

李群模糊 C 均值聚类图像分割算法*

孙灏铖, 刘力, 李凡长

(苏州大学 计算机科学与技术学院, 江苏 苏州 215006)

通信作者: 刘力, E-mail: liu6819@suda.edu.cn



摘要: 模糊 C 均值 (FCM) 聚类算法凭借其学习成本低、算法开销少的特点, 已经成为常用的图像分割技术之一。然而, 传统 FCM 算法存在对图像中噪声敏感的问题。近年来, 各种对传统 FCM 算法的改进虽然提高了算法的噪声鲁棒性, 但是往往以损失图像上的细节为代价。提出一种基于李群理论的改进 FCM 算法并将其应用于图像分割中。所提算法针对图像的所有像素构建矩阵李群特征, 用以归纳每个像素的底层图像特征以及与其邻域窗口内其他像素的关系, 从而将传统 FCM 算法聚类分析中求取像素点之间的欧氏距离转变为在李群流形上求取像素点李群特征之间的测地线距离。针对在李群流形上更新聚类中心和模糊隶属度矩阵的问题, 所提算法使用一种自适应模糊加权的目标函数, 提高算法的泛化性和稳定性。通过在 3 组医学图像上与传统 FCM 算法以及几种经典改进算法的实验对比验证了所提方法的有效性。

关键词: 图像分割; 模糊聚类; 李群

中图法分类号: TP18

中文引用格式: 孙灏铖, 刘力, 李凡长. 李群模糊 C 均值聚类图像分割算法. 软件学报. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/7000.htm>

英文引用格式: Sun HC, Liu L, Li FZ. Lie Group Fuzzy C-means Clustering Algorithm for Image Segmentation. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/7000.htm>

Lie Group Fuzzy C-means Clustering Algorithm for Image Segmentation

SUN Hao-Cheng, LIU Li, LI Fan-Zhang

(School of Computer Science and Technology, Soochow University, Suzhou 215006, China)

Abstract: Fuzzy C-means (FCM) clustering algorithm has become one of the commonly used image segmentation techniques with its low learning cost and algorithm overhead. However, the conventional FCM clustering algorithm is sensitive to noise in images. Recently, many of improved FCM algorithms have been proposed to improve the noise robustness of the conventional FCM clustering algorithm, but often at a cost of detail loss on the image. This study presents an improved FCM clustering algorithm based on Lie group theory and applies it to image segmentation. The proposed algorithm constructs matrix Lie group features for the pixels of an image, which summarizes the low-level image features of each pixel and its relationship with other pixels in the neighborhood window. By doing this, the proposed method transforms the clustering problem of measuring the Euclidean distances between pixels into calculating the geodesic distances between Lie group features of pixels on the Lie group manifold. Aiming at the problem of updating the clustering center and fuzzy membership matrix on the Lie group manifold, the proposed method uses an adaptive fuzzy weighted objective function, which improves the generalization and stability of the algorithm. The effectiveness of the proposed method is verified by comparing with conventional FCM and several classic improved algorithms on the experiments of three types of medical images.

Key words: image segmentation; fuzzy clustering; Lie group

图像分割是指根据一定标准将输入图像划分为若干个具有独特性质的类别或区域, 以便提取人们感兴趣区域的技术和过程。从数学角度看, 图像分割是将数字图像划分成互不相交区域的过程。作为一个由图像处理向图像分

* 基金项目: 国家重点研发计划 (2018YFA0701700, 2018YFA0701701); 国家自然科学基金 (62002253)

收稿时间: 2023-01-05; 修改时间: 2023-04-12; 采用时间: 2023-07-08; jos 在线出版时间: 2023-10-25

析过渡的关键步骤, 图像分割一直以来都是图像处理和计算机视觉领域的研究热点. 传统的图像分割方法主要分成以下几类: 基于阈值的方法、基于区域的方法、基于边缘的方法、基于直方图的方法和基于图论的方法等等. 这些方法都可以看作是将一个像素划分到某个类或区域的“硬分割”. 在实际应用中, 采用“硬分割”得到的图像分割结果往往受到许多方面的制约, 比如图像的灰度、纹理和颜色等, 从而导致分割结果不理想.

利用模糊理论描述事物不确定性的能力, 人们提出了模糊分割. 模糊分割是一种“软分割”, 综合考虑各因素对图像分割结果的影响并使用模糊隶属度来表示这些因素, 在应用中取得了很好的效果. 模糊技术在图像分割中应用的一个显著特点就是它能和现有的许多图像分割方法相结合, 形成一系列的集成模糊分割技术, 例如模糊聚类、模糊阈值、模糊边缘检测技术等. 在众多模糊聚类算法中, 模糊 C 均值 (FCM) 算法^[1]应用最广泛且较成功, 它通过优化目标函数得到每个样本点对所有类中心的隶属度, 从而决定样本点的类属以达到自动对样本数据进行分类的目的. 凭借其学习成本低、算法开销少的特点, FCM 已经成为常用的图像分割技术之一^[2,3]. 然而, 传统的 FCM 算法在运用于图像分割时, 只考虑到了像素的特征与聚类中心的欧氏距离, 忽略了邻域像素与当前像素的关联, 导致其分割结果极易受到噪声干扰. 为了提高 FCM 算法的抗噪性能, 研究者们提出了一系列的改进算法, 包括: 引入邻域空间像素的隶属度信息, 从而使每个像素的聚类隶属度与邻域像素的聚类隶属度相关联^[4]; 将像素邻域中每个像素的灰度特征作为约束, 在目标函数上构建邻域灰度加性约束项^[5]; 将约束项与像素邻域窗口中的灰度值均值相关联^[6]; 利用核函数将样本数据映射到高维特征空间^[7]. 这些改进的算法虽然提高了 FCM 算法的噪声鲁棒性, 但是往往会严重损失图像上点和线的细节, 出现线段粘连和断裂, 或者细节信息丢失等情况. 如何在提高 FCM 算法抗噪性的同时, 尽可能地保留图像的细节, 成为 FCM 算法的一个重要改进方向.

近年来, 李群理论被广泛应用于诸如图像分类^[8]、人脸识别^[9]、同步定位与建图 (SLAM)^[10] 等研究中. 李群既是一个群, 又是一种微分流形. 这种特殊性质能够很好地模拟数据的几何结构, 同时又为分析数据提供了丰富的代数工具. 根据李群这些特有的性质以及受其在机器学习和图像分析领域成功应用的启发, 本文提出了一种基于李群理论的 FCM 聚类算法 (以下简称为李群 FCM 算法) 并应用到医学图像的分割中. 通过从底层图像特征 (颜色、梯度和纹理等) 中构建每个像素的矩阵李群特征, 李群 FCM 算法将图像从欧氏空间映射到李群空间, 在李群流形上计算矩阵李群特征与各聚类中心的距离, 并更新聚类中心和模糊隶属度矩阵, 直至达到设定的迭代终止条件, 最终通过解模糊得到分割的图像结果. 李群 FCM 算法的主要步骤和流程如图 1 所示. 本文将李群 FCM 算法应用到 3 组医学图像: 脑磁共振 (MR) 图像、胸部 CT 图像、眼底视网膜图像, 并将图像分割结果与传统 FCM 算法以及几种经典改进算法进行了对比, 算法的有效性得到了验证. 实验结果表明, 本文提出的李群模糊 C 均值算法能够降低图像分割任务中噪声的影响并保留更多的图像细节, 同时具有更好的稳定性.

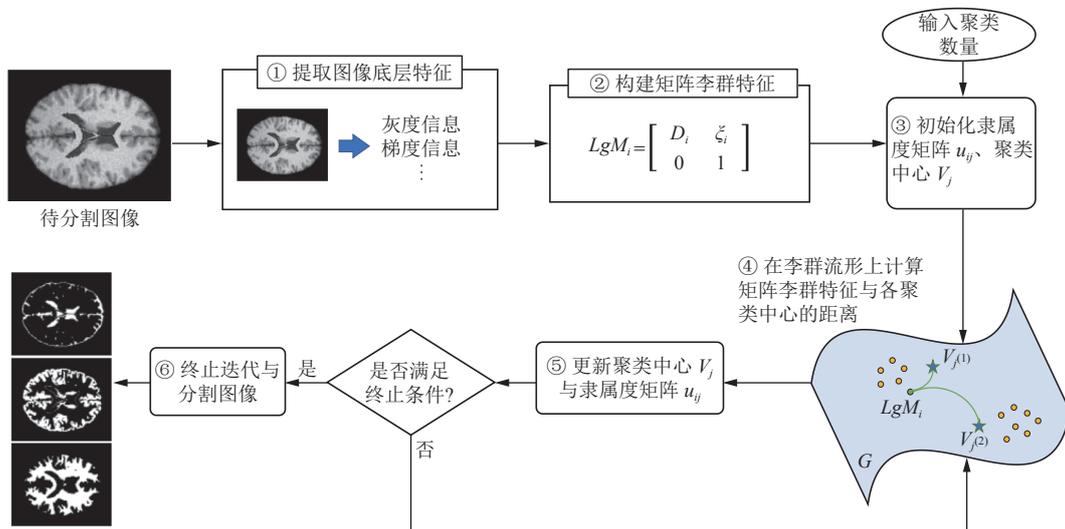


图 1 本文提出的李群 FCM 算法的主要步骤与流程

总的来说, 本文的创新点有以下 3 方面: (1) 将聚类分析中求取像素点之间的欧氏距离转变为在李群流形上计算李群特征之间的测地线距离, 提供了一种聚类分析的新思路; (2) 提出一种包含加权均值滤波信息的矩阵李群特征, 用以表达各底层图像特征之间的联系; (3) 针对在李群流形上确定聚类中心和更新模糊隶属度矩阵的问题, 提出一种自适应模糊加权的目标函数, 提高了算法的泛化性。

1 相关工作

1.1 图像分割算法

图像分割多年来一直是图像工程领域的研究热点, 至今研究者已提出了上千种各种类型的分割算法。这些图像分割算法大体上可以分为: 基于阈值的方法、基于边缘的方法、基于区域的方法、基于直方图的方法、基于聚类分析的方法和基于深度学习的方法。

基于阈值的方法通过设置一个或多个阈值将图像分割成多个区域, 将图像中的目标区域(单个或多个)从背景中分割出来。如王宏文等人^[11]提出的改进 Otsu 图像阈值分割方法, 实现了对灰度图像的分割。这些方法计算简单, 运行效率高, 但无法利用像素的空间信息, 抗噪性弱, 同时对图像先验知识的要求高。

基于边缘的方法通过 Robert^[12]、Sobel^[13]等微分算子确定图像中的边缘像素, 通过边缘分割出图像中所需的区域。该类算法往往难以应对区域边缘模糊的图像, 同时需要根据具体的应用场景来调整权衡算法的分割精度和抗噪能力。如石炜等人^[14]的研究通过基于边缘的 Canny 图像分割算法实现了对图像区域的分割。

基于区域的方法通过设定区域种子点、区域生长条件与区域生长停止条件等规则, 将符合一定性质的像素连通, 构成最终的分割区域。常见基于区域的算法有分水岭法^[15]、超像素分割法^[16]等, 他们能够克服噪声干扰, 获得完整度高的分割区域, 但也容易造成过分割。

基于直方图的方法对图像的颜色建立直方图, 利用直方图的波峰波谷表示一块区域的颜色值的范围的能力来达到分割的目的。马国锐等人^[17]的研究基于颜色直方图实现了对遥感影像的分割。

基于聚类分析的方法将像素转移至对应的特征空间中进行聚类, 根据聚类结果进行图像分割。常见的基于聚类的分割方法有 K 均值法^[18]、FCM 算法等。基于聚类的算法可以利用多类特征, 样本在特征空间中的处理策略也更加丰富, 可以应用的分割场景更多。因此, 基于聚类的分割算法应用广泛。

