

概率分布双向稀疏化下单一 Tsallis 熵阈值选取方法^{*}

邹耀斌^{1,2}, 张进玉¹, 臧兆祥^{1,2}, 夏平^{1,2}, 王俊英¹, 龚国强¹, 孙水发^{1,2}

¹(三峡大学 计算机与信息学院, 湖北 宜昌 443002)

²(水电工程智能视觉监测湖北省重点实验室 (三峡大学), 湖北 宜昌 443002)

通信作者: 孙水发, E-mail: watersun@ctgu.edu.cn



摘 要: 现有基于熵最大准则选取阈值的方法涉及两个或两个以上的随机变量, 都忽视了一个约束条件而影响到它们的分割精度和适用范围: 参与随机系统整体熵计算的各随机变量应当相互独立. 提出了一种概率分布双向稀疏化下的单一 Tsallis 熵最大化导向的自动阈值选取方法, 可以自然规避多个随机变量需要相互独立的约束条件. 在多尺度卷积乘变换所得两幅图像上, 该方法先构建了一个具有双向稀疏概率分布特征的二维随机变量, 然后在该二维随机变量基础上定义了一个二维 Tsallis 熵. 在将二维 Tsallis 熵的计算简化到只涉及二维随机变量的边缘概率分布后, 选取单一 Tsallis 熵取最大值时对应的阈值作为最终分割阈值. 提出的方法和 1 个交互式阈值方法、4 个自动阈值方法以及 1 个自动聚类分割方法进行了比较. 所用测试图像集由 44 幅合成图像和 44 幅真实世界图像组成, 这些测试图像具有单峰、双峰、多峰或无峰灰度直方图模式. 结果表明: 提出方法的计算效率虽然不优于 5 个自动分割方法, 但是它的分割适应性和分割精度有显著提高.

关键词: 阈值分割; 熵最大准则; 单一 Tsallis 熵; 概率分布双向稀疏化; 多尺度卷积乘变换

中图法分类号: TP391

中文引用格式: 邹耀斌, 张进玉, 臧兆祥, 夏平, 王俊英, 龚国强, 孙水发. 概率分布双向稀疏化下单一 Tsallis 熵阈值选取方法. 软件学报, 2022, 33(5): 1922–1946. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/6196.htm>

英文引用格式: Zou YB, Zhang JY, Zang ZX, Xia P, Wang JY, Gong GQ, Sun SF. Automatic Threshold Selection Method using Single Tsallis Entropy under Bidirectional Sparse Probability Distribution. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2022, 33(5): 1922–1946 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/6196.htm>

Automatic Threshold Selection Method using Single Tsallis Entropy under Bidirectional Sparse Probability Distribution

ZOU Yao-Bin^{1,2}, ZHANG Jin-Yu¹, ZANG Zhao-Xiang^{1,2}, XIA Ping^{1,2}, WANG Jun-Ying¹, GONG Guo-Qiang¹, SUN Shui-Fa^{1,2}

¹(College of Computer and Information Technology, China Three Gorges University, Yichang 443002, China)

²(Hubei Key Laboratory of Intelligent Vision Based Monitoring for Hydroelectric Engineering (China Three Gorges University), Yichang 443002, China)

Abstract: The existing methods of selecting threshold based on the maximum entropy criterion involve two or more random variables. They all ignore a constraint that the random variables involved in the overall entropy calculation of a random system should be independent of each other, which directly affects their segmentation accuracy and application scope. In this study, an automatic threshold selection method guided by maximizing single Tsallis entropy under bidirectional sparse probability distribution is proposed, which can naturally circumvent the constraint that multiple random variables should be independent of each other. On two images derived from a multi-scale convolution transformation, the proposed method first constructs a two-dimensional random variable with bidirectional sparse probability distribution, then a two-dimensional Tsallis entropy is defined on the basis of the two-dimensional random variable. After

* 基金项目: 国家自然科学基金 (61871258, 61502274); 国家重点研发计划 (2016YFB0800403)

收稿时间: 2020-02-17; 修改时间: 2020-05-18; 采用时间: 2020-10-23; jos 在线出版时间: 2021-11-24

simplifying the calculation of two-dimensional Tsallis entropy to only involve the marginal probability distribution of the two-dimensional random variables, the corresponding threshold when the single Tsallis entropy takes maximal value is selected as the final segmentation threshold. The proposed method is compared with an interactive thresholding method, 4 automatic thresholding methods, and an automatic clustering method on 44 synthetic images and 44 real-world images, and the gray level histograms of these test images are unimodal, bimodal, multimodal or peakless. The experimental results show that the proposed method is not superior to these 5 automatic methods in computational efficiency, but it has a significant enhancement in the adaptability and accuracy of segmentation.

Key words: image thresholding; maximum entropy criterion; single Tsallis entropy; bidirectional sparse probability distribution; multi-scale convolution transformation

图像阈值分割是最早被研究和使用的图像分割方法, 是图像处理与分析系统中广为应用的低层处理方法^[1-10]. 阈值分割将图像中的每个像素划分为目标或者背景, 其划分的基本原则是像素灰度值与分割阈值间的大小关系^[5]. 因此, 阈值分割的关键步骤是分割阈值的选取, 其核心目标则是让所选阈值尽量逼近最优阈值^[11].

