系统的拉格朗日量如下:

$$L = \frac{1}{2}(I_t + m_t l^2 + m_t r l \cos(x) + I_b + (m_b + m_t) r^2) \dot{x}^2 + (I_b + (m_b + m_t) r^2 + m_t r l \cos(x)) \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{2}(I_b + (m_b + m_t) r^2) \dot{\theta}^2 - m_t g l \cos(x) \quad (7)$$

其中, I_b 和 I_l 分别表示球轮和机身的转动惯量.

拉格朗日方程如公式 (8) 所示. L 是拉格朗日量, 它是广义坐标, 广义速度和时间的函数, q 是广义坐标, 是时间 t 的函数, $\dot{q}$ 是广义速度, s 是系统的自由度, Q 是对应的广义力.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (8)$$

将拉格朗日量代入拉格朗日方程得到单球驱动平衡机器人 XOZ 面对应的拉格朗日动力学方程, 在计算拉格朗日方程中的导数和重新排列项之后, 运动方程如公式 (9) 所示:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \quad (9)$$

惯性矩阵 $M(q) = \begin{bmatrix} \alpha + \gamma + \beta \cos(x) & \alpha + \beta \cos(x) \\ \alpha + \beta \cos(x) & \alpha \end{bmatrix}$, 科氏力与离心力矩阵 $C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -(1/2)\beta \sin(x)\dot{x} & 0 \\ -\beta \sin(x)\dot{x} & 0 \end{bmatrix}$, 重力矩阵 $g(q) = \begin{bmatrix} -\mu \sin(x) \\ 0 \end{bmatrix}$, τ 表示广义力. 其中 $\alpha = I_b + (m_b + m_l)r^2$, $\beta = m_l r l$, $\gamma = I_l + m_l l^2$, $\mu = m_l g l$ [10]. 对公式 (9) 进行形式化描述如定理 4 所示.

定理 4. XOZ 面的拉格朗日动力学方程.

$!q \ t0 \ t1 \ Mt \ It \ Ib \ l \ r \ a \ b \ c \ x \ x' \ x'' \ theta \ theta' \ theta'' \ q \ q' \ q'' \ t.$

[A1]: $drop \ t0 < drop \ t1 \wedge interval[t0, t1] = s / t \ IN \ s / \wedge$

[A2]: $\{u : real^{(2, 1)} \ finite_sum \} y.y \ IN \ mspace(fspace \ s) / \wedge u \ IN \ IMAGE \ y \ s \} = s0 / \wedge$

$\{u : real^{(2, 2)} \ finite_sum \} y.y \ IN \ mspace(fspace \ s) / \wedge u \ IN \ IMAGE \ y \ s \} = s1 / \wedge$

[A3]: $q = (\backslash t.vector[drop(x \ t); drop(theta \ t)] : real^2) / \wedge$

$q' = (\backslash t.vector[drop(x' \ t); drop(theta' \ t)] : real^2) / \wedge$

$q'' = (\backslash t.vector[drop(x'' \ t); drop(theta'' \ t)] : real^2) / \wedge$

[A4]: $(!t.t \ IN \ s \ ==> (x \ has_vector_derivative \ x' \ t)(at \ t \ within \ s)) / \wedge$

$(!t.t \ IN \ s \ ==> (theta \ has_vector_derivative \ theta' \ t)(at \ t \ within \ s)) / \wedge$

$(!t.t \ IN \ s \ ==> (x' \ has_vector_derivative \ x'' \ t)(at \ t \ within \ s)) / \wedge$

$(!t.t \ IN \ s \ ==> (theta' \ has_vector_derivative \ theta'' \ t)(at \ t \ within \ s)) / \wedge$

[A5]: $ke = (\backslash u : real^{(2, 2)} \ finite_sum.lift(\&1 / \&2 *$

$(It + Mt * l * l + Mt * r * l * cos(fstcart \ u\$1) + Ib + (Mb + Mt) * r * r) * sndcart \ u\$1 *$

$sndcart \ u\$1 + (Ib + (Mb + Mt) * r * r + Mt * r * l * cos(fstcart \ u\$1)) * sndcart \ u\$1 *$

$sndcart \ u\$2 + \&1 / \&2 * (Ib + (Mb + Mt) * r * r) * sndcart \ u\$2 * sndcart \ u\$2)) / \wedge$