近年来, 基于深度学习的图像分割方法发展迅速, 取得了比传统方法更好的效果。这些方法以卷积神经网络(convolutional neural network, CNN)为基本技术框架, 可进一步分为语义分割、实例分割以及全景分割。语义分割将图像内的上下文信息引入到图像分割方法内, 可以提高分割的准确率, 例如 DCNAS^[19]和 Ccnet^[20]。实例分割将一张图像分为几种类别并进一步将同一类别内的物体区分为个体, 例如 PolarMask^[21]和 CenterMask^[22]。全景分割为图像中每个像素点赋予类别标签和对应同类物体的编号, 例如 Panoptic DeepLab^[23]和 UPS-Net^[24]。尽管基于深度学习的方法取得了很大的成功, 但是也存在以下固有的局限: (1) 由于 CNN 的卷积核尺寸限制, 模型只能利用局部信息理解输入图像, 这难免影响编码器提取特征的可区分性; (2) 分割精度往往依赖于用于训练的数据量, 而训练数据依赖人工标注, 训练成本高, 速度慢, 还经常存在训练样本不均衡问题; (3) 模型的泛化性较差, 将已经训练好的模型应用到其他类型或场景的图像时, 模型的性能往往出现一个很大下降。这些局限使得基于深度学习的方法无法全面取代传统的图像分割方法。

图像分割算法的应用场景十分广泛。以基于聚类的分割算法为例, Khan 等人^[25]的研究利用 K 均值法结合浅层神经网络实现了对大脑肿瘤的分割; 龚瑞昆等人^[26]基于 K 均值法, 将欧氏距离度量改进为马氏距离度量, 对玉米叶部病害图像分割任务进行了研究; 招启羽等人^[27]的研究基于 FCM 算法, 结合非局部信息实现了对合成孔径雷达(synthetic aperture radar, SAR)图像分割精度的提升。

1.2 FCM 聚类分析及其改进算法

FCM 算法是 Bezdek 等人^[1]于 1984 年提出的一种硬 C 均值聚类(HCM)算法的改进算法。由于引入了模糊理论, FCM 算法中每个样本可以同时属于多个类别, 通过优化目标函数得到每个样本点对所有类中心的隶属度, 从

而决定样本的类属以达到自动对数据进行分类的目的. FCM 算法基于欧氏距离度量, 利用拉格朗日乘子法求极值来实现对聚类中心和样本隶属度的迭代优化. 对于类边界模糊的样本, FCM 算法的聚类效果明显优于 HCM 算法^[28].

尽管在图像分割领域取得了巨大的成功, 传统 FCM 算法由于忽略了邻域像素与当前像素的关联, 导致算法抗噪性较弱. 为了提高算法的抗噪性, 研究者提出了许多改进的思路. Szilagyí 等人^[29]通过构建均值滤波图像, 利用了像素邻域窗口的均值信息, 简单有效地抑制了噪声, 但算法分割精度的提升有限. Abu 等人^[30]的研究在约束项中融入统计信息, 提升了针对海底声呐图像的分割精度. Kishorjit 等人^[31]的研究则将超像素理论与模糊聚类相结合, 在提高分割精度的同时也降低了算法的运行效率.

对 FCM 算法进行改进的一个主要方向是引入核函数以改善样本的可分性. Zhang 等人^[7]首先提出了核模糊 C 均值聚类 (KFCM), 通过核函数将样本数据映射到高维特征空间, 从而达到改善聚类性能的目的. 但值得注意的是, 核函数中的超参数选择给算法带来了新的不确定性. Zhang 等人^[32]的研究在 KFCM 的基础上引入了邻域空间像素的隶属度信息, 从而使每个像素的聚类隶属度与邻域像素的聚类隶属度相关联. 虽然算法的抗噪性有所提升, 但其给定的约束项参数局限性强, 算法的泛化性较弱. Yang 等人^[33]的研究在 KFCM 算法的基础上利用邻域窗口内的像素灰度值均值作为约束项, 并根据聚类时的类间距离构造约束项权重, 在合成图像上取得了不错的分割效果. 然而该权重的选取与像素的灰度值和像素的邻域空间无关, 含义模糊. Gong 等人^[34]提出的 KWFLICM 算法则将像素邻域中每个像素的灰度特征作为单独的约束信息来源, 并基于中心像素与邻域像素的灰度差值构造约束项权重, 大大提升了算法的抗噪能力. 然而其图像分割结果中细节信息损失严重, 存在明显的过分割. Elazab 等人^[35]的研究针对 KWFLICM 中的约束项进行了改进, 使其与像素邻域窗口中的灰度值均值相关联, 解决了过分割的问题. 另外, 该研究根据样本的总体信息来确定核函数的超参数, 填补了先前研究的空白. Song 等人的研究^[36]则在邻域窗口中根据中值信息计算各像素点的归一化自适应加权测度, 从而有针对性地去除噪声的影响, 同时尽可能多地保留细节信息. 另外该研究在聚类过程中还利用到了邻域窗口内像素类别隶属度的权值信息, 高噪声场景下分割精度超越了 Elazab 等人^[35]的研究.

1.3 李群理论在机器学习及图像工程上的应用

李群既是一个群, 又是一个微分流形, 能够在群操作下保持平滑结构. 这一内在属性决定了李群保留了系统的完整性, 既能通过流形结构提供数据的几何表示, 又能通过微分提供问题的不同具体代数解. 近年来, 李群理论逐渐被引入计算机视觉领域, 应用于各类图像分析问题. Tuzel 等人^[37]将协方差矩阵作为特征描述子用于目标检测和图像分类. 协方差矩阵在李群流形上构成对称半正定矩阵群. Chen 等人^[38]的研究通过协方差矩阵构造矩阵李群特征, 提高了实时场景中杂草识别的精度. Xu 等人^[39]提出用李群核来表征任意两张人脸图像的线性动力学模型之间的相似性. 利用李群的同态性, Xu 等人^[40]将高维李群流形转化为一个降维的李群流形, 提高了场景图片分类的效果. 在文献^[41]中, Xu 等人提出了一种基于线性李群的半监督学习算法用于不平衡多类分类. 针对人体动作数据的复杂性和非线性, Cai 等人^[42]的研究利用 SE(3) 特殊欧氏群构造矩阵李群特征, 提高了人体动作识别算法的准确度和泛化性. Yue 等人^[43]的研究在工业原料缺陷检测中利用李群理论, 提高了算法的准确性和鲁棒性. 近几年, 李群理论也被结合到 CNN 模型中, 以提取更多的区分能力和有效特征. Xu 等人^[44]的研究通过构建李群矩阵特征, 将图像的各尺度特征融合, 在 CNN 模型上得到了更好的分类效果.

2 方法基础

2.1 FCM 聚类分析

FCM 聚类分析是基于对目标函数的优化基础上的一种数据聚类方法. 在给定的距离度量下, 利用拉格朗日乘子法求极值来实现对聚类中心和样本隶属度的迭代更新与目标函数的优化, 其目标函数可写为:

$$\begin{cases} J(U, V) = \sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^N u_{ij}^m d^2(X_i, V_j) \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^C u_{ij} = 1, \forall i, j; \quad 0 < \sum_{i=1}^N u_{ij} < N, \forall j \end{cases} \quad (1)$$

在公式 (1) 中, X_i 为样本点, N 为样本总数, C 为设定的聚类数, m 为模糊因子常数, 该常数要求大于 1, 在研究中通常取 2. $U = [u_{ic}]_{i=1, \dots, N, c=1, \dots, C}$ 代表模糊隶属度矩阵, 维度是 N 行 C 列, 其含义为 N 个样本对于 C 种类别的隶属度值. $V = [V_1, V_2, \dots, V_C]$ 是 C 种类别的聚类中心 V_j 的集合; $d(\cdot, \cdot)$ 表示欧氏距离.

在目标函数及其约束条件的基础上, 对 FCM 算法采用拉格朗日乘子法进行优化可得到:

$$J_\lambda(U, V) = \sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^N u_{ij}^m d^2(X_i, V_j) + \lambda \left(\sum_{j=1}^C u_{ij} - 1 \right) \quad (2)$$

通过对公式 (2) 求极值的方法, 可以得到聚类中心与样本隶属度的更新表达式为:

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^C \left[\frac{d^2(X_i, V_j)}{d^2(X_i, V_k)} \right]^{\frac{1}{m-1}}} \quad (3)$$

$$V_j = \frac{\sum_{i=1}^N u_{ij}^m X_i}{\sum_{i=1}^N u_{ij}^m} \quad (4)$$

通过公式 (3) 与公式 (4) 的更新迭代, 公式 (1) 中的目标函数值将不断减小, 当目标函数值的更新满足提前设定好的要求时, 算法停止迭代. 为了避免算法的异常运行, FCM 会设置一个最大迭代次数, 其取值通常在几十至几百之间.

在最终输出的模糊隶属度矩阵中, 每个样本隶属程度最大的类别即为其最终所属的类别, 也就是当 $u_{ij} = \max_{1 < k < c} (u_{ik})$ 时, 样本 X_i 归属于第 j 类.

2.2 李群理论基础

李群是一个拥有群结构的光滑流形, 所有在李群上的运算都是可微的. 每一个李群都定义了一个单独的单位元 e 和两个微分映射: 群乘法 $\varphi: G \times G \rightarrow G$, 逆运算 $\psi: G^{-1} \rightarrow G$. 在李群 G 的单位元 e 处的切空间构成一个向量空间, 称为李代数 \mathfrak{g} , 其上定义了一个二元运算符, 称为李括号运算:

$$[x, y] = xy - yx \quad (5)$$

李群 G 和它的李代数 \mathfrak{g} 之间构成指数映射和对数映射关系, 如图 2 所示. 通常来说, 利用乘法函数研究李群是十分复杂的. 因此, 利用指数映射与对数映射实现元素在李群与李代数之间的转化, 可以帮助我们利用李代数研究李群上的相关问题.

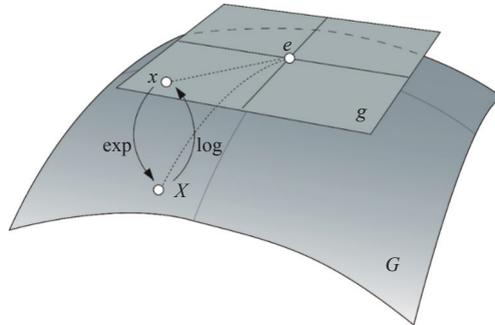


图 2 李群与李代数

指数映射将李代数 \mathfrak{g} 上的元素映射到李群 G 上. 从微分几何的角度来说, 李代数 \mathfrak{g} 是所有满足 $e^{tX} \in G, t \in \mathbb{R}$ 的矩阵 X 的集合, 而 e^{tX} 是李群 G 的一个单参数子群, 是在 G 的流形上的一条沿 X 方向的光滑曲线. 指数映射定义为:

$$\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G, \exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad (6)$$

与指数映射相反, 对数映射将李群 G 上的元素映射到单位元 e 处的切空间 (也即李代数 \mathfrak{g}):

$$\log: G \rightarrow g, \log(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}(X-e)^i}{i} \quad (7)$$

最常用的李群是一般线性 (general linear) 群, 它是由可逆线性变换构成的李群. 矩阵李群为线性李群的矩阵表示. 在实数域 R 上的 n 次一般线性群用 $GL(n, R)$ 来指代, 是指对 n 维矩阵做线性变换, 是所有具有实数项的 $n \times n$ 可逆矩阵的群. 在矩阵李群中, 单位元 e 对应一个单位矩阵 I , 群运算与逆运算也等价于矩阵乘法与矩阵逆运算. 常见的矩阵李群包括仿射群 $Aff(n)$ 、特殊正交群 $SO(n)$ 、特殊欧几里德群 $SE(n)$ 、酉群 $U(n)$.