一种主流的阈值选取思想是, 基于信息论中的熵最大准则去计算分割阈值^[4,5,8]. 按该思想建立的阈值分割方法通常被称为最大熵阈值分割方法, 其涉及到的熵类型主要包括 Shannon 熵^[4,5,12]、Rényi 熵^[13-16]、Tsallis 熵^[3,17-19]、Arimoto 熵^[20-22]、Kaniadakis 熵^[1,23,24]和 Masi 熵^[2]. 计算上述熵的基础是先获得图像灰度分布的统计信息, 其直观体现就是灰度直方图, 目前主要涉及一维直方图和二维直方图两大类. 根据熵计算所使用的直方图类型, 可以将最大熵阈值分割方法主要分为一维熵方法和二维熵方法两大类.

对单幅图像中各灰度值的出现频率进行统计, 可以构建一维灰度直方图. 以一维灰度直方图为基础的最大熵阈值分割方法可以被归类为一维熵方法^[1-3,12,13,15,17,19,21]. 一维熵方法最早可以追溯到由 Kapur 等人提出的最大化 Shannon 熵方法^[12], 其核心思想是最大化两熵之和, 即: 对给定的一个候选分割阈值 t , 将小于 t 的像素归为背景类, 将大于等于 t 的像素归为目标类, 并计算背景类 Shannon 熵和目标类 Shannon 熵之和; 在 t 从最小灰度值到最大灰度值的变化过程中, 寻找使背景类 Shannon 熵和目标类 Shannon 熵之和最大的灰度值作为最终分割阈值. 最大化 Shannon 熵方法适用的理论前提是, Shannon 熵对统计独立子系统满足可扩展性. 当背景和目标的灰度分布相互独立, 比如说背景和目标的灰度分布都是均匀分布且分布不重叠, 最大化 Shannon 熵方法可以获得理论上的最优分割阈值^[25]. 受噪声或模糊等因素的影响, 真实世界图像通常蕴含的是诸如长程相关或长时记忆的非扩展性信息^[2]. 对此类图像, 在候选分割阈值 t 从小到大的变化过程中, 因为所划分的背景类和目标类构建出的随机子系统通常不能满足统计独立性的先决条件, 结果在这类图像上最大化 Shannon 熵方法获得的分割阈值和最优分割阈值一般相差较远.

后续研究尝试将诸如 Rényi 熵^[13,15]、Tsallis 熵^[3,17,19]、Arimoto 熵^[21]、Kaniadakis 熵^[1,24]和 Masi 熵^[2]等熵模型引入到最大化 Shannon 熵方法所建立的框架中. 对于统计独立子系统而言, Rényi 熵、Tsallis 熵、Arimoto 熵和 Kaniadakis 熵具有描述图像中非扩展性信息的能力, 而 Masi 熵能够同时描述图像中的可扩展性信息和非扩展性信息^[2]. 因此在理论上, 最大化 Rényi 熵、Tsallis 熵、Arimoto 熵、Kaniadakis 熵或 Masi 熵方法具有提升最大化 Shannon 熵方法的潜力. 然而这些方法并未跳出最大化 Shannon 熵方法的既定框架, 从而也无法摆脱合理应用最大化 Rényi 熵、Tsallis 熵、Arimoto 熵、Kaniadakis 熵或 Masi 熵的先决理论约束, 即: 参与整体熵计算的两个随机子系统应该相互独立. 引入新的熵模型来代替 Shannon 熵, 这种思路主要从修补熵模型内部缺陷出发, 不能从本质上克服原有 Shannon 熵方法的不足. 此外, Rényi 熵、Tsallis 熵、Arimoto 熵、Kaniadakis 熵以及 Masi 熵都属于参数熵, 它们借助于额外的熵参数来刻画系统的可扩展性和/或非扩展性. 在实践中, 应用这些参数熵模型所得分割结果对所使用的熵参数较敏感^[2,15,24,26]. 这意味着在自动评估出合理的分割阈值前, 首先需要自动评估出合理的熵参数. 然而, 自动评估合理熵参数目前仍是一个悬而未决的难题.

二维熵方法利用二维灰度直方图提供的信息选择分割阈值^[14,16,18,20,22]. 二维熵方法主要采用 3 种方式构建二维灰度直方图: 方式一是利用原始灰度图像和其局部均值化图像构建二维直方图; 方式二是利用原始灰度图像和其梯度幅值图像构建二维直方图; 方式三是利用原始灰度图像构建灰度共生矩阵. 二维熵方法认识到一维熵方法所存在的共性问题, 即: 一维灰度直方图不能反映像素间的空间位置关系. 这个共性问题使得只要原始灰度图像的

一维灰度直方图相同,即使图像的内容不同,给定的一维熵方法也将产生相同的分割阈值^[8].二维熵方法通过构建二维灰度直方图以尝试缓解一维熵方法在图像内容描述上的不足.由于扩展了灰度直方图的维度,使得二维熵方法在应用熵最大准则时有了更多选择.比如,可将二维灰度直方图划分为4个子概率空间,在每个子概率空间上分别计算熵值,而熵模型可以是 Shannon 熵、Rényi 熵、Tsallis 熵、Arimoto 熵、Kaniadakis 熵或 Masi 熵.然而,这些二维熵方法并未完全跳出对应的一维熵方法的既定思路,从而和一维熵方法一样需要面临相同的理论约束,即:参与整体熵计算的随机子系统应该相互独立.二维熵方法引入二维统计信息来代替一维统计信息,这主要是从优化图像内容描述的角度出发,不能从本质上克服原有一维熵方法的不足.