$ue = (\backslash u : real^2.lift(Mt * g * l * cos(u\$1))) / \wedge$

[A6]: $alpha = Ib + (Mb + Mt) * r * r / \beta = Mt * r * l / \wedge$

$beta = Mt * r * l / \wedge$

$gamma = It + Mt * l * l / \mu = Mt * g * r / \wedge$

$M = vector[vector[alpha + gamma + beta * cos(drop(x \ t)); alpha + beta * cos(drop(x \ t))] : real^2;$

$vector[alpha + beta * cos(drop(x \ t)); alpha] : real^2] : real^{2^2} / \wedge$

$C = vector[vector[- - (\&1 / \&2) * beta * sin(drop(x \ t)) * drop(x' \ t); \&0] : real^2;$

$vector[- - beta * sin(drop(x \ t)) * drop(x' \ t); \&0] : real^2] : real^{2^2} / \wedge$

$G = vector[(- - \mu) * sin(drop(x \ t)); \&0] : real^2 / \wedge$

[A7]: $f = (\backslash t : real^1.(vector[lift(\&0); lift(tau)] : real^{1^2})) / \wedge$

$rr = (\backslash u : real^{(2, 1)} \ finite_sum.(vector[lift(fstcart \ u\$1); lift(fstcart \ u\$2)] : real^{1^2})) / \wedge$

[A8]: $lagrange_equations_autonomous \ s \ s0 \ s1 \ ke \ ue \ q \ f \ rr \ t$

[G1]: $==> M * (q'' \ t) + C * (q' \ t) + G = vector[\&0; tau]$

lift 表示将一个实数转换为一维向量, 即实现从实数到向量的转换; *drop* 是 *lift* 的逆操作, 将一个一维向量转换为实数; *real²(2,1)finite_sum* 表示一个类型为 *real²* 的向量和一个类型为 *real¹* 的向量的拼接; *fstcart* 表示返回给定拼接向量的第 1 个向量; *sndcart* 表示返回给定拼接向量的第 2 个向量; *fspace* 表示给定集合的连续函数空间; *mspace* 表示特定区间; *IMAGE* 表示函数自变量在特定区间内的值域; *has_vector_derivative* 表示该向量值函数有导函数.

条件 A1 表示给定一个从 t_0 到 t_1 的区间 s , t 在区间 s 中; 条件 A2 用于表示广义坐标和动能有导数的区间分别是 s_0 、 s_1 ; 条件 A3 表示广义坐标 q 由 x 和 θ 组成, 广义速度 $\dot{q}$ 由 $\dot{x}$ 和 $\dot{\theta}$ 组成以及广义速度的导数 $\ddot{q}$ 由 $\ddot{x}$ 和 $\ddot{\theta}$ 组成; 条件 A4 表示广义坐标 x 的导函数为 $\dot{x}$, θ 的导函数为 $\dot{\theta}$, 广义速度 $\dot{x}$ 的导函数为 $\ddot{x}$, $\dot{\theta}$ 的导函数为 $\ddot{\theta}$; 条件 A5 是动能和势能的表达式, 拉格朗日量等于动能和势能之差, 即公式 (7); 条件 A6 表示公式 (9) 对应变量的值; 条件 A7 表示广义力和广义坐标的函数; 条件 A8^[22] 表示该系统满足的拉格朗日方程, 即公式 (8). 目标 G1 表示公式 (9) 的形式化表示.

该定理的证明过程可分为如下 3 部分.

(1) 验证拉格朗日量对广义坐标 x 的偏导数 $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{1}{2}m_r l \dot{x}^2 \sin(x) - m_r l \dot{x} \dot{\theta} \sin(x) + m_r g l \sin(x)$ 成立, 拉格朗日量对广义坐标 θ 的偏导数 $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, 拉格朗日量对广义速度 $\dot{x}$ 的偏导数 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = [I_t + m_r l^2 + m_r l \cos(x) + I_b + (m_b + m_r)r^2] \dot{x} + [I_b + (m_b + m_r)r^2 + m_r l \cos(x)] \dot{\theta}$, 拉格朗日量对广义速度 $\dot{\theta}$ 的偏导数 $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = [I_b + (m_b + m_r)r^2 + m_r l \cos(x)] \dot{x}$, 在验证过程中, 涉及和的导数法则、差的导数法则、积的导数法则以及复合函数链式求导法则等数学定理的应用.