由于李群是流形, 李群 G 中任意两个群元之间的距离通过测地线距离进行度量. 测地线被定义为流形上两个点之间的最短长度. 李群元素 X_1 与 X_2 之间的测地线距离可通过公式 (8) 计算:

$$D_{LG}(X_1, X_2) = \left\| \log(X_1^{-1}X_2) \right\|_F \quad (8)$$

其中, $\|\cdot\|_F$ 为 Frobenius 范数, 对于 m 行 n 列的矩阵元素 X , 设 a_{ij} 为 X 中第 i 行第 j 列的矩阵元素, 则 Frobenius 范数定义为:

$$\|X\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (9)$$

3 本文算法

如图 1 所示, 本文提出的李群聚类分析算法分为 6 个主要步骤: (1) 提取图像底层特征; (2) 构建图像的矩阵李群特征; (3) 初始化模糊隶属度矩阵与聚类中心; (4) 在李群流形上计算像素的李群特征到聚类中心的距离; (5) 更新聚类中心与模糊隶属度矩阵; (6) 终止迭代与分割图像.

3.1 提取图像底层特征

图像的边缘、兴趣点等特征提供了图像内容的丰富信息. 理想情况下, 图像特征不应随图像的旋转、尺度 (即分辨率变化或放大倍数) 或采集角度的改变而改变. 此外, 图像特征应该对光照条件和颜色不敏感. 本文从每张图像中提取 3 类图像的底层特征: 灰度值、梯度和纹理.

图像的灰度值是指灰度图像中像素的亮度, 取值是 0–255 之间的整数. 对于彩色图像, 在 RGB 颜色模型下, 可以通过公式 (10) 将 R 、 G 、 B 这 3 种基色的分量转换为灰度值:

$$I = 0.299R + 0.587G + 0.114B \quad (10)$$

图像梯度衡量的是图像变化的趋势, 它提供了两种信息: 梯度大小反映了图像变化的快慢, 梯度值越大, 像素变化越剧烈; 而梯度方向告诉我们图像变化最快的方向. 结合图像在 X 和 Y 方向的偏导数形成梯度向量. 利用梯度特征可以提取出图像的边缘区域信息. 在本文中, 我们从每个图像中计算一阶和二阶梯度.

纹理特征是图像像素在局部区域的统计, 由像素及其邻域的灰度和颜色分布决定. 纹理特征作为颜色特征的补充, 特别是当不同图像具有相似的直方图时, 能够反映图像中物体与背景之间的关系. 纹理区域的图像信息一般是非随机的、均匀的、易于观察的, 可以有效防止不同方向、角度、光照等对图像特征的影响. 本文选取了两类纹理特征来构建图像特征向量: Gabor 滤波器特征和 LBP 特征.

Gabor 滤波器与灵长类动物初级视觉皮层细胞的功能相关^[45], Gabor 滤波器特征被认为在最小化空间和频率的联合二维不确定性方面是最优的^[46]. Gabor 滤波器是由一个角度方向的正弦平面波调制的高斯核函数. 其表达式为:

$$Gabor(x, y) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \exp[j\omega_x(x \cos \theta + y \sin \theta)] \quad (11)$$

其中, ω_x 是正弦波的频率, σ 是高斯函数在 X 和 Y 方向的标准差, θ 表示滤波器的方位角.

LBP 是一种用于描述图像局部特征的算子, 表示对 (x, y) 及其周围像素域块的 8 个像素进行二值化操作的结果. LBP 长期以来被称为对单调光照、灰度和旋转变化的不变性, 可以有效增强图像中目标物体纹理特征的语义描述.

在完成上述图像底层特征的提取和计算后, 图像中的每个像素可以表达为一个 9 维的特征向量:

$$f(x,y) = \left[I(x,y), \left| \frac{\partial I(x,y)}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial I(x,y)}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial^2 I(x,y)}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 I(x,y)}{\partial y^2} \right|, Gabor(x,y), \right. \\ \left. LBP(x,y), \tan^{-1} \left(\left| \frac{\partial}{\partial x} I(x,y) \right| / \left| \frac{\partial}{\partial y} I(x,y) \right| \right), \sqrt{\left| \frac{\partial}{\partial x} I(x,y) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial y} I(x,y) \right|^2} \right]^T \quad (12)$$

其中, $I(x,y)$ 表示图像在像素点 (x,y) 处的灰度值; $\left| \frac{\partial I(x,y)}{\partial x} \right|$ 和 $\left| \frac{\partial I(x,y)}{\partial y} \right|$ 分别是沿着 X 和 Y 方向的一阶梯度; $\sqrt{\left| \frac{\partial}{\partial x} I(x,y) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial y} I(x,y) \right|^2}$ 是一阶梯度的平方和; $\tan^{-1} \left(\left| \frac{\partial}{\partial x} I(x,y) \right| / \left| \frac{\partial}{\partial y} I(x,y) \right| \right)$ 是两个一阶梯度比值的反余弦函数.

3.2 构建图像的矩阵李群特征

利用上一步获得的图像像素特征向量, 结合邻域窗口内中心像素的特征向量与窗口内像素特征向量均值的关系, 本文提出一种矩阵形式用于表达图像的每个像素:

$$LgM_i = \begin{bmatrix} D_i & \xi_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

公式 (13) 中, D_i 为第 i 个像素特征向量 f_i 构成对角线的 9×9 维对角矩阵, 为了确保其可逆, 对 f_i 的各个维度进行了归一化操作, 使其处在相同的区间内且区间最小值为 1; ξ_i 表示像素 i 的特征向量的均值滤波, 反映像素 i 的特征向量与邻域窗口内所有 n 个像素的特征向量之间的关系, 可以根据公式 (14) 计算:

$$\xi_i = \frac{1}{1 + \max_{i \in N_i}(\omega_i)} \left(f_i + \frac{\max_{i \in N_i}(\omega_i)}{n} \sum_{k=1}^n f_k \right) \quad (14)$$

其中, N_i 表示以像素 i 为中心的邻域窗口内的所有 n 个像素, 而 ω_i 表示像素 i 在它邻域窗口内的权重, 是基于局部差异系数 (local variation coefficient, LVC) 构建的, 可通过公式 (15) 和公式 (16) 计算:

$$\omega_i = \frac{\zeta_i}{\sum_{k=1}^n \zeta_k} \quad (15)$$

$$\zeta_i = \exp \left(\sum_{k=1}^n LVC_k \right) \quad (16)$$

局部差异系数 LVC 反映了邻域窗口内中心像素和它邻域内 n 个像素之间的差异程度. 像素 i 的局部差异系数定义为:

$$LVC_i = \frac{\sum_{k=1}^n (f_k - \bar{f}_i)^2}{n \times (\bar{f}_i)^2} \quad (17)$$

总结来说, 当邻域窗口的中心像素与其邻域像素之间的差异较大时, 局部差异系数 LVC 求得值也会增大. 将求得的 LVC 结果应用于指数函数, 并导出其在邻域窗口内的权重, 即公式 (15) 的结果, 通过该权重来反映以像素 i 为中心的邻域窗口内的异质性. 当邻域窗口内异质性较高时, 公式 (14) 求得值更趋近于邻域窗口内的均值, 反之则更趋近于窗口中心像素的值.

由公式 (13) 可知, LgM_i 矩阵是一个 10×10 的上三角矩阵并且 $|LgM_i| \neq 0$. 设有任意两个矩阵 LgM_i 与 LgM_j , 两个矩阵相乘可得:

$$LgM_i \times LgM_j = \begin{bmatrix} D_i & \xi_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_j & \xi_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_i D_j & D_i \xi_j + \xi_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中, D_i 和 D_j 都是对角矩阵, 所以两者的乘积 $D_i D_j$ 也是一个对角矩阵, 因此公式 (18) 中的矩阵乘法构成一个光滑映射 $\varphi: G \times G \rightarrow G$. 而矩阵 LgM_i 的逆矩阵 LgM_i^{-1} 为:

$$LgM_i^{-1} = \begin{bmatrix} D_i & \xi_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D_i^{-1} & -D_i^{-1} \xi_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

可见逆矩阵运算也是一个光滑映射 $\psi: G^{-1} \rightarrow G$. 因此图像特征的矩阵表示构成在实数域 R 上的一般线性群

的条件,也就是一个矩阵李群.经过这一步,待分割图像中的每个像素都被映射到李群流形之中.

3.3 初始化模糊隶属度矩阵与聚类中心

在李群模糊聚类算法中,聚类中心代表某个类别的中心,位于李群流形上,与李群特征在流形上的位置以及对每个类别的隶属度值 u_{ij} 相关.因此,首先需要对模糊隶属度矩阵进行初始化.进而初始化聚类中心.模糊隶属度矩阵是一个 N 行 C 列的矩阵,矩阵元素 u_{ij} 表示 N 个样本各自对于 C 种类别的隶属度值.

在满足公式 (1) 约束条件的情况下,本文对模糊隶属度矩阵使用随机数初始化:首先选取模糊隶属度矩阵中的一行并填入随机数,接着将该行中各个元素除以该行元素总和,即 $u_{ij} / \sum_{k=1}^C u_{ik}$,从而得到符合条件的初始模糊隶属度矩阵.根据初始化得到的模糊隶属度矩阵和公式 (4),可以得到初始化的聚类中心:

$$V_j = \exp \left(\frac{\sum_{i=1}^N u_{ij}^m \log(LgM_i)}{\sum_{i=1}^N u_{ij}^m} \right) \quad (20)$$

3.4 在李群流形上计算特征到聚类中心的距离

聚类的过程就是通过反复的迭代运算逐步降低目标函数的误差值,而目标函数本质上是各个点到各个聚类中心的距离之和.在李群流形上,像素 i 的矩阵李群特征 LgM_i 到一个聚类中心 V_j 的最短路径可以表达为一条曲线,如图 1 所示.两者的距离可以利用公式 (3) 的测地线距离进行度量:

$$D_{LG}(LgM_i, V_j) = \left\| \log(LgM_i^{-1} V_j) \right\|_F \quad (21)$$

考虑到 LgM_i 是一个 10×10 的矩阵,在算法迭代中重复对它求逆矩阵产生的计算量会非常大.通过李群与李代数之间的映射关系,可将上面的李群矩阵写成李代数的形式,其中 lgm_i 代表李群矩阵 LgM_i 对数映射后得到的李代数形式:

$$\log(LgM_i^{-1} V_j) = \log(\exp(-lgm_i) \exp(v_j)) \quad (22)$$

根据矩阵李群的 Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) 公式可将公式 (22) 展开:

$$\log(\exp(-lgm_i) \exp(v_j)) = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{r_k+s_k>0} \frac{(-lgm_i)^{r_1} v_j^{s_1} \dots (-lgm_i)^{r_n} v_j^{s_n}}{r_1! s_1! \dots r_n! s_n!} \quad (23)$$

BCH 公式类似于 Taylor 展开式,可用展开式的前几项作为计算结果的近似.由李代数的李括号运算(参见公式 (5)),可得到公式 (23) 的一个直观表达形式:

$$\log(\exp(-lgm_i) \exp(v_j)) = -lgm_i + v_j - \frac{1}{2} [lgm_i, v_j] + \frac{1}{12} [-lgm_i, [-lgm_i, v_j] - \dots] \dots \quad (24)$$

当只取公式 (24) 前面两项时,在李群流形上像素 i 的矩阵李群特征 LgM_i 到一个聚类中心 V_j 的测地线距离可近似化简为:

$$D_{LG}(LgM_i, V_j) = \left\| -lgm_i + v_j \right\|_F = \left\| \log(V_j) - \log(LgM_i) \right\|_F \quad (25)$$

3.5 更新聚类中心与模糊隶属度矩阵

利用邻域窗口内各像素的聚类隶属度信息是提高模糊聚类算法的抗噪性的一种重要思路.本文在目标函数上添加模糊隶属度信息约束项,并利用局部差异系数构造自适应权重,然后基于此目标函数更新聚类中心与模糊隶属度矩阵,提出一种自适应加权模糊隶属度约束的目标函数:

$$J(U, V) = \sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^N u_{ij}^m D_{LG}^2(LgM_i, V_j) + \frac{\bar{\omega} \omega_i}{n} \sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^N u_{ij}^m \sum_{r=1}^n (1 - u_{rj})^m \quad (26)$$

其中, ω_i 与 $\bar{\omega}$ 分别根据全局像素与像素各维度特征的局部差异信息归纳得来, ω_i 为当前像素底层特征各维度特征局部差异系数均值,由公式 (15) 计算而得. $\bar{\omega}$ 为当前图像中所有像素的 ω_i 的平均值.

$$\bar{\omega} = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i}{N} \quad (27)$$

隶属度信息约束项将每个像素的聚类隶属度与其邻域内 n 个邻域像素的聚类隶属度关联. 当邻域窗口中心像素与其邻域像素关于某一类别的隶属度值同时偏小或偏大时, 说明中心像素与其邻域像素差异性小, 中心像素为噪声的可能性也小; 反之, 则说明中心像素与其邻域像素差异性大, 中心像素为噪声的可能性大. 然而, 隶属度信息约束项也与图像的信噪比相关. 当图像噪声水平较高时, 邻域窗口内出现多个噪声像素的可能性也更大, 此时应该降低隶属度信息约束项的权重. 本文提出的隶属度信息约束项不需要基于先验信息手动确定权值, 而是利用局部差异系数信息实现自适应加权, 同时不仅包含了像素的全局信息, 也包含了特征各维度信息, 可以适用于多维度特征像素的聚类. 基于公式 (26), 样本隶属度的更新表达式为:

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^C \left[\frac{D_{LG}^2(LgM_i, V_j) + (\bar{\omega}\omega_i \sum_{r=1}^n (1 - u_{rj})^m / n)}{D_{LG}^2(LgM_i, V_k) + (\bar{\omega}\omega_i \sum_{r=1}^n (1 - u_{rk})^m / n)} \right]^{\frac{1}{m-1}}} \quad (28)$$

由于添加的约束项中不涉及聚类中心, 本文算法的聚类中心更新表达式与公式 (20) 相同.