总体而言,现有的一维熵方法和二维熵方法涉及两个或两个以上的随机子系统,或者说涉及两个或两个以上的随机变量.它们对每个随机变量分别定义一个一维或二维熵,这使得随机系统整体熵的计算会涉及两个或两个以上的一维或二维熵.它们均忽视了涉及多个随机变量的随机系统整体熵的计算所应遵守的理论约束,即:参与整体熵计算的各随机变量应当是统计独立的.这种忽视直接影响到这些方法的分割精度和分割适用范围.本文提出了一种概率分布双向稀疏化下的单一 Tsallis 熵最大化 (single Tsallis entropy maximization, STEM) 导向的自动阈值选取方法.与现有一维熵方法和二维熵方法不同的是,STEM 方法用一个二维随机变量统一表示两个随机子系统,这使得它可以只用一个二维 Tsallis 熵去刻画二维随机变量的多样性及其概率分布特征,从而规避了多随机变量需要相互独立的约束条件.在 STEM 方法中,双向稀疏化后的二维随机变量的概率分布不但是稀疏的,且概率分布中只有第一行和第一列的元素具有非 0 概率.这又使得 STEM 方法在计算二维 Tsallis 熵时只涉及到二维随机变量的边缘概率分布,可以有效地降低二维 Tsallis 熵的计算代价.

本文第 1 节重点阐述概率分布双向稀疏化的理论和相关实现技术.第 2 节先推导双向稀疏概率分布下的二维 Tsallis 熵简化计算公式,然后分析提出的 STEM 方法在选取分割阈值时所遵循的原则以及所构建的目标函数,并描述相应的算法步骤.第 3 节分析和讨论 STEM 方法和 6 个被比较方法在 44 幅合成图像和 44 幅真实世界图像上的实验结果.第 4 节给出结论.

1 概率分布双向稀疏化

将用 5 个小节分步骤阐述概率分布双向稀疏化的理论和相关实现技术.其中,第 1.1 节先建立了待分割图像的理论模型,在此基础上,再定义了 3 对紧密相关的图像变换:卷积变换、多尺度卷积乘变换、加减组合变换.每对变换都可产生两幅变换结果图像,前一对变换的输出图像是后一对变换的输入图像.第 1.2 节就卷积变换所得两幅图像的构成特点与统计特征进行了详细分析.在第 1.3 节中,多尺度卷积乘变换所得两幅图像的每一对像素点,必定有一个像素点的灰度值较小.第 1.3 节分析了该较小灰度值和两幅图像的全局最大灰度值的比值关系.第 1.4 节分析了在加减组合变换所得两幅图像上构建出两个相同离散概率分布的理论,并应用该理论来确定多尺度卷积乘变换的停止条件.最后,第 1.5 节先在多尺度卷积乘变换所得两幅图像上构建了一个二维随机变量,然后分析了该随机变量的概率分布在多尺度卷积乘变换停止时所具有的双向稀疏分布特征.

1.1 图像建模及图像变换

(1) 图像建模

用符号 h 表示一幅包含目标和背景两类对象的灰度图像,其中,目标的灰度值为 h_o ,背景的灰度值为 h_b .用符号 n 表示一幅带有随机细节的灰度图像,它的灰度值为服从一定概率分布的随机变量 γ ,且 γ 的数学期望为 μ_γ ,标准方差为 σ_γ .待分割图像 f 由 h 受 n 的加性干扰而形成,即:

$$f = h + n \quad (1)$$

(2) 卷积变换

用符号 ∇_{g_x} 和 ∇_{g_y} 分别表示二维高斯函数 $g(x, y; \sigma_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_i^2}}$ 对 x 和 y 的偏导,而用符号 $f'_x(\sigma_i)$ 和 $f'_y(\sigma_i)$ 分别表示 ∇_{g_x} 和 ∇_{g_y} 与图像 f 的卷积变换结果,即:

$$f'_x(\sigma_i) = \nabla_{g_x} * f \quad (2)$$

$$f'_y(\sigma_i) = \nabla g_y * f \quad (3)$$

根据高斯核函数的采样理论, 只需将图像与一个大小为 $(8\sigma_i+1) \times (8\sigma_i+1)$ 的高斯核进行卷积, 就可以让卷积结果充分逼近图像与完整高斯分布卷积所产生的结果^[27]. 另外, 对于数字图像的卷积运算, 由卷积核界定的邻域往往以某个像素为中心且邻域大小通常为奇数, 比如 3×3 , 5×5 , 7×7 等^[28]. 据此两点, 可以计算出各个卷积尺度为 $\sigma_i = 0.25i (i \geq 1)$.