(2) 验证拉格朗日量对广义速度 $\dot{x}$ 求导后再对时间 t 求导的导数 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = [I_t + m_r l^2 + m_r l \cos(x) + I_b + (m_b + m_r)r^2] \ddot{x} + [I_b + (m_b + m_r)r^2 + m_r l \cos(x)] \ddot{\theta} - m_r l \dot{x}^2 \sin(x) - m_r l \sin(x) \dot{x} \dot{\theta}$ 成立, 之后, 对另一个广义速度 $\dot{\theta}$ 进行类似处理, 即验证拉格朗日量对广义速度 $\dot{\theta}$ 求导后再对时间 t 求导的导数 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = [I_b + (m_b + m_r)r^2 + m_r l \cos(x)] \ddot{x} + [I_b + (m_b + m_r)r^2] \ddot{\theta} - m_r l \dot{x}^2 \sin(x)$, 在验证过程中, 涉及向量点乘导数法则、向量复合函数求导链式法则等数学定理的应用.

(3) 验证广义力分别为 0 和 τ . 代入广义坐标和广义力等变量, 对广义力进行重写, 再应用导数相关定理得到广义力的值. 最后, 将上述等式代入拉格朗日方程, 进行代换, 最终得到和结论的相同矩阵, 即完成该定理的证明. 在该定理进行形式化的过程中, 除了显性条件外, 还涉及许多隐含条件. 例如, 动能和势能在特定区间内有导函数, 这些都是验证过程中必须考虑的要求. 定理的条件涉及可导性、可微性以及导函数的存在等概念, 这些概念相似又彼此关联, 增加了本文工作的复杂性. 此外, 验证过程中采用的策略以及对已知定理的运用, 也为验证工作带来了诸多挑战.

在对该部分验证的过程中, 发现了两处系数错误. 在文献 [10] 中, 惯性矩阵 $M(q) = \begin{bmatrix} \alpha + \gamma + 2\beta \cos(x) & \alpha + \beta \cos(x) \\ \alpha + \beta \cos(x) & \alpha \end{bmatrix}$, 科氏力与离心力矩阵 $C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\beta \sin(x) \dot{x} & 0 \\ -\beta \sin(x) \dot{x} & 0 \end{bmatrix}$, 本文经过改正, 正确的应为 $M(q) = \begin{bmatrix} \alpha + \gamma + \beta \cos(x) & \alpha + \beta \cos(x) \\ \alpha + \beta \cos(x) & \alpha \end{bmatrix}$, 且 $C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -(1/2)\beta \sin(x) \dot{x} & 0 \\ -\beta \sin(x) \dot{x} & 0 \end{bmatrix}$, 随后进行了形式化描述, 顺利完成了证明.

根据验证后的公式, 可以计算作用力与加速度之间的关系. 为更直观地说明这一关系, 我们将通过数值示例来进行演示. 将惯性矩阵 $M(q) = \begin{bmatrix} \alpha + \gamma + \beta \cos(x) & \alpha + \beta \cos(x) \\ \alpha + \beta \cos(x) & \alpha \end{bmatrix}$, 科氏力与离心力矩阵 $C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -(1/2)\beta \sin(x) \dot{x} & 0 \\ -\beta \sin(x) \dot{x} & 0 \end{bmatrix}$, 重力矩阵 $g(q) = \begin{bmatrix} -\mu \sin(x) \\ 0 \end{bmatrix}$ 等参数代入公式 (9), 可以得到以下等式:

$$\begin{cases} 2(\alpha + \gamma + \beta \cos(x)) \ddot{x} + 2(\alpha + \beta \cos(x)) \ddot{\theta} - \beta \sin(x) \dot{x}^2 - 2\mu \sin(x) = 0 \\ (\alpha + \beta \cos(x)) \ddot{x} + \alpha \ddot{\theta} - \beta \sin(x) \dot{x}^2 = \tau \end{cases},$$

联立两式, 可得:

$$2\gamma \ddot{x} + 2\beta \cos(x) \ddot{\theta} + \beta \sin(x) \dot{x}^2 - 2\mu \sin(x) + 2\tau = 0.$$

令 $x = \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin(x) = 1$, $\cos(x) = 0$, 此时上式可化简为 $2\gamma\ddot{x} + \beta\dot{x}^2 - 2\mu + 2\tau = 0$. 由于 β, γ, μ 均是常数, 令 $\beta = 1, \gamma = 1, \mu = 1$, 此时有 $2\ddot{x} + \dot{x}^2 - 2 = -2\tau$. 若 $\ddot{x} = -2$, 则 $\tau = 1$.