3.6 终止迭代与分割图像

当算法的迭代次数达到最大迭代次数 T 次, 或当算法迭代后得到的目标函数值与上一次迭代得到的目标函数值差距小于聚类迭代终止误差 ε 时, 算法终止迭代. 算法终止后, 通过输出隶属度信息得到图像的分割结果. 在模糊隶属度矩阵中, 取每一行隶属度值中的最大值对应的列号, 作为该行所代表样本最终的聚类类别, 即当 $u_{ij} = \max_{1 \leq k \leq C} (u_{ik})$ 时, 样本 LgM_i 代表的像素 i 归属为第 j 类. 在得到各个像素的类别归属后, 算法便可以将同一类别的像素设置相同灰度值, 从而得到原图像分割后的可视化结果, 也可以将同一类别的像素单独显示在一张图中.

综上所述, 本文提出的李群 FCM 聚类算法的基本流程如算法 1 所示.

算法 1. 李群 FCM 聚类分析.

输入: 图像像素点特征集合 $F = \{f_i\}_{i=1}^N$, 聚类数目 C , 模糊因子 m , 邻域窗口尺寸参数 w , 聚类最大迭代次数 T , 聚类迭代终止误差 ε ;

输出: 模糊隶属度矩阵 $U = \{u_{ij}\}_{i,j=1}^{N,C}$.

1. 利用公式 (13)–公式 (17) 将特征向量集合 F 转变为矩阵李群特征.
 2. 初始化模糊隶属度矩阵 U 、聚类中心 V 与加权项 $\{\bar{\omega}\omega_i\}_{i=1}^N$.
 3. 令迭代计数器 $t = 0$, 目标函数值 $J = 0$;
 4. 重复执行
 5. 在李群流形上计算像素 i 的矩阵特征到聚类中心的测地线距离;
 6. 利用公式 (20) 计算聚类中心 V_j , 更新聚类中心集合 V ;
 7. 利用公式 (28) 计算模糊隶属度 u_{ij} , 更新模糊隶属度矩阵 U ;
 8. 利用公式 (26) 计算目标函数值 J ;
 9. $t = t + 1$;
 10. 直到 $|J - J^{t-1}| \leq \varepsilon$ or $t \geq T$
 11. 返回 U
-

4 实验与分析

4.1 实验设置

为了验证本文提出算法在图像分割任务中的性能, 实验选取了 6 类算法与本文算法的分割结果进行对比, 分

别为传统 FCM^[1], KFCM^[7], SKFCM^[32], KWFLICM^[34], ARKFCM^[35], MFCM^[36]. 各类算法通用的参数如下: 模糊因子 $m = 2$, 聚类迭代终止误差 $\varepsilon = 0.001$, 聚类最大迭代次数 $T = 200$. 另外, 使用高斯核函数的算法在参与实验时, 其核函数带宽采用研究^[35]中所推荐的取值方式取值; 使用邻域窗口的算法, 邻域窗口尺寸均设置为 3×3 ; SKFCM 算法中的目标函数权重参数选取其研究中的推荐值. MFCM 算法中求取新隶属度信息的相关参数选取其研究中的推荐值. 由于各算法均采用随机初始化的方式, 因此各类算法在每张图片上运行 100 次后取效果最优 (指下文所提的 SA 系数最优) 的结果进行对比.

在评价各类算法的分割结果优劣时, 本文采用 Jaccard 相似系数 (JS)^[47]与分割准确度 (SA)^[48]. 其中, JS 系数用于判断各个类别的分割精度, SA 系数用于判别多个类别的整体分割精度. JS 系数为算法分割结果 S_1 与标准分割结果 S_2 的交集元素数目与并集元素数目之比:

$$JS(S_1, S_2) = \frac{|S_1 \cap S_2|}{|S_1 \cup S_2|} \quad (29)$$

JS 系数值越大表明算法得到的分割结果与标准分割结果越相近, 即算法分割性能越好; 反之, 则算法的分割性能越差. JS 系数最大值为 1, 最小值为 0. SA 系数为各类别的分割结果 S_i 与标准分割结果 S'_i 的交集元素数目之和与样本总数之比, 若分割的类别总数为 C , 样本总数为 N , 则 SA 系数为:

$$SA = \frac{\sum_{i=1}^C |S_i \cap S'_i|}{N} \quad (30)$$

SA 系数值越大表明算法得到的多个类别的分割结果与标准分割结果整体越相近, 即算法分割性能越好; 反之, 则算法的分割性能越差. SA 系数同样最大值为 1, 最小值为 0. 另外, 实验得到的背景分割结果没有单独展示, 但计算 SA 系数时依旧计算在内.

本文所有实验均在一台个人台式计算机上完成, 计算机配备 Intel(R) Core(TM) i5-11400H 中央处理器, 内存 16 GB, 硬盘 2 TB, 安装 Windows 11 操作系统, 编程环境为 Matlab 2021b.

4.2 实验数据

本文选择了 3 组医学图像进行实验: 脑部 MR 图像、胸部 CT 图像、眼底图像, 并从各个图像数据库中挑选了 3 张图像用于展示具体的分割结果. 挑选的 3 类图像及其标准分割结果如图 3 所示.

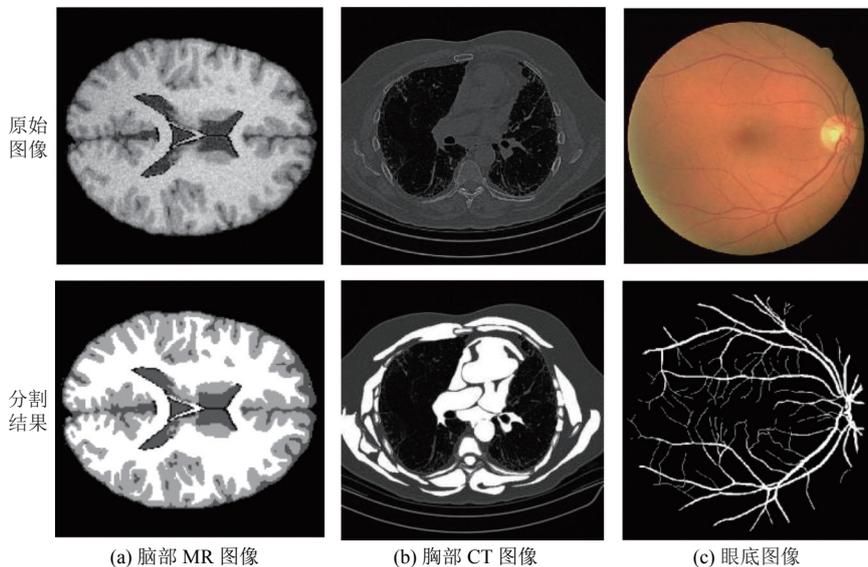


图 3 实验图像及其标准分割结果

(1) 脑部 MR 图像

磁共振成像 (MRI) 技术是脑部检查的一种重要手段. 由于人脑中组织排列紧密, 因此得到的脑部 MR 图像细节丰富, 也更容易被噪声干扰. 通过对脑部 MR 图像中灰质、白质等组织的分割, 可以帮助医生处理数据, 提高诊断效率. 本文实验使用的图像选自 BrainWeb 人脑 MR 图像数据库^[49]的轴向 T1 加权切片. 图像包含 181×217 像素, 包含了 7% 的高斯噪声干扰与 40% 的灰度不均匀性干扰. 实验选取了图像中的灰质、白质与脑脊液这 3 种组织进行分割.

(2) 胸部 CT 图像

计算机断层扫描 (computed tomography, CT) 是诊断肺部疾病常用的方法之一. 通过对胸部 CT 图像进行分割, 提取和显示肺部区域, 可以帮助医生更容易发现一些早期的肺部疾病或得到更加准确的诊断结果. 本文实验中使用的图像选自胸部 CT 切片数据集^[50], 每一张图片的大小为 512×512 像素. 由于实验选取的数据为原始 CT 数据成像后保存的图像数据, 因此实验图像中包含了较高水平的噪声, 能够较好地体现各类算法在高噪声条件下的分割表现.

(3) 眼底图像

眼底成像是一种利用光学镜头检查眼底的一种方式. 眼底包含大量动脉、静脉和毛细血管, 这些血管反映人体全身血液循环的动态以及健康状况. 从眼底图像中提取出这些血管, 能让医生看清眼底的组织结构, 分析是否存在异常, 最后根据详细的筛查与诊断并给出具体的治疗方案. 本文实验中使用的图像来自 DRIVE 数据集的眼底图像集^[51], 包含 584×565 像素, 每个像素由一个 RGB 值决定颜色.

4.3 实验结果

4.3.1 实验 1: 脑部 MR 图像灰质、白质和脑脊液分割

实验对脑部 MR 图像中的灰质、白质和脑脊液这 3 类组织进行分割. 各算法在脑部 MR 图像库上的平均分割精度如表 1 所示, 每一项的最高数值以加粗字体标识. 可见本文算法对脑脊液、灰质和白质的分割结果分别取得了 0.845、0.820、0.824 的 *JS* 系数值, 以及 0.961 的 *SA* 系数值. 其中, 本文算法在脑脊液与灰质这两类分布零散, 形状狭长的组织上的分割精度高于其他算法, 表明了算法对于图像细节部分的保留能力更强. 而本文算法在白质组织上的 *JS* 系数值低于 KWFLICM 算法与 MFCM 算法, 这是由于相比于其他两类组织, 白质组织的分布较为集中, 更加符合 KWFLICM 算法与 MFCM 算法抗噪思路的设计场景. 在反应整体分割水平的 *SA* 系数上, 本文算法取得了最高值, 表明相较于其他改进 FCM 算法, 本文算法的整体分割精度最高.

为了更直观地对比各算法的分割结果, 实验从脑部 MR 图像库中选取图片 (编号 90) 并添加了方差为 0.005 (图像归一化至 $[0, 1]$ 后的方差值) 的零均值高斯噪声构成加噪图像, 在高噪声场景下可视化各算法的具体分割结果. 实验结果如图 4 所示. 可以发现, 除了传统 FCM 算法、KFCM 算法与 SKFCM 算法, 其余算法均取得了可视化效果较好的整体分割结果. 但观察各类组织分割结果可以发现: (1) KWFLICM 算法存在明显的过分割, 弯折处本该存在空隙的灰质分割结果连接在了一起, 且脑脊液的分割结果存在许多缺失; (2) ARKFCM 算法的各组织分割结果存在许多离散点, 显然是受到噪声与灰度不均匀性的影响导致了误分割; (3) MFCM 算法的各组织分割结果虽然离散点较少, 但其分割结果与本文算法分割结果相比, 各组织边缘连接处存在一定的误分割, 例如右下角处灰质的弯折比标准结果更粗, 左下角处白质向灰质弯折处的延伸只剩几个断开连接的像素点. 总的来看, 在高噪声场景下本文算法的分割结果虽然仍存在一些离散的误分割点, 但细节更丰富, 结果更还原.