(3) 多尺度卷积乘变换

用符号 k_x 表示 m 个不同尺度 σ_i 所对应的 $f'_x(\sigma_i)$ 乘积运算的绝对值, 而用符号 k_y 表示 m 个不同尺度 σ_i 所对应的 $f'_y(\sigma_i)$ 乘积运算的绝对值, 即:

$$k_x = \left| \prod_{i=1}^m f'_x(\sigma_i) \right| \quad (4)$$

$$k_y = \left| \prod_{i=1}^m f'_y(\sigma_i) \right| \quad (5)$$

对任意一个点 (x, y) 所对应的两个值 $k_x(x, y)$ 和 $k_y(x, y)$, 两者的较小值记为 $k_s(x, y)$, 较大值记为 $k_b(x, y)$. 同时, 用符号 $k(x_{+}, y_{+})$ 表示 k_x 和 k_y 的全局最大值, 即: 点 (x_{+}, y_{+}) 属于图像 f 的定义域, 且对于任意属于图像 f 定义域的点 (x, y) , 均有 $k(x_{+}, y_{+}) \geq k_b(x, y)$ 成立.

(4) 加减组合变换

定义 k_x 与 k_y 相加和相减的绝对值运算结果分别为 l_{+} 和 l_{-} , 即:

$$l_{+} = |k_x + k_y| \quad (6)$$

$$l_{-} = |k_x - k_y| \quad (7)$$

下面将首先分析图像 $f'_x(\sigma_i)$ 和 $f'_y(\sigma_i)$ 的构成特点与统计特征, 然后以此为基础, 探讨 m 充分大时 $k_s(x, y)$ 与 $k(x_{+}, y_{+})$ 的比值关系. 进一步将分析论证: 当 m 充分大时, 理论上可以在 l_{+} 和 l_{-} 上构建出两个相同的离散概率分布. 这个理论结果被用于支撑: 当 m 充分大时, 可以在 k_x 和 k_y 上定义一个二维随机变量, 并且其概率分布是双向稀疏化的.

1.2 图像 $f'_x(\sigma_i)$ 和 $f'_y(\sigma_i)$ 的构成特点与统计特征

结合公式 (1)–公式 (3) 可知:

$$f'_x(\sigma_i) = \nabla g_x * h + \nabla g_x * n \quad (8)$$

$$f'_y(\sigma_i) = \nabla g_y * h + \nabla g_y * n \quad (9)$$

命题 1 给出了公式 (8)、公式 (9) 中 $\nabla g_x * h$ 和 $\nabla g_y * h$ 的计算公式.

命题 1. 对于图像 h 中某一点 (x, y) , 其相应的 $\nabla g_x * h$ 和 $\nabla g_y * h$ 值分别是:

$$\nabla g_x * h(x, y) = (h_o - h_b) e^{-\frac{d^2}{2\sigma_i^2}} \cos \theta \quad (10)$$

$$\nabla g_y * h(x, y) = (h_o - h_b) e^{-\frac{d^2}{2\sigma_i^2}} \sin \theta \quad (11)$$

其中, d 表示点 (x, y) 到边缘的垂直距离, θ 表示 x 轴到边缘梯度方向的转角 (如图 1 所示).

证明: 在图像 h 的二维空间内重新构造一个坐标系 uov , 使得新坐标系的 u 轴穿过点 (x, y) , 而 v 轴和边缘重合 (如图 1 所示), 则:

$$\begin{aligned} \|\nabla g(x, y; \sigma_i) * h(x, y)\| &= \left| \frac{\partial g(u, v; \sigma_i)}{\partial u} * h(u, v) \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g(u, v; \sigma_i)}{\partial u} h(u - \alpha, v - \beta) d\alpha d\beta \right| \\ &= |h_o - h_b| \left(\int_{-\infty}^u \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma_i^2}} d\beta \right) e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_i^2}} \times \left(-\frac{\alpha}{\sigma_i^2} \right) d\alpha \right) = |h_o - h_b| \left(\int_{-\infty}^u e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_i^2}} \times \left(-\frac{\alpha}{\sigma_i^2} \right) d\alpha \right) \\ &= |h_o - h_b| e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_i^2}} \Big|_{-\infty}^u = |h_o - h_b| e^{-\frac{u^2}{2\sigma_i^2}}. \end{aligned}$$

因点 (x, y) 到边缘的垂直距离为 d , 则 $\|\nabla g(x, y; \sigma_i) * h(x, y)\| = |h_o - h_b| e^{-\frac{d^2}{2\sigma_i^2}}$. 又 $\nabla g_x * h(x, y)$ 和 $\nabla g_y * h(x, y)$ 分别是 $\nabla g(x, y; \sigma_i) * h(x, y)$ 在 x 轴和 y 轴的分量, 且 x 轴到边缘梯度方向的转角为 θ , 则:

$$\nabla g_x * h(x, y) = (h_o - h_b) e^{-\frac{d^2}{2\sigma_i^2}} \cos \theta,$$

$$\nabla g_y * h(x, y) = (h_o - h_b) e^{-\frac{d^2}{2\sigma_i^2}} \sin \theta.$$

证毕.