4.3 XOY 面动力学方程形式化建模与验证

在第 4.2 节中, 验证了 XOZ 面的动力学方程的正确性. 为了提高单球驱动平衡机器人控制的精度, 将继续验证 XOY 面的动力学方程的正确性. XOY 面的平面模型如图 5 所示.

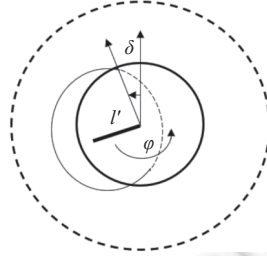


图 5 XOY 面平面模型图

图 5 中, φ 表示球轮的旋转角, δ 表示机身的旋转角, l' 表示机身质心与球轮中心的水平距离. 选取 φ 和 δ 作为广义坐标, 建立系统的拉格朗日方程. 对应的拉格朗日量如下:

$$L = \frac{1}{2}I_b\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_t\dot{\delta}^2 \quad (10)$$

将拉格朗日量代入拉格朗日方程, 得到单球平衡机器人 XOY 面对应的拉格朗日动力学方程. 如下所示:

$$\begin{bmatrix} I_b & 0 \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau \quad (11)$$

其中, I_b 表示球轮的转动惯量, I_t 表示机身的转动惯量, τ 表示对应的扭矩.

对公式 (11) 进行形式化描述, 如定理 5 所示.

定理 5. XOY 面的拉格朗日动力学方程.

$!q \ t0 \ t1 \ Mt \ It \ Ib \ l \ r \ \phi \ \phi' \ \phi'' \ \delta \ \delta' \ \delta'' \ q \ q' \ q'' \ t.$

[A1]: $drop \ t0 < drop \ t1 \wedge interval[t0, t1] = s \wedge t \ IN \ s \wedge$

[A2]: $\{u : real^{(2,1)} \text{finite_sum} \mid ?y.y \ IN \ mspace(fspace \ s) \wedge u \ IN \ IMAGE \ y \ s\} = s0 \wedge$

$\{u : real^{(2,2)} \text{finite_sum} \mid ?y.y \ IN \ mspace(fspace \ s) \wedge u \ IN \ IMAGE \ y \ s\} = s1 \wedge$

[A3]: $q = (\lambda t. vector[drop(\phi \ t); drop(\delta \ t)] : real^{(2)}) \wedge$

$q' = (\lambda t. vector[drop(\phi' \ t); drop(\delta' \ t)] : real^{(2)}) \wedge$

$q'' = (\lambda t. vector[drop(\phi'' \ t); drop(\delta'' \ t)] : real^{(2)}) \wedge$

[A4]: $(!t.t \ IN \ s \implies (\phi \ \text{has_vector_derivative} \ \phi' \ t)(at \ t \ \text{within} \ s)) \wedge$

$(!t.t \ IN \ s \implies (\delta \ \text{has_vector_derivative} \ \delta' \ t)(at \ t \ \text{within} \ s)) \wedge$

$(!t.t \ IN \ s \implies (\phi' \ \text{has_vector_derivative} \ \phi'' \ t)(at \ t \ \text{within} \ s)) \wedge$

$(!t.t \ IN \ s \implies (\delta' \ \text{has_vector_derivative} \ \delta'' \ t)(at \ t \ \text{within} \ s)) \wedge$

[A5]: $ke = (\lambda u : real^{(2,2)} \text{finite_sum}. lift((\&1/\&2 * Ib * sndcart \ u\$1 * sndcart \ u\$1) +$