各算法在所选加噪图像上分割结果的具体精度如表 2 所示, 本文算法对脑脊液、灰质和白质的分割结果分别取得了 0.726、0.716、0.823 的 *JS* 系数值, 以及 0.931 的 *SA* 系数值, 均高于其他对比算法. 由于本文算法在李群矩阵特征的基础上同时利用了邻域均值信息与邻域隶属度信息, 因此在高噪声场景下的表现优于其他对比算法. 另外, 同样同时利用均值信息与隶属度信息的 MFCM 算法取得了次优的分割结果.

表 1 各算法在脑部 MR 图像库上的平均分割精度

算法	各组织分割结果的JS系数			SA系数
	脑脊液	灰质	白质	
FCM	0.787	0.759	0.761	0.945
KFCM	0.650	0.658	0.728	0.901
SKFCM	0.082	0.126	0.466	0.715
KWFLICM	0.675	0.804	0.833	0.949
ARKFCM	0.784	0.804	0.821	0.955
MFCM	0.781	0.815	0.830	0.957
本文算法	0.845	0.820	0.824	0.961

表 2 各算法在加噪脑部图像上的分割精度

算法	各组织分割结果的JS系数			SA系数
	脑脊液	灰质	白质	
FCM	0.414	0.426	0.591	0.825
KFCM	0.285	0.331	0.601	0.766
SKFCM	0.227	0.281	0.635	0.772
KWFLICM	0.676	0.684	0.781	0.919
ARKFCM	0.711	0.699	0.797	0.921
MFCM	0.714	0.713	0.814	0.927
本文算法	0.726	0.716	0.823	0.931

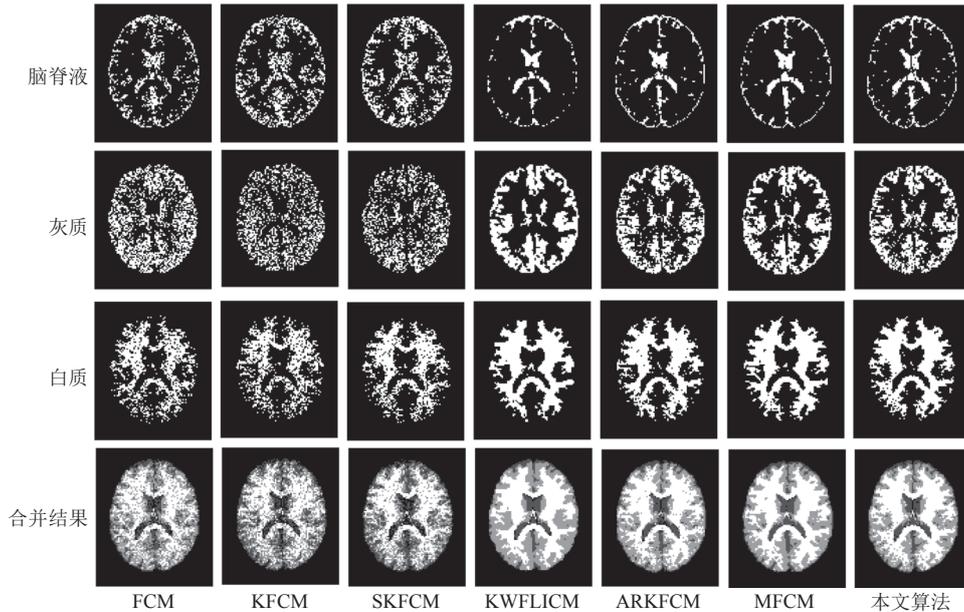


图 4 各算法在脑部 MR 加噪图像上实验结果

4.3.2 实验 2: 胸部 CT 图像 3 类组织分割

本实验中, 胸部 CT 图像中不同强度的组织被分为了 3 类, 包括脂肪组织 (组织 1)、肌肉与血管等组织 (组织 2) 以及骨膜骨质组织 (组织 3). 各算法在胸部 CT 图像库上的平均分割精度如表 3 所示, 其中本文算法针对标注组织的分割取得了 0.634、0.656 和 0.265 的 JS 系数值以及 0.792 的 SA 系数值. 其中组织 1、组织 2 与图像整体的分割精度高于其他算法, 组织 3 分割的 JS 系数低于 ARKFCM 算法与 MFCM 算法. 这可能是由于受到导数信息的影响, 本文算法将一些边缘处的高强度像素误分为了组织 3.

同样为了更直观地对比各算法的分割结果, 实验从胸部 CT 图像库中选取图片 (编号 191) 并添加高斯噪声构成了加噪图像, 从而在高噪声场景下可视化各算法的具体分割结果. 由于实验图像已经包含了较高水平的噪声, 添加的高斯噪声为方差为 0.001 (图像归一化至 [0, 1] 后的方差值) 的零均值高斯噪声. 实验结果如图 5 所示. 可以看出, KFCM 算法、SKFCM 算法与 KWFLICM 算法均未能将图像中强度最高的骨骼边缘组织分割出来, 没有得到层次清晰的不同强度的组织分割结果; 而 FCM 算法与 ARKFCM 算法虽然分割得到了不同强度的组织, 但受到图像高噪声的影响, 得到的分割结果噪点多, 完整性差; 另外, MFCM 算法虽然抗噪性强, 但可分性差, 未能将像素灰度值接近的组织 1 与组织 2 分割开, 导致最后分割性能较差. 相比之下, 本文提出算法得到的分割结果中噪点少, 完整性好, 带来的对于图像中不同强度组织的可视化效果更佳. 但受到导数信息的影响, 组织 3 仍存在一定的误

分割.

各算法在所选加噪图像上分割结果的具体精度如表 4 所示, 本文算法针对标注组织的分割取得了 0.648、0.633 和 0.230 的 JS 系数值以及 0.799 的 SA 系数值, 除了对组织 3 的分割精度, 其余指标均高于用于对比的算法. 总的来看, ARKFCM 的分割精度仅次于本文算法. 本文算法通过将特征信息转移至李群流形空间后利用测地线距离进行聚类, 在一定程度上提高了样本信息的可分性.

表 3 各算法在胸部 CT 图像库上的分割精度

算法	各组织分割结果的 JS 系数			SA 系数
	组织1	组织2	组织3	
FCM	0.363	0.347	0.238	0.651
KFCM	0.205	0.228	0.012	0.608
SKFCM	0.281	0.352	0.011	0.670
KWFLICM	0.511	0.449	0.015	0.731
ARKFCM	0.537	0.506	0.332	0.744
MFCM	0.609	0.001	0.330	0.670
本文算法	0.634	0.656	0.265	0.792

表 4 各算法在加噪胸部 CT 图像上的分割精度

算法	各组织分割结果的 JS 系数			SA 系数
	组织1	组织2	组织3	
FCM	0.406	0.349	0.255	0.667
KFCM	0.221	0.274	0.011	0.658
SKFCM	0.299	0.363	0.009	0.674
KWFLICM	0.502	0.425	0.015	0.721
ARKFCM	0.553	0.494	0.305	0.762
MFCM	0.598	0.001	0.295	0.665
本文算法	0.648	0.633	0.230	0.799

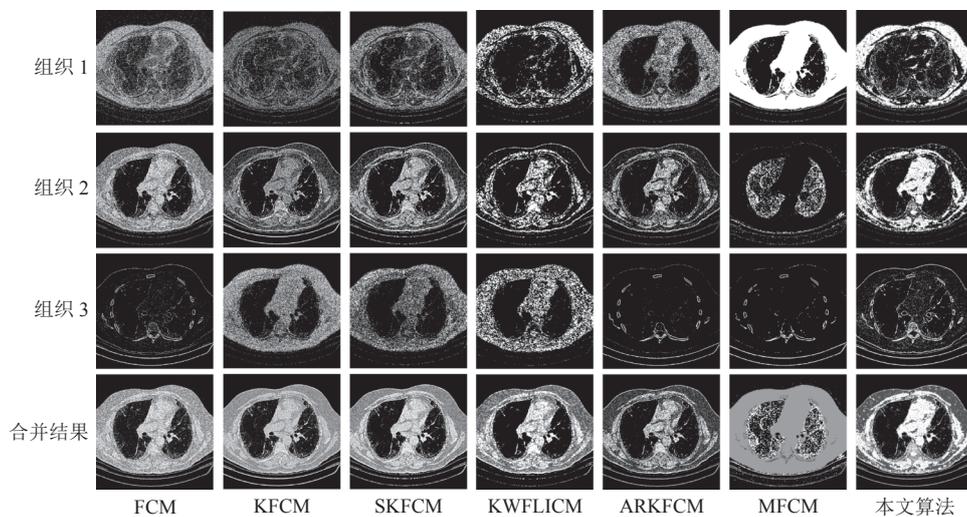


图 5 各算法在胸部 CT 加噪图像上实验结果

4.3.3 实验 3: 眼底图像血管结构分割

本实验首先将眼底图像从彩色图像转化为灰度图像, 然后对图像中血管结构进行分割. 在挑选出的图像上 (编号 32) 的实验结果如图 6 所示, 各算法中仅 FCM 算法与本文算法分割出血管部分. 但受噪声影响, FCM 算法得到的分割结果存在许多误分割像素, 影响可视化效果. 与之相比, 本文提出的算法则大大减少了误分割像素数量, 得到了可视化效果良好的血管分割结果. 此外, 其他 FCM 改进算法均未取得有效分割结果.

各算法在所选眼底图像与眼底图像库上的分割结果精度如表 5 所示. 虽然本文算法得到的血管分割结果与标准分割结果 (参见图 3(c) 下) 仍有一定差距, 但其提供的分割结果适合进行相关形态学操作, 使获得更高精度的分割结果成为可能. Mehidi 等人^[52]的研究指出, 眼底图像对比度低、背景照明不均匀且噪声水平高, 对眼底血管的分割任务中, 基于导数的对比度信息价值更大. 然而, 虽然提取的底层特征提供了导数信息, 但用于对比的各类改进 FCM 算法却均未能取得有效的血管分割结果. 原因可能在于各类改进算法没有有效地提高多维特征样本的可分性. 基于核函数的 KFCM、SKFCM、KWFLICM 和 ARKFCM 均没有考虑多维特征的输入情况, 只采用了各向同性核函数. 而 MFCM 没有利用核函数改变样本的可分性, 同时采取的降噪策略弱化了信息量比例较小的导数信

息. 因此在本文实验只对样本各维度特征进行归一化而没有进行标准化的情况下, MFCM 算法同样不能得到有效的分割结果. 本文算法通过将特征信息转移至李群流形空间后利用测地线距离进行聚类, 改变了样本的分布, 因此相比于其他算法对多维特征样本可分性的提升更好, 带来了更好的分割效果.