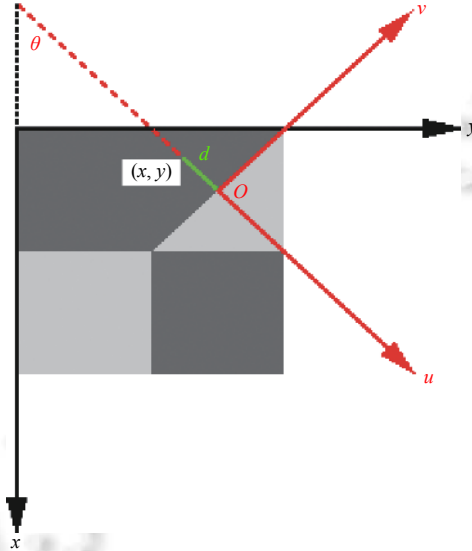


图 1 图像 h 的二维空间坐标系

命题 2 给出了公式 (8)、公式 (9) 中, $\nabla g_x * n$ 和 $\nabla g_y * n$ 所对应的随机变量所服从的分布, 及其数学期望和标准方差.

命题 2. (a) 当图像 n 的灰度值为服从正态分布的随机变量 γ , 且 γ 的数学期望为 μ_γ , 标准方差为 σ_γ 时, $\nabla g_x * n$ 和 $\nabla g_y * n$ 所对应的随机变量仍将服从正态分布, 且其数学期望为 0, 标准方差为 $\sigma_\gamma/2\sigma_i$; (b) 当图像 n 的灰度值为服从非正态分布 (比如说伽马分布、极值分布、瑞利分布、均匀分布、贝塔分布) 的随机变量 γ , 且 γ 的数学期望为 μ_γ , 标准方差为 σ_γ 时, $\nabla g_x * n$ 和 $\nabla g_y * n$ 所对应的随机变量将近似服从正态分布, 且其数学期望为 0, 标准方差为 $\sigma_\gamma/2\sigma_i$.

证明: 首先定义两个随机变量 ξ 和 ζ , 其中, $\xi = \nabla g_x * n(x, y)$, $\zeta = \nabla g_y * n(x, y)$, 然后对情形 (a) 和情形 (b) 两种情况分别予以证明.

(a) 根据正态随机变量的线性组合理论^[29], 可知随机变量 ξ 仍然服从正态分布, 并且其数学期望为:

$$\mu_\xi = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla g_x) dx dy \right) \mu_\gamma = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial g(x, y; \sigma_i)}{\partial x} \right) dx dy \right) \mu_\gamma = 0,$$

其标准方差为:

$$\sigma_\xi = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla g_x)^2 dx dy \right) \sigma_\gamma^2} = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial g(x, y; \sigma_i)}{\partial x} \right)^2 dx dy \right) \sigma_\gamma^2} = \frac{\sigma_\gamma}{2\sigma_i}.$$

类似地, ζ 也将服从正态分布, 并且其数学期望为 0, 标准方差为 $\sigma_\zeta = \sigma_\gamma/2\sigma_i$.

(b) 根据李雅普诺夫 (Liapunov) 定理^[30], 可知 ξ 将近似服从数学期望为 μ_ξ 、标准方差为 σ_ξ^2 的正态分布, 其中,

$$\mu_\xi = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla g_x) dx dy \right) \mu_\gamma = 0, \quad \sigma_\xi = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla g_x)^2 dx dy \right) \sigma_\gamma^2} = \frac{\sigma_\gamma}{2\sigma_i}.$$

类似地, ζ 也将近似服从数学期望为 0、标准方差为 $\sigma_\zeta = \sigma_\gamma/2\sigma_i$ 的正态分布. 证毕.

命题 2 指出: $\nabla g_x * n$ 和 $\nabla g_y * n$ 所对应的随机变量的数学期望等于 0, 且标准方差等于 $\sigma_\gamma/2\sigma_i$. 该结果对于随机变量 γ 所服从的分布没有特殊要求, 因而具有较高的普适性. 鉴于正态分布、伽马分布和极值分布的概率密度函数分别具有典型的左右对称性、右偏性和左偏性, 这里仅以这 3 种分布为代表, 直观展示 $\nabla g_x * n$ 对应的数学期望和标准方差的实测值和理论计算值 (如图 2 所示, 图 2(a)–图 2(c) 展示了 3 幅随机细节图像 n , 其灰度值分别为服从正态分布、伽马分布、极值分布的随机变量; 图 2(d)–图 2(f) 分别显示了图像 n 为图 2(a)–图 2(c) 情形下, $\nabla g_x * n$ 所对应的数学期望和标准方差的实测值和理论计算值). 图 2(d)–图 2(f) 中, 绿线和蓝线分别表示实测的数学期望和标准方差, 而红色虚线是根据命题 2 中的 $\sigma_\gamma/2\sigma_i$ 计算出的标准方差. 从图 2(d)–图 2(f) 中可以观察到: ① 3 种分布情况下, $\nabla g_x * n$ 对应的数学期望的实测值都近似为 0; ② 3 种分布情形下, $\nabla g_x * n$ 对应的标准方差的实测值和理论计算值均高度吻合, 并且都呈现出伴随尺度 σ_i 增大而逐渐变小并趋向于 0 的特点.