$(\&1/\&2 * It * sndcart \ u\$2 * sndcart \ u\$2))) \wedge$

$ue = (\lambda u : real^{(2)}. lift(\&0)) \wedge$

[A6]: $alpha = Ib + (Mb + Mt) * r * r \wedge$

$beta = Mt * r * l \wedge$

$gamma = It + Mt * l * l \wedge \mu = Mt * g * l \wedge$

$\mu = Mt * g * l \wedge$

$$M = \text{vector}[\text{vector}[Ib; \&0] : \text{real}^2; \text{vector}[\&0; It] : \text{real}^2] : \text{real}^{2^2} \setminus$$

$$[A7]: f = (\lambda t : \text{real}^1. (\text{vector}[\text{lift}(\&0); \text{lift}(\tau)] : \text{real}^{1^2})) \setminus$$

$$rr = (\lambda u : \text{real}^2. (\text{finite_sum}(\text{vector}[\text{lift}(\text{fstcart } u\$1); \text{lift}(\text{fstcart } u\$2)] : \text{real}^{1^2}))) \setminus$$

$$[A8]: \text{lagrange_equations_autonomous } s0\ s1\ ke\ ue\ q\ f\ rr\ t$$

$$[G1]: ==> M * (q''t) = \text{vector}[\&0; \tau].$$

条件 A3 表示广义坐标 q 由 φ 和 δ 组成, 广义速度 $\dot{q}$ 由 $\dot{\varphi}$ 和 $\dot{\delta}$ 组成以及广义速度的导数 $\ddot{q}$ 由 $\ddot{\varphi}$ 和 $\ddot{\delta}$ 组成; 条件 A4 表示广义坐标 φ 的导函数为 $\dot{\varphi}$, δ 的导函数为 $\dot{\delta}$, 广义速度 $\dot{\varphi}$ 的导函数为 $\ddot{\varphi}$, $\dot{\delta}$ 的导函数为 $\ddot{\delta}$.

定理 5 的条件和证明和定理 4 类似, 在此不再一一赘述. 以上通过对单球驱动平衡机器人 XOZ 面和 XOY 面的拉格朗日动力学方程进行高阶逻辑建模和推导, 保证了该型机器人动力学模型的正确性, 提高了机器人的可靠性和安全性.

5 总 结

本文通过使用 HOL Light 定理证明器, 形式化建模并验证了单球驱动平衡机器人的运动学和动力学高阶逻辑模型. 在运动学部分, 本文对单球驱动平衡机器人的正向运动学、空间速度以及末端速度进行形式化建模和验证. 在此基础上, 进一步对单球驱动平衡机器人 XOZ 面的拉格朗日动力学方程进行形式化建模和验证. 为了提升控制的精确度, 本文还构建并验证了 XOY 面的拉格朗日动力学方程. 形式化验证方法克服了传统验证方法的局限, 保障了设计的正确性与安全性. 值得一提的是, 在对 XOZ 面的动力学方程验证过程中, 发现并纠正了两处系数错误. 这不仅有助于提高系统的正确性和安全性, 也增强了验证工作者的信心. 这项工作不仅保证了单球驱动平衡机器人运动学和动力学模型的正确性, 并对未来机器人控制设计与实现提供了可靠性和安全性保障.

另外, 本文验证的文献 [10] 还通过部分反馈线性化和函数设计, 提出能量整形控制方法, 并推导了相应的控制方程. 与此同时, 文章还基于 Lyapunov 稳定性理论, 对该控制系统进行了数学推导和分析. 鉴于现有的控制相关定理库尚不完善, 作者计划在未来的研究中致力于进一步完善这一定理库, 并对所推导的控制方程进行形式化验证.

References:

- [1] Kumagai M, Ochiai T. Development of a robot balancing on a ball. In: Proc. of the 2008 Int'l Conf. on Control, Automation and Systems. Seoul: IEEE, 2008. 433–438. [doi: 10.1109/ICCAS.2008.4694680]
- [2] Tsai CC, Chan CK, Kuo LC. LQR motion control of a ball-riding robot. In: Proc. of the 2012 IEEE/ASME Int'l Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics. Kaohsiung: IEEE, 2012. 861–866. [doi: 10.1109/AIM.2012.6265988]
- [3] Shomin M, Forlizzi J, Hollis R. Sit-to-stand assistance with a balancing mobile robot. In: Proc. of the 2015 IEEE Int'l Conf. on Robotics and Automation. Seattle: IEEE, 2015. 3795–3800. [doi: 10.1109/ICRA.2015.7139727]
- [4] Liu FC, Liu L, Li Q, Qin L, Wang WK. Literature review of effects of gravity on motion behavior of space mechanisms. Manned Spaceflight, 2017, 23(6): 790–797 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.16329/j.cnki.zrht.2017.06.013]
- [5] Li ZQ. Reflection on the theory of legal liability in the age of artificial intelligence——Intelligent robot as a pointcut. Journal of Dalian University of Technology (Social Sciences), 2019, 40(5): 78–87 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.19525/j.issn1008-407x.2019.05.010]
- [6] Liu YM. Where is the safety risk of “robot wounding”. Grand Garden of Science, 2024, (2): 62–63 [doi: 10.3969/j.issn.1003-1871.2024.02.025]
- [7] Durán AJ, Pérez M, Varona JL. Misfortunes of a mathematicians' trio using computer algebra systems: Can we trust? arXiv:1312.3270, 2023.
- [8] Hasan O, Tahar S. Formal verification methods. In: Mehdi Khosrow-Pour DBA, ed. Encyclopedia of Information Science and Technology. 3rd ed., Hershey: Information Science Reference, 2015. 7162–7170. [doi: 10.4018/978-1-4666-5888-2.ch705]
- [9] Lauwers TB, Kantor GA, Hollis RL. A dynamically stable single-wheeled mobile robot with inverse mouse-ball drive. In: Proc. of the 2006 IEEE Int'l Conf. on Robotics and Automation. Orlando: IEEE, 2006. 2884–2889. [doi: 10.1109/ROBOT.2006.1642139]
- [10] Satici AC, Donaie A, Siciliano B. Intrinsic dynamics and total energy-shaping control of the ballbot system. Int'l Journal of Control, 2017, 90(12): 2734–2747. [doi: 10.1080/00207179.2016.1264630]

- [11] Fankhauser P, Gwerder C. Modeling and control of a ballbot [B.S. Thesis]. Swiss Federal Institute of Technology Zurich, 2010. https://www.researchgate.net/publication/259602161_Modeling_and_Control_of_a_Ballbot
- [12] You YN, Ha HM, Kim YK, Lee JM. Balancing and driving control of a ball robot using fuzzy control. In: Proc. of the 12th Int'l Conf. on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence. Goyangi: IEEE, 2015. 492–494. [doi: 10.1109/URAI.2015.7358812]
- [13] Luckcuck M, Farrell M, Dennis LA, Dixon C, Fisher M. Formal specification and verification of autonomous robotic systems: A Survey. ACM Computing Surveys (CSUR), 2019, 52(5): 100. [doi: 10.1145/3342355]
- [14] Farooq B, Hasan O, Iqbal S. Formal kinematic analysis of the two-link planar manipulator. In: Proc. of the 15th Int'l Conf. on Formal Engineering Methods on Formal Methods and Software Engineering. Queenstown: Springer, 2013. 347–362.
- [15] Affeldt R, Cohen C. Formal foundations of 3D geometry to model robot manipulators. In: Proc. of the 6th ACM SIGPLAN Conf. on Certified Programs and Proofs. Paris: ACM, 2017. 30–42. [doi: 10.1145/3018610.3018629]
- [16] Barras B, Boutin S, Cornes C. The Coq proof assistant reference manual: Version 6.1. Technical Report, Inria: National Institute for Research in Computer Science and Control, 1997. https://www.researchgate.net/publication/43140549_The_Coq_Proof_Assistant_Reference_Manual_Version_61
- [17] Wu AX, Shi ZP, Li YD, Wu MH, Guan Y, Zhang J, Wei HX. Formal kinematic analysis of a general 6R manipulator using the screw theory. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015(1): 549797. [doi: 10.1155/2015/549797]
- [18] Chen Q, Wang GH, Zhang QY, Shi ZP, Chen SY, Guan Y. Formal modeling and verification of planar parallel mechanism. Journal of Chinese Computer Systems, 2020, 41(5): 925–931 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3969/j.issn.1000-1220.2020.05.005]
- [19] Xie GJ, Yang HH, Shi ZP, Chen G. Formal verification of robot forward kinematics based on DH calibration. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2024, 35(9): 4160–4178 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/7131.htm> [doi: 10.13328/j.cnki.jos.007131]
- [20] Abed S, Rashid A, Hasan O. Formal analysis of unmanned aerial vehicles using higher-order-logic theorem proving. Journal of Aerospace Information Systems, 2020, 17(9): 481–495. [doi: 10.2514/1.1010730]
- [21] Rashid A, Hasan O. Formal analysis of robotic cell injection systems using theorem proving. In: Proc. of the 7th Int'l Workshop on Cyber Physical Systems. Design, Modeling, and Evaluation. Seoul: Springer, 2019. 127–141. [doi: 10.1007/978-3-030-17910-6_10]
- [22] Zhang JZ. Formalization of generalized variational and Lagrangian mechanics and applications to robot dynamics [Ph.D. Thesis]. Beijing: Capital Normal University, 2020 (in Chinese with English abstract).
- [23] Zhang JZ, Wang GH, Shi ZP, Guan Y, Li YD. Formalization of functional variation in HOL Light. Journal of Logical and Algebraic Methods in Programming, 2019, 106: 29–38. [doi: 10.1016/j.jlamp.2019.04.004]
- [24] Guan Y, Zhang JZ, Wang GH, Li XM, Shi ZP, Li YD. Formalization of Euler-Lagrange equation set based on variational calculus in HOL Light. Journal of Automated Reasoning, 2021, 65(1): 1–29. [doi: 10.1007/s10817-020-09549-w]
- [25] Harrison J. HOL Light: A tutorial introduction. In: Proc. of the 1st Int'l Conf. on Formal Methods in Computer-aided Design. Palo Alto: Springer, 1996. 265–269. [doi: 10.1007/BFb0031814]
- [26] Paulson LC. ML for the Working Programmer. 2nd ed., New York: Cambridge University Press, 1996.
- [27] Qasim U, Rashid A, Hasan O. Formalization of bond graph using higher-order-logic theorem proving. ISA Trans., 2022, 128: 453–469. [doi: 10.1016/j.isatra.2021.11.042]
- [28] Nagarajan U, Mampetta A, Kantor GA, Hollis RL. State transition, balancing, station keeping, and yaw control for a dynamically stable single spherical wheel mobile robot. In: Proc. of the 2009 IEEE Int'l Conf. on Robotics and Automation. Kobe: IEEE, 2009. 998–1003. [doi: 10.1109/ROBOT.2009.5152681]
- [29] Murray RM, Li ZX, Sastry SS. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation. Boca Raton: CRC Press, 1994. 36–37.
- [30] Satici AC, Ruggiero F, Lippiello V, Siciliano B. Intrinsic Euler-Lagrange dynamics and control analysis of the ballbot. In: Proc. of the 2016 American Control Conf. Boston: IEEE, 2016. 5685–5690. [doi: 10.1109/ACC.2016.7526560]