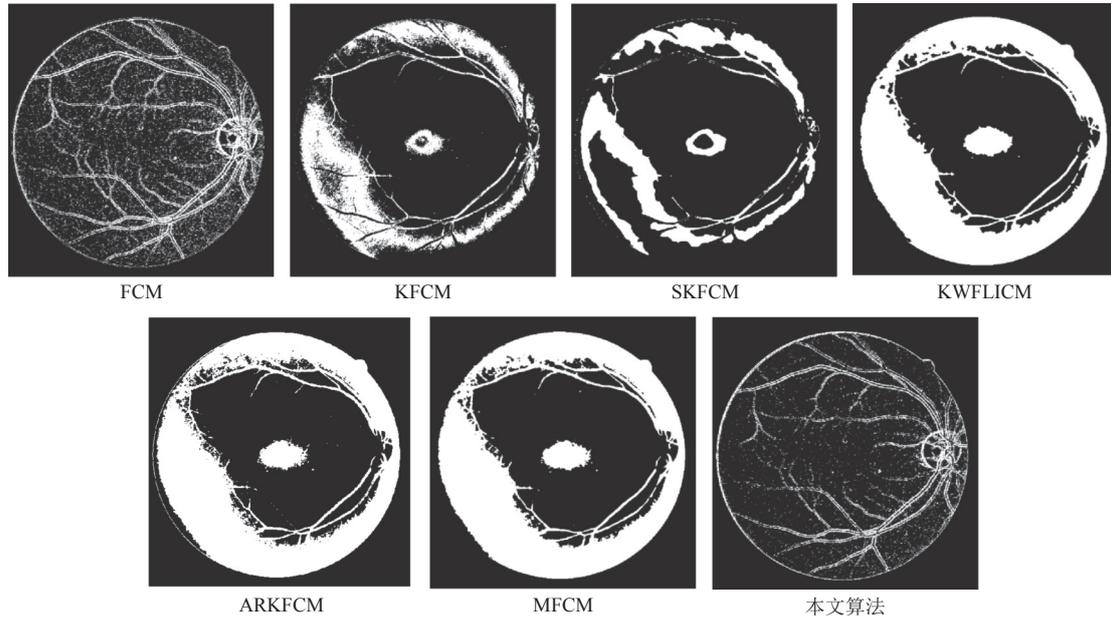


图 6 各算法在眼底图像上的实验结果

表 5 各算法在眼底图像上的分割精度

算法	所选图像分割结果JS系数	眼底图像数据库分割结果平均JS系数
FCM	0.259	0.183
KFCM	0.121	0.131
SKFCM	0.109	0.129
KWFLICM	0.146	0.144
ARKFCM	0.149	0.154
本文算法	0.313	0.288

4.4 算法稳定性分析

本节以各算法在实验 1 当中的 SA 系数作为性能指标. 为了分析算法整体的稳定性, 各算法均在编号 90 图像上运行 100 次并计算出其 SA 系数的平均值与标准差. SA 系数平均值越高, 说明算法的分割能力越强, SA 系数平均标准差值越小, 说明算法的稳定性越好. 在图 7 中, 我们用带标准差的柱状图归纳表示各算法对脑部 MR 图像 (每组左侧数据柱) 及其加噪图像 (每组右侧数据柱) 的 100 次分割实验结果. 如图 7 所示, 本文算法得到的 SA 平均值为所有算法中最高: 在原图像实验中为 0.960 4; 在加噪图像实验中为 0.929 8; MFCM 算法的 SA 平均值次之, 在原图像实验中为 0.956 5, 在加噪图像实验中为 0.926 2. 同时, 本文算法得到的 SA 平均标准差值最低: 在原图像实验中为 0.000 4; 在加噪图像实验中为 0.0012, 与传统 FCM 算法的 0.000 5 与 0.002 5 和 MFCM 的 0.000 4 与 0.001 5 均处于十分低的水平.

观察其他算法可以发现, 基于核函数改进的 4 类算法运行得到的结果稳定性均较差. 其中, KWFLICM 算法与 ARKFCM 算法在脑部 MR 图像原图像上 100 次分割实验中得到的 SA 平均值甚至低于 FCM 算法. 这主要是由于加入核函数后, 通过拉格朗日乘法对聚类中心和模糊矩阵进行迭代优化时更容易使算法陷入局部最优值的情

况. 本文提出的算法则有效地避免了该类情况的发生, 所以在算法稳定性方面超过各种基于核函数的 FCM 改进算法.

4.5 算法运行速度分析

为了对比各 FCM 改进算法的运行速度, 本文对各算法的运行时间与聚类迭代次数进行讨论. 为了对比不同算法在相同类别组织分割结果下的运行速度从而得到更客观的结果, 本节选取了实验 1 中所展示的编号 90 图像的实验进行对比, 并统计了各算法在运行 100 次后得到的平均运行时间与平均迭代次数, 如图 8 所示.

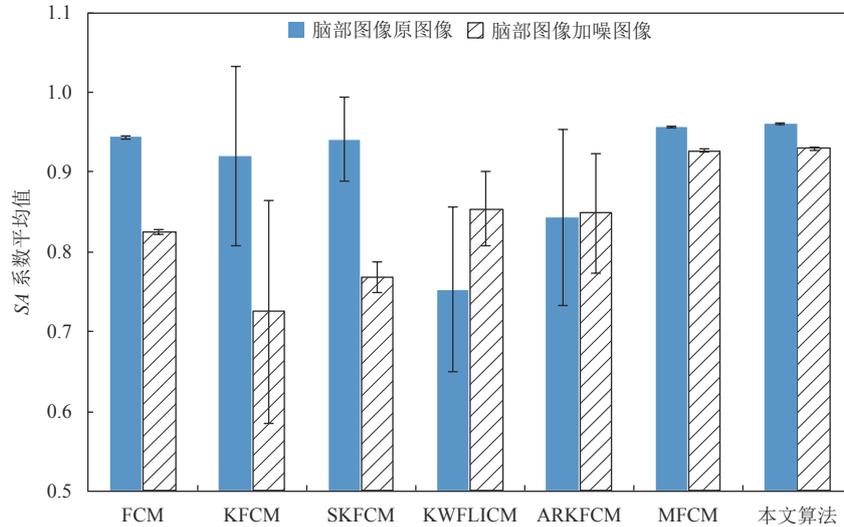


图 7 各算法在所选图像上实验结果的 SA 系数平均值及标准差

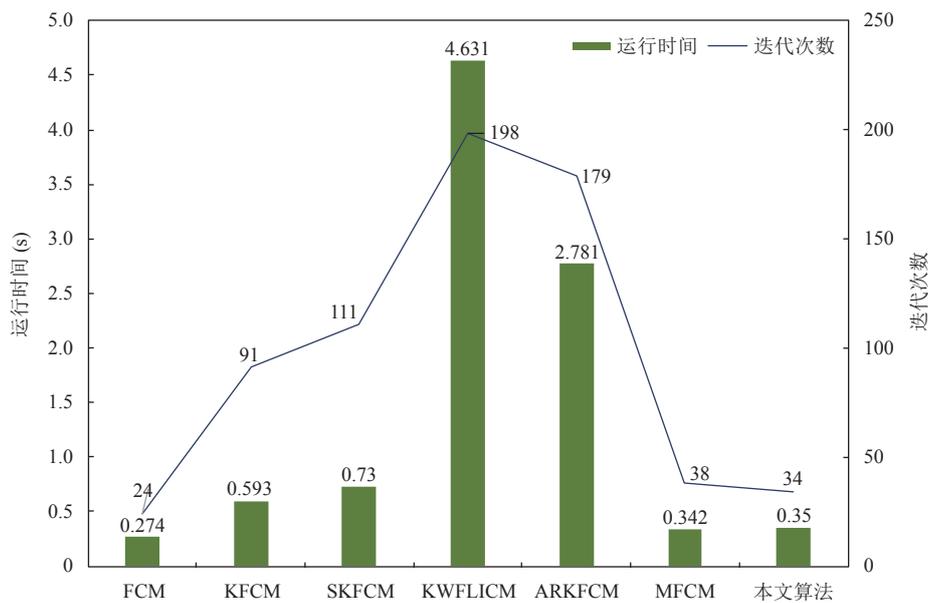


图 8 各算法在所选图片上的平均运行时间及平均迭代次数

从图 8 中可以发现, 基于核函数改进的 4 类算法的平均运行时间与平均迭代次数均远高于 FCM 算法. 这是由于在聚类过程中需要对数据与聚类中心进行核函数映射. 其中 KWFLICM 算法由于需要单独统计邻域窗口中每一个邻域像素的特征信息并作为约束, 时间开销更高. 本文算法在实验中的平均迭代次数为所有改进算法中最小

的, 这表明相较于其他改进算法, 本文算法收敛更快. 而本文算法在实验中的平均运行时间略低于 MFCM, 这是由于 MFCM 在聚类中利用邻域像素隶属度信息直接更新中心像素隶属度信息, 不需要调整聚类中心的更新方式, 速度更快.

由于 FCM 改进算法存在陷入局部最小值的问题, 进而会影响算法的迭代次数与运行时间, 因此再次选取了各算法在 100 次运行内取得最优结果 (指 SA 系数最高结果) 时的运行时间与迭代次数, 比较各算法取得最好分割效果时的运行效率. 结果如图 9 所示. 从图 9 中可以看出, 本文算法较其他改进算法迭代次数更低, 运行时间更短. 与 MFCM 算法相比, 虽然 MFCM 算法平均单次迭代的运行时间更短, 但由于本文算法能够更快地收敛, 因此整体运行时间更短. 结合第 4.4 节算法稳定性的分析可以发现, 本文算法的整体性能优于其他对比算法.

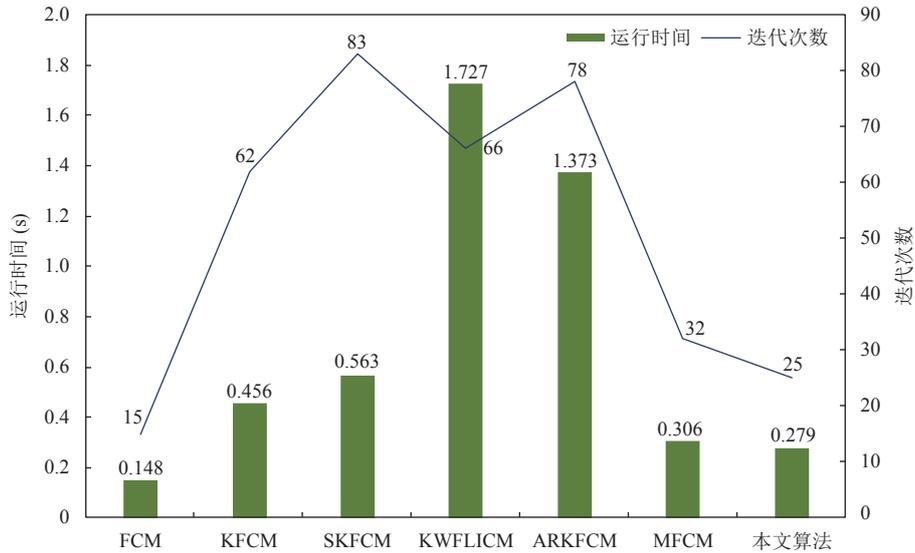


图 9 各算法在所选图片上取得最优结果时的运行时间及迭代次数

4.6 算法有效性分析

本文提出的算法相对于传统 FCM 算法的改进主要体现在 3 个方面: (1) 从图像底层特征中构建矩阵李群特征, 将聚类分析中求取像素点之间的欧氏距离问题转变为在李群流形上求取图像特征之间的测地线距离; (2) 在矩阵李群特征中包含加权均值滤波信息, 增强了像素与其邻域像素特征矩阵的联系; (3) 使用自适应加权模糊隶属度约束的目标函数. 本节对每项改进设置了一个算法, 检验这些改进的有效性. 相关的算法设置如下.

算法 a: 采用不含邻域均值信息的矩阵李群特征, 即公式 (13) 中的 ξ 向量设置为 0 向量, 并且不使用自适应加权模糊隶属度约束的目标函数. 设置该算法的目的是验证本文算法第 1 项改进的有效性.

算法 b: 采用包含邻域均值信息的矩阵李群特征, 并且不使用自适应加权模糊隶属度约束的目标函数. 设置该算法的目的是验证本文算法第 2 项改进的有效性.

算法 c: 采用不含邻域均值信息的矩阵李群特征, 并且使用自适应加权模糊隶属度约束的目标函数. 设置该算法的目的是验证本文算法第 3 项改进的有效性.

算法 d: 采用包含邻域均值信息的非零特征向量作为输入, 并将目标函数及相关更新公式中的测地线距离替换为欧氏距离, 同时使用自适应加权模糊隶属度约束. 设置该算法的目的是对比在相同的特征信息与目标函数下, 在欧氏空间中使用欧氏距离度量与在李群空间中使用测地线距离度量的结果.