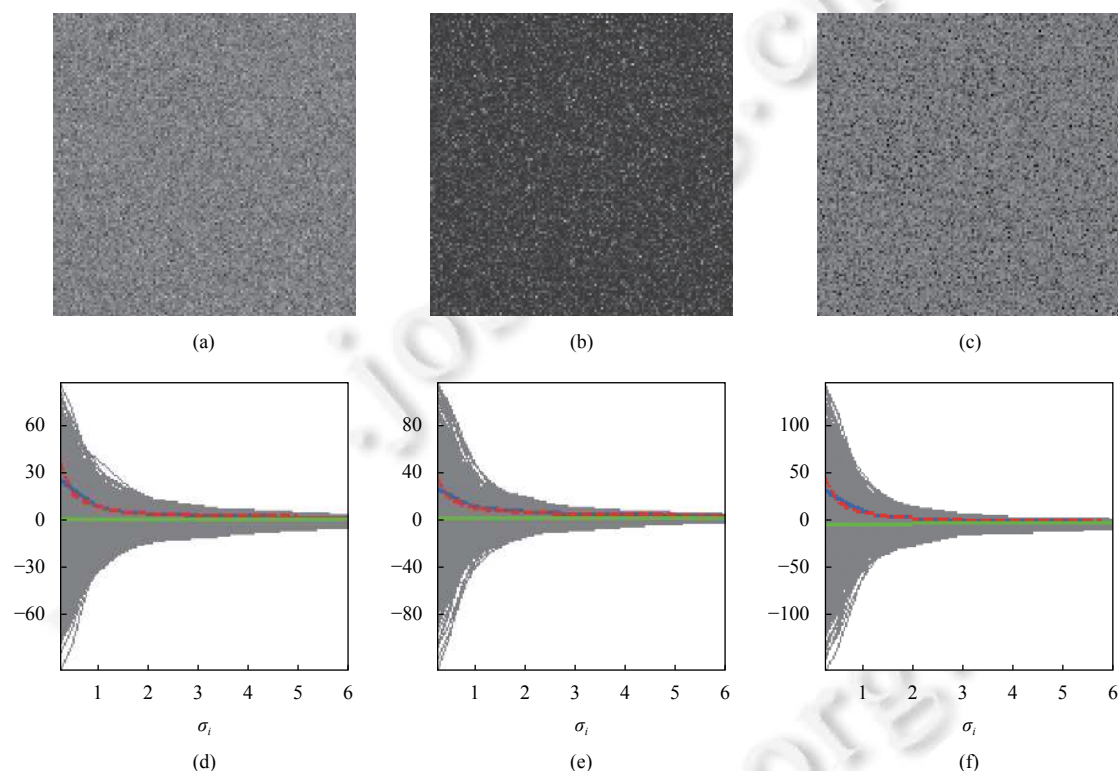


图 2 3 种代表分布展示的 $\nabla g_x * n$ 对应的数学期望和标准方差的实测值和理论计算值

命题 1 和命题 2 表明: 图像 $f'_x(\sigma_i)$ (或 $f'_y(\sigma_i)$) 可以通过在图像 $\nabla g_x * h$ (或 $\nabla g_y * h$) 上添加 (近似) 服从正态分布的随机细节而产生, 并且随机细节所对应的数学期望为 0, 标准方差为 $\sigma_\gamma/2\sigma_i$. 图 3 对图像 $f'_x(\sigma_i)$ 的这种构成特点进行了直观展示. 图 3(a) 不含随机细节的合成图像 h , 目标的灰度值为 $h_o=200$, 而背景的灰度值为 $h_b=100$; 图 3(b) 含随机细节的合成图像 f , 随机细节由服从正态分布的随机变量 γ 产生; 图 3(c) 红线、绿线和蓝线分别标识了位置和方向不同的采样区域; 图 3(d) 图像 $\nabla g_x * h$ 在 3 个采样区域内的值分布, 带圈的曲线是均值线, 该图颜色和图 3(c) 中颜色一一对应; 图 3(e) 图像 $f'_x(\sigma_i)$ 在 3 个采样区域内的值分布, 带圈的曲线是均值线, 该图颜色和图 3(c) 中颜色一一对应.

首先, 图 3(c) 中 3 个采样区域的宽度均为 2 个像素且对称分布于边缘两边, 而图 3(d) 中, $\nabla g_x * h$ 在 3 个采样区域内的灰度值分布分别聚焦于 3 条均值线上. 这验证了命题 1 中公式 (10) 关于点 (x,y) 到边缘的垂直距离 d 的对称性.