附中文参考文献:

- [4] 刘福才, 刘林, 李倩, 秦利, 王文魁. 重力对空间机构运动行为影响研究综述. 载人航天, 2017, 23(6): 790–797. [doi: 10.16329/j.cnki.zrht.2017.06.013]
- [5] 李政权. 人工智能时代的法律责任理论审思——以智能机器人为切入点. 大连理工大学学报 (社会科学版), 2019, 40(5): 78–87. [doi: 10.19525/j.issn1008-407x.2019.05.010]
- [6] 刘永谋. “机器人伤人”安全风险究竟在哪儿. 科学大观园, 2024, (2): 62–63 [doi: 10.3969/j.issn.1003-1871.2024.02.025]
- [18] 陈琦, 王国辉, 张倩颖, 施智平, 陈善言, 关永. 平面并联机构的形式化建模与验证. 小型微型计算机系统, 2020, 41(5): 925–931. [doi: 10.1109/ROBOT.2009.5152681]

[10.3969/j.issn.1000-1220.2020.05.005](http://www.jos.org.cn/1000-9825/7131.htm)

[19] 谢果君, 杨焕焕, 石正璞, 陈钢. 基于 DH 标定的机器人正向运动学形式化验证. 软件学报, 2024, 35(9): 4160–4178. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/7131.htm> [doi: 10.13328/j.cnki.jos.007131]

[22] 张景芝. 泛函变分与拉格朗日力学的形式化及在机器人动力学的应用 [博士学位论文]. 北京: 首都师范大学, 2020.



张善强(2000—), 男, 硕士, CCF 学生会员, 主要研究领域为形式化验证, 定理证明.



王国辉(1984—), 男, 博士, 高级实验师, CCF 专业会员, 主要研究领域为形式化验证, 高可靠嵌入式系统.



张景芝(1986—), 女, 博士, 实验师, 主要研究领域为形式化验证, 定理证明.



关永(1966—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 专业会员, 主要研究领域为形式化验证, 高可靠嵌入式系统.



施智平(1974—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 高级会员, 主要研究领域为形式化验证, 计算机视觉.