算法有效性分析仍然以实验 1 当中的挑选的编号 90 脑部 MR 图像的原图像与其加噪图像为实验对象, 采用 SA 系数作为性能指标, 分析结果如表 6 所示.

由表 6 可见算法 a、b、c 无论是对原图像还是加噪图像, 分割结果都优于传统 FCM 算法, 分别验证了本文

对 FCM 算法改进的 3 个方面的有效性. 本文算法可以看做是算法 a、b、c 的综合. 在原图像上, 本文算法与算法 c 性能相同, 表明在低噪声场景下, 邻域像素的隶属度信息较邻域像素特征均值信息的作用更大; 而在高噪声场景下, 均值信息则能补全隶属度信息的不足. 无论在原图像还是加噪图像上, 本文算法的分割性能均优于算法 d, 这表明在基于测地线距离度量的李群空间中样本的可分性更好. 进一步来看, 算法 d 的分割性能甚至低于算法 b 与算法 c, 这是由于矩阵李群特征展开后的特征向量维度较高, 在不进行处理的情况下可分性较差.

表 6 各算法对脑部 MR 图像分割结果的 SA 系数

算法	基于李群理论	包含邻域均值信息	使用自适应加权模糊隶属度约束	原图像	加噪图像
FCM	×	×	×	0.944	0.825
算法a	√	×	×	0.951	0.875
算法b	√	√	×	0.955	0.896
算法c	√	×	√	0.961	0.907
算法d	×	√	√	0.954	0.891
本文算法	√	√	√	0.961	0.931

5 总结与展望

本文提出一种基于李群理论的 FCM 图像分割算法, 首先从底层图像特征 (颜色、梯度和纹理等) 中构建每个像素的矩阵李群特征, 将图像从欧氏空间映射到李群空间, 然后在李群流形上计算矩阵李群特征与各聚类中心的距离, 并更新聚类中心和模糊隶属度矩阵, 直至达到设定的迭代终止条件, 最终通过解模糊得到分割的图像结果. 为了验证所提方法在图像分割方面的有效性, 本文将算法应用到 3 组医学图像: 脑磁共振 (MR) 图像、胸部电子计算机断层扫描 (CT) 图像、眼底图像, 并将图像分割结果与传统 FCM 算法以及几种常见的 FCM 改进算法进行了对比. 实验分别用 JS 系数评价各类算法对单个类别的分割精度, SA 系数判别多个类别的整体分割精度. 实验结果证明李群 FCM 算法的分割精度要优于其他算法, 同时分割速度与聚类迭代收敛的要优于其他算法.

总的来说, 本文方法优于其他 FCM 改进算法主要有 3 个方面的原因: 首先, 相比基于像素点底层图像特征的 FCM 算法, 本文的方法通过构建矩阵李群特征, 更好地反映了图像的细节以及各个特征之间的联系; 其次, 图像不同部分的平滑形变与转化是一个流形上的微分同胚映射, 可以看成是一个李群结构, 本文提出的方法通过在李群流形上计算图像李群特征与聚类中心之间的距离, 利用了李群的连续变换性, 有助于提高图像中不同聚类的可分性; 最后, 本文基于局部统计信息构建了矩阵李群特征中的加权均值滤波信息与目标函数中的自适应加权模糊隶属度约束, 优化了邻域空间信息的利用, 在提高算法抗噪能力的同时更好地保留图像细节, 并提高了算法的收敛速度. 值得一提的是, 通过对本文算法优势的前两方面原因分析可以发现, 对李群理论的运用完全可以推广至其他基于距离或基于划分的图像分割算法中, 通过加强特征之间的联系和提升样本的可分性来提高相关算法的性能, 这也将是未来我们研究的方向之一.

尽管在本文的 3 个实验中都表现出优于其他算法的性能, 李群 FCM 算法在应用到图像分割方面仍然存在以下 3 方面的局限性. 首先算法没有充分利用数据的信息来初始化模糊隶属度矩阵和聚类中心. 如本文第 3.3 节所述, 算法对模糊隶属度矩阵使用随机数初始化, 然后基于此初始化聚类中心. 与大多数非线性优化问题一样, 聚类结果难免受到初始值的影响, 不合适的初始聚类中心可能导致聚类结果次优或者聚类过程收敛很慢. 未来我们考虑利用图像的统计信息或模型, 结合图论中的一些方法, 改进李群 FCM 算法的初始化部分. 另外, 本文没有深入探讨不同的李群矩阵特征构造方式带来的影响, 这可能会对进一步提升李群空间上样本的可分性有所帮助. 本研究的第 3 个局限是没有探讨选取不同的图像底层特征对图像分割结果的影响. 目前算法选择的图像灰度值、一阶和二阶梯度、LBP 和 Gabor 算子并不能保证对所有图像的分割任务都适用或者最优. 针对不同的图像形态或者不同的图像分割任务, 如何选取适合的图像底层特征是我们未来的另一个研究方向. 除此之外, 我们在实验中发现, 利用李群的同态性质将高维李群流形上的数据点映射到一个低维李群流形上, 在某些情况下可以提高图像分割的效

果, 这也将成为我们未来的一个研究方向.

References:

- [1] Bezdek JC, Ehrlich R, Full W. FCM: The fuzzy C-means clustering algorithm. *Computers & Geosciences*, 1984, 10(2-3): 191-203. [doi: [10.1016/0098-3004\(84\)90020-7](https://doi.org/10.1016/0098-3004(84)90020-7)]
- [2] Lan BS, Han HW. The algorithm of the segmentation of MRI image based on dictionary noise reduction to improve fuzzy clustering. *China Digital Medicine*, 2018, 13(10): 49-51 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.3969/j.issn.1673-7571.2018.10.017](https://doi.org/10.3969/j.issn.1673-7571.2018.10.017)]
- [3] Xiao J, Tong YF. Research of brain MRI image segmentation algorithm based on FCM and SVM. In: *Proc. of the 26th Chinese Control and Decision Conf.* Changsha: IEEE, 2014. 1712-1716. [doi: [10.1109/ccdc.2014.6852445](https://doi.org/10.1109/ccdc.2014.6852445)]
- [4] Chuang KS, Tzeng HL, Chen S, Wu J, Chen TJ. Fuzzy C-means clustering with spatial information for image segmentation. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 2006, 30(1): 9-15. [doi: [10.1016/j.compmedimag.2005.10.001](https://doi.org/10.1016/j.compmedimag.2005.10.001)]
- [5] Ahmed MN, Yamany SM, Mohamed N, Farag AA, Moriarty T. A modified fuzzy C-means algorithm for bias field estimation and segmentation of MRI data. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 2002, 21(3): 193-199. [doi: [10.1109/42.996338](https://doi.org/10.1109/42.996338)]
- [6] Chen S, Zhang D. Robust image segmentation using FCM with spatial constraints based on new kernel-induced distance measure. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2004, 34(4): 1907-1916. [doi: [10.1109/tsmcb.2004.831165](https://doi.org/10.1109/tsmcb.2004.831165)]
- [7] Zhang DQ, Chen SC. Fuzzy clustering using kernel method. In: *Proc. of the 2002 Int'l Conf. on Control and Automation*. Xiamen: IEEE, 2002. 162-163. [doi: [10.1109/icca.2002.1229535](https://doi.org/10.1109/icca.2002.1229535)]
- [8] Yan C, Li FZ, Zou P. Multiply connected Lie group covering learning algorithm for image classification. *Journal of Frontiers of Computer Science and Technology*, 2014, 8(9): 1101-1112 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.3778/j.issn.1673-9418.1403055](https://doi.org/10.3778/j.issn.1673-9418.1403055)]
- [9] Li YY, Lu RQ. Locality preserving projection on SPD matrix Lie group: Algorithm and analysis. *Science China Information Sciences*, 2018, 61(9): 092104. [doi: [10.1007/s11432-017-9233-4](https://doi.org/10.1007/s11432-017-9233-4)]
- [10] Dubbelman G, Browning B. COP-SLAM: Closed-form online pose-chain optimization for visual SLAM. *IEEE Trans. on Robotics*, 2015, 31(5): 1194-1213. [doi: [10.1109/tro.2015.2473455](https://doi.org/10.1109/tro.2015.2473455)]
- [11] Wang HW, Liang YY, Wang ZH. Otsu image threshold segmentation method based on new genetic algorithm. *Laser Technology*, 2014, 38(3): 364-367 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2014.03.017](https://doi.org/10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2014.03.017)]
- [12] Sa J, Sun XS, Zhang TT, Li H, Zeng HL. Improved Otsu segmentation based on Sobel operator. In: *Proc. of the 3rd Int'l Conf. on Systems and Informatics (ICSAI)*. Shanghai: IEEE, 2016. 886-890. [doi: [10.1109/icsai.2016.7811076](https://doi.org/10.1109/icsai.2016.7811076)]
- [13] Zhang Y, Han XY, Zhang H, Zhao LM. Edge detection algorithm of image fusion based on improved Sobel operator. In: *Proc. of the 3rd IEEE Information Technology and Mechatronics Engineering Conf. (ITOEC)*. Chongqing: IEEE, 2017. 457-461. [doi: [10.1109/ITOEC.2017.8122336](https://doi.org/10.1109/ITOEC.2017.8122336)]
- [14] Shi W, Zhang SQ. Application of edge-based image segmentation in cow body measurement. *Digital Technology and Application*, 2020, 38(2): 48-51 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.19695/j.cnki.cn12-1369.2020.02.28](https://doi.org/10.19695/j.cnki.cn12-1369.2020.02.28)]
- [15] Zhang XD, Jia FC, Luo SH, Liu GY, Hu QM. A marker-based watershed method for X-ray image segmentation. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 2014, 113(3): 894-903. [doi: [10.1016/j.cmpb.2013.12.025](https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2013.12.025)]
- [16] Cong L, Ding SF, Wang LJ, Zhang AJ, Jia WK. Image segmentation algorithm based on superpixel clustering. *IET Image Processing*, 2018, 12(11): 2030-2035. [doi: [10.1049/iet-ipr.2018.5439](https://doi.org/10.1049/iet-ipr.2018.5439)]
- [17] Ma GR, Ma YL, Jiang MZ. Combinational color histogram and LBP textural features for remote sensing image segmentation. *Remote Sensing for Natural Resources*, 2017, 29(3): 32-40 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.6046/gtzyyg.2017.03.05](https://doi.org/10.6046/gtzyyg.2017.03.05)]
- [18] Dhanachandra N, Manglem K, Chanu YJ. Image segmentation using K-means clustering algorithm and subtractive clustering algorithm. *Procedia Computer Science*, 2015, 54: 764-771. [doi: [10.1016/j.procs.2015.06.090](https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.06.090)]
- [19] Zhang X, Xu HM, Mo H, Tan JC, Yang C, Wang L, Ren WQ. DCNAS: Densely connected neural architecture search for semantic image segmentation. In: *Proc. of the 2021 IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*. Nashville: IEEE, 2021. 13951-13962. [doi: [10.1109/CVPR46437.2021.01374](https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.01374)]
- [20] Huang ZL, Wang XG, Huang LC, Huang C, Wei YC, Liu WY. CCNet: Criss-cross attention for semantic segmentation. In: *Proc. of the 2019 IEEE/CVF Int'l Conf. on Computer Vision*. Seoul: IEEE, 2019. 603-612. [doi: [10.1109/iccv.2019.00069](https://doi.org/10.1109/iccv.2019.00069)]
- [21] Xie EZ, Sun PZ, Song XG, Wang WH, Liu XB, Liang D, Shen CH, Luo P. PolarMask: Single shot instance segmentation with polar representation. In: *Proc. of the 2020 IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*. Seattle: IEEE, 2020. 12190-12199. [doi: [10.1109/cvpr42600.2020.01221](https://doi.org/10.1109/cvpr42600.2020.01221)]
- [22] Lee Y, Park J. CenterMask: Real-time anchor-free instance segmentation. In: *Proc. of the 2020 IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and*