其次, 图 3(c) 中的红绿蓝 3 个采样区域位于不同方向的 3 条边缘上, x 轴到这 3 条边缘的梯度方向的转角分

别为 0 度、45 度和 90 度. 图 3(d) 中, $\nabla g_x * h$ 在红绿蓝 3 个采样区域内的灰度值分别集中于 100, 70.71 和 0 附近. 这验证了公式 (10) 中 $\nabla g_x * h$ 与转角 θ 的余弦关系 (注意: $\nabla g_x * h$ 在绿色采样区域内的灰度值, 当 $\sigma_i < 1$ 时, 因为卷积核 ∇g_x 对应的数字化核宽有限而未很好体现余弦关系).

再次, 图 3(e) 中, $f'_x(\sigma_i)$ 在 3 个采样区域内的灰度均值也集中于 100, 70.71 和 0 附近, 这表明命题 2 中, $\nabla g_x * n$ 对应的数学期望应该近似为 0.

最后, 随着尺度 σ_i 增大, 图 3(e) 中的 $f'_x(\sigma_i)$ 在 3 个采样区域内灰度值的分布越集中. 这进一步验证了命题 2 中, $\nabla g_x * n$ 所对应的标准方差和 σ_i 的反比关系.

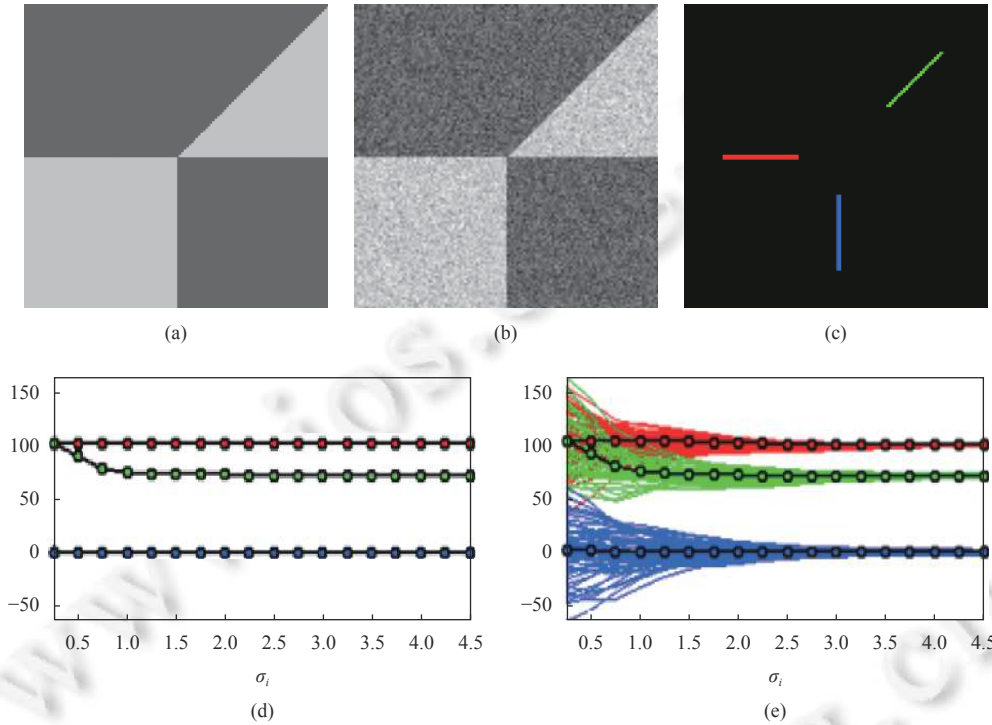


图 3 图像 $f'_x(\sigma_i)$ 构成特点的直观展示

1.3 $k_s(x, y)$ 和 $k(x_+, y_+)$ 的比值关系

以第 1.2 节为基础, 命题 3 和命题 4 揭示了当 m 趋向于无穷大时, $k_s(x, y)$ 与 $k(x_+, y_+)$ 的比值特点.

命题 3. 当公式 (1) 中随机细节图像 n 的标准方差 σ_γ 为 0 时, 若 $k_s(x, y) \neq k(x_+, y_+)$, 将有 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{k_s(x, y)}{k(x_+, y_+)} = 0$ 成立.

证明: 公式 (1) 中的随机细节图像 n 的标准方差 σ_γ 为 0, 意味着图像 $f=h$. 考虑到 $k_s(x, y)$ 可能等于 $k_x(x, y)$ 或 $k_y(x, y)$, 而 $k(x_+, y_+)$ 可能等于 $k_x(x_+, y_+)$ 或 $k_y(x_+, y_+)$, 这样, $k_s(x, y)$ 和 $k(x_+, y_+)$ 有 4 种可能的组合.

这里仅以 $k_s(x, y) = k_x(x, y)$, $k(x_+, y_+) = k_y(x_+, y_+)$ 的组合为例进行证明, 对于其他 3 种组合可以类似证明.