- Pattern Recognition. Seattle: IEEE, 2020. 13903–13912. [doi: [10.1109/cvpr42600.2020.01392](https://doi.org/10.1109/cvpr42600.2020.01392)]
- [23] Cheng BW, Collins MD, Zhu YK, Liu T, Huang TS, Adam H, Chen LC. Panoptic-DeepLab: A simple, strong, and fast baseline for bottom-up panoptic segmentation. In: Proc. of the 2020 IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Seattle: IEEE, 2020. 12472–12482. [doi: [10.1109/cvpr42600.2020.01249](https://doi.org/10.1109/cvpr42600.2020.01249)]
- [24] Xiong YW, Liao RJ, Zhao HS, Hu R, Bai M, Yumer E, Urtasun R. UPSNet: A unified panoptic segmentation network. In: Proc. of the 2019 IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Long Beach: IEEE, 2019. 8810–8818. [doi: [10.1109/cvpr.2019.00902](https://doi.org/10.1109/cvpr.2019.00902)]
- [25] Khan AR, Khan S, Harouni M, Abbasi R, Iqbal S, Mehmood Z. Brain tumor segmentation using K-means clustering and deep learning with synthetic data augmentation for classification. *Microscopy Research and Technique*, 2021, 84(7): 1389–1399. [doi: [10.1002/jemt.23694](https://doi.org/10.1002/jemt.23694)]
- [26] Gong RK, Liu J. Maize leaf disease image segmentation based on improved K-means algorithm. *Modern Electronics Technique*, 2021, 44(22): 131–134 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.16652/j.issn.1004-373x.2021.22.027](https://doi.org/10.16652/j.issn.1004-373x.2021.22.027)]
- [27] Zhao QY, Pang B, Xu X, Wei B. SAR image segmentation method combining non-local information and fuzzy clustering. *Software Guide*, 2022, 21(3): 181–187 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.11907/rjdk.211486](https://doi.org/10.11907/rjdk.211486)]
- [28] Heil J, Häring V, Marschner B, Stumpe B. Advantages of fuzzy K-means over K-means clustering in the classification of diffuse reflectance soil spectra: A case study with West African soils. *Geoderma*, 2019, 337: 11–21. [doi: [10.1016/j.geoderma.2018.09.004](https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2018.09.004)]
- [29] Szilágyi L, Benyo Z, Szilágyi SM, Adam HS. MR brain image segmentation using an enhanced fuzzy C-means algorithm. In: Proc. of the 25th Annual Int'l Conf. of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. Cancun: IEEE, 2003. 724–726. [doi: [10.1109/iembs.2003.1279866](https://doi.org/10.1109/iembs.2003.1279866)]
- [30] Abu A, Diamant R. Enhanced fuzzy-based local information algorithm for sonar image segmentation. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2020, 29: 445–460. [doi: [10.1109/tip.2019.2930148](https://doi.org/10.1109/tip.2019.2930148)]
- [31] Kishorjit SN, Johny SN, Kanan KW. Image classification using SLIC superpixel and FAAGKFCM image segmentation. *IET Image Processing*, 2020, 14(3): 487–494. [doi: [10.1049/iet-ipr.2019.0255](https://doi.org/10.1049/iet-ipr.2019.0255)]
- [32] Zhang DQ, Chen SC. A novel kernelized fuzzy C-means algorithm with application in medical image segmentation. *Artificial Intelligence in Medicine*, 2004, 32(1): 37–50. [doi: [10.1016/j.artmed.2004.01.012](https://doi.org/10.1016/j.artmed.2004.01.012)]
- [33] Yang MS, Tsai HS. A Gaussian kernel-based fuzzy C-means algorithm with a spatial bias correction. *Pattern Recognition Letters*, 2008, 29(12): 1713–1725. [doi: [10.1016/j.patrec.2008.04.016](https://doi.org/10.1016/j.patrec.2008.04.016)]
- [34] Gong MG, Liang Y, Shi J, Ma WP, Ma JJ. Fuzzy C-means clustering with local information and kernel metric for image segmentation. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2013, 22(2): 573–584. [doi: [10.1109/tip.2012.2219547](https://doi.org/10.1109/tip.2012.2219547)]
- [35] Elazab A, Wang CM, Jia FC, Wu JH, Li GL, Hu QM. Segmentation of brain tissues from magnetic resonance images using adaptively regularized kernel-based fuzzy C-means clustering. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2015: 485495. [doi: [10.1155/2015/485495](https://doi.org/10.1155/2015/485495)]
- [36] Song JH, Zhang Z. A modified robust FCM model with spatial constraints for brain MR image segmentation. *Information*, 2019, 10(2): 74. [doi: [10.3390/info10020074](https://doi.org/10.3390/info10020074)]
- [37] Tuzel O, Porikli F, Meer P. Region covariance: A fast descriptor for detection and classification. In: Proc. of the 9th European Conf. on Computer Vision. Graz: Springer, 2006. 589–600. [doi: [10.1007/11744047_45](https://doi.org/10.1007/11744047_45)]
- [38] Chen YM, Lin P, He Y, Xu ZH. Classification of broadleaf weed images using Gabor wavelets and Lie group structure of region covariance on Riemannian manifolds. *Biosystems Engineering*, 2011, 109(3): 220–227. [doi: [10.1016/j.biosystemseng.2011.04.003](https://doi.org/10.1016/j.biosystemseng.2011.04.003)]
- [39] Xu CY, Lu CY, Gao JB, Wang TJ, Yan SC. Facial analysis with a Lie group kernel. *IEEE Trans. on Circuits & Systems for Video Technology*, 2015, 25(7): 1140–1150. [doi: [10.1109/tcsvt.2014.2365655](https://doi.org/10.1109/tcsvt.2014.2365655)]
- [40] Xu CY, Lu CY, Gao JB, Zheng W, Wang TJ, Yan SC. Discriminative analysis for symmetric positive definite matrices on Lie groups. *IEEE Trans. on Circuits & Systems for Video Technology*, 2015, 25(10): 1576–1585. [doi: [10.1109/tcsvt.2015.2392472](https://doi.org/10.1109/tcsvt.2015.2392472)]
- [41] Xu CJ, Zhu GB. Semi-supervised learning algorithm based on linear Lie group for imbalanced multi-class classification. *Neural Processing Letters*, 2020, 52(1): 869–889. [doi: [10.1007/s11063-020-10287-8](https://doi.org/10.1007/s11063-020-10287-8)]
- [42] Cai LQ, Liu CP, Yuan RD, Ding HE. Human action recognition using Lie group features and convolutional neural networks. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 99(4): 3253–3263. [doi: [10.1007/s11071-020-05468-y](https://doi.org/10.1007/s11071-020-05468-y)]
- [43] Yue HW, Wang HT, Chen HZ, Cai K, Jin YY. Automatic detection of feather defects using Lie group and fuzzy Fisher criterion for shuttlecock production. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 141: 106690. [doi: [10.1016/j.ymsp.2020.106690](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2020.106690)]
- [44] Xu CJ, Zhu GB, Shu JQ. A lightweight and robust Lie group-convolutional neural networks joint representation for remote sensing scene classification. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, 2022, 60: 5501415. [doi: [10.1109/tgrs.2020.3048024](https://doi.org/10.1109/tgrs.2020.3048024)]

- [45] Cheng G, Yang CY, Yao XW, Guo L, Han JW. When deep learning meets metric learning: Remote sensing image scene classification via learning discriminative CNNs. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, 2018, 56(5): 2811–2821. [doi: [10.1109/tgrs.2017.2783902](https://doi.org/10.1109/tgrs.2017.2783902)]
- [46] Yang NS, Tang H, Sun HQ, Yang X. DropBand: A simple and effective method for promoting the scene classification accuracy of convolutional neural networks for VHR remote sensing imagery. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2018, 15(2): 257–261. [doi: [10.1109/lgrs.2017.2785261](https://doi.org/10.1109/lgrs.2017.2785261)]
- [47] Niwattanakul S, Singthongchai J, Naenudorn E, Wanapu S. Using of Jaccard coefficient for keywords similarity. In: *Proc. of the 2013 Int'l Multiconference of Engineers and Computer Scientists*. Hong Kong: IMECS, 2013. 380–384.
- [48] Liu XL, Deng ZD, Yang YH. Recent progress in semantic image segmentation. *Artificial Intelligence Review*, 2019, 52(2): 1089–1106. [doi: [10.1007/s10462-018-9641-3](https://doi.org/10.1007/s10462-018-9641-3)]
- [49] Aubert-Broche B, Evans AC, Collins L. A new improved version of the realistic digital brain phantom. *NeuroImage*, 2006, 32(1): 138–145. [doi: [10.1016/j.neuroimage.2006.03.052](https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2006.03.052)]
- [50] Rim B, Lee S, Lee A, Gil HW, Hong M. Semantic cardiac segmentation in chest CT images using K-means clustering and the mathematical morphology method. *Sensors*, 2021, 21(8): 2675. [doi: [10.3390/s21082675](https://doi.org/10.3390/s21082675)]
- [51] Niemeijer M, Staal J, van Ginneken B, Loog M, Abramoff MD. Comparative study of retinal vessel segmentation methods on a new publicly available database. In: *Proc. of the 2004 Medical Imaging Conf. on Image Processing*. San Diego: SPIE, 2004. 648–656. [doi: [10.1117/12.535349](https://doi.org/10.1117/12.535349)]
- [52] Mehidhi I, Belkhiat DEC, Jabri D. Comparative analysis of improved FCM algorithms for the segmentation of retinal blood vessels. *Soft Computing*, 2023, 27(4): 2109–2123. [doi: [10.1007/s00500-022-07531-9](https://doi.org/10.1007/s00500-022-07531-9)]

附中文参考文献:

- [2] 兰丙申, 韩红伟. 基于字典降噪改进模糊聚类MRI图像分割算法. *中国数字医学*, 2018, 13(10): 49–51. [doi: [10.3969/j.issn.1673-7571.2018.10.017](https://doi.org/10.3969/j.issn.1673-7571.2018.10.017)]
- [8] 严晨, 李凡长, 邹鹏. 多连通李群覆盖学习算法在图像分类上的应用. *计算机科学与探索*, 2014, 8(9): 1101–1112. [doi: [10.3778/j.issn.1673-9418.1403055](https://doi.org/10.3778/j.issn.1673-9418.1403055)]
- [11] 王宏文, 梁彦彦, 王志华. 基于新遗传算法的 Otsu图像阈值分割方法. *激光技术*, 2014, 38(3): 364–367. [doi: [10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2014.03.017](https://doi.org/10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2014.03.017)]
- [14] 石炜, 张帅奇. 基于边缘的图像分割在牛体尺测量中的应用. *数字技术与应用*, 2020, 38(2): 48–51. [doi: [10.19695/j.cnki.cn12-1369.2020.02.28](https://doi.org/10.19695/j.cnki.cn12-1369.2020.02.28)]
- [17] 马国锐, 马艳丽, 江满珍. 结合颜色直方图和LBP纹理的遥感影像分割. *国土资源遥感*, 2017, 29(3): 32–40. [doi: [10.6046/gtzyyg.2017.03.05](https://doi.org/10.6046/gtzyyg.2017.03.05)]
- [26] 龚瑞昆, 刘佳. 改进K-means算法的玉米叶部病害图像分割研究. *现代电子技术*, 2021, 44(22): 131–134. [doi: [10.16652/j.issn.1004-373x.2021.22.027](https://doi.org/10.16652/j.issn.1004-373x.2021.22.027)]
- [27] 招启羽, 逢博, 徐欣, 韦博. 结合非局部信息与模糊聚类的SAR图像分割方法. *软件导刊*, 2022, 21(3): 181–187. [doi: [10.11907/rjdk.211486](https://doi.org/10.11907/rjdk.211486)]



孙灏铖(1999—), 男, 硕士, CCF 学生会员, 主要研究领域为李群机器学习, 模糊机器学习.



李凡长(1964—), 男, 博士, 博士生导师, CCF 高级会员, 主要研究领域为李群机器学习, 动态模糊逻辑, 动态模糊机器学习.



刘力(1986—), 男, 博士, CCF 专业会员, 主要研究领域为李群机器学习, 模糊机器学习和数据可视化.