根据命题 1 知, $k(x_+, y_+) = k_y(x_+, y_+) = \left| \prod_{i=1}^m \left((h_o - h_b) e^{-\frac{d^2}{2\sigma_i^2}} \sin \phi \right) \right|$, 其中, ϕ 表示 x 轴到边缘梯度方向的转角. 相同 ϕ 情况下, (x_+, y_+) 离边缘垂直距离越短, 则 $k(x_+, y_+)$ 越大. 而 $k(x_+, y_+)$ 又是全局最大值, 从而 (x_+, y_+) 到边缘的距离 $d=0$, 即 $k(x_+, y_+) = \left| \prod_{i=1}^m ((h_o - h_b) \sin \phi) \right|$.

对于 $k_s(x, y) = k_x(x, y) = \left| \prod_{i=1}^m \left((h_o - h_b) e^{-\frac{d^2}{2\sigma_i^2}} \cos \theta \right) \right|$, 先分析 $d=0$ 的情况. 此时, $k_s(x, y) = \left| \prod_{i=1}^m ((h_o - h_b) \cos \theta) \right|$. 这样, $\frac{k_s(x, y)}{k(x_+, y_+)} = \left| \frac{\prod_{i=1}^m (\cos \theta)}{\prod_{i=1}^m (\sin \phi)} \right| = \left| \frac{\cos \theta}{\sin \phi} \right|^m$. 考虑限定条件 $k_s(x, y) \neq k(x_+, y_+)$, 知 $\frac{k_s(x, y)}{k(x_+, y_+)} < 1$, 从而 $\left| \frac{\cos \theta}{\sin \phi} \right| < 1$. 这样,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{k_s(x, y)}{k(x_+, y_+)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{\cos \theta}{\sin \phi} \right|^m = 0.$$

再分析 $k_s(x, y)$ 中 $d \neq 0$ 的情况. 根据前面对 $d=0$ 的情形分析, 可知此种情形下 $0 \leq \frac{k_s(x, y)}{k(x_+, y_+)} < \left| \frac{\cos \theta}{\sin \phi} \right|^m$, 从而 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{k_s(x, y)}{k(x_+, y_+)} = 0$. 证毕.

命题 4. 如果公式 (1) 中随机细节图像 n 的标准方差 σ_y 为 0 时, 满足条件 $k_s(x, y) \neq k(x_+, y_+)$, 则当公式 (1) 中随机细节图像 n 的标准方差 σ_y 不为 0 时, 仍将有 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{k_s(x, y)}{k(x_+, y_+)} = 0$ 成立.

证明: 类似于命题 3, 这里仅以 $k_s(x, y) = k_x(x, y)$, $k(x_+, y_+) = k_y(x_+, y_+)$ 的组合为例进行证明, 对于其他 3 种组合可类似证明. 对于 $k_s(x, y)$, 点 (x, y) 可能位于某条边缘上, 也可能离边缘有一定的距离. 为便于后面的论证, 用 $k_s^{d=0}(x, y)$ 和 $k_s^{d \neq 0}(x, y)$ 分别表示两种不同情况下的 $k_s(x, y)$.

先分析 $k_s^{d=0}(x, y)$ 的情形. 结合命题 1-命题 3, 有:

$$\frac{k_s^{d=0}(x, y)}{k(x_+, y_+)} = \frac{\left| \prod_{i=1}^m ((h_o - h_b) \cos \theta + \nabla g_x(x, y; \sigma_i) * n(x, y)) \right|}{\left| \prod_{i=1}^m ((h_o - h_b) \sin \phi + \nabla g_y(x_+, y_+; \sigma_i) * n(x_+, y_+)) \right|}.$$

根据命题 2 可知, $\zeta = \nabla g_x(x, y; \sigma_i) * n(x, y)$ 和 $\zeta = \nabla g_y(x_+, y_+; \sigma_i) * n(x_+, y_+)$ 的数学期望为 0, 标准方差为 $\sigma_y/2\sigma_i$.

注意到 $\sigma_i = 0.25i$, 这意味着随着 i 逐渐变大, σ_i 会逐渐变大, $\sigma_y/2\sigma_i$ 会逐渐变小. 这样, 随着 i 逐渐变大, $\frac{|(h_o - h_b) \cos \theta + \nabla g_x(x, y; \sigma_i) * n(x, y)|}{|(h_o - h_b) \sin \phi + \nabla g_y(x_+, y_+; \sigma_i) * n(x_+, y_+)|}$ 会逐渐趋向于 $\frac{|(h_o - h_b) \cos \theta|}{|(h_o - h_b) \sin \phi|} = \left| \frac{\cos \theta}{\sin \phi} \right|$.

根据命题 3 可知 $\left| \frac{\cos \theta}{\sin \phi} \right| < 1$, 这意味着应存在一个 k , 使得当 $i > k$ 时:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\left| \prod_{i=k+1}^m ((h_o - h_b) \cos \theta + \nabla g_x(x, y; \sigma_i) * n(x, y)) \right|}{\left| \prod_{i=k+1}^m ((h_o - h_b) \sin \phi + \nabla g_y(x_+, y_+; \sigma_i) * n(x_+, y_+)) \right|} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{\cos \theta}{\sin \phi} \right|^{m-k} = 0.$$

从而有:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{k_s^{d=0}(x, y)}{k(x_+, y_+)} = \frac{\left| \prod_{i=1}^k ((h_o - h_b) \cos \theta + \nabla g_x(x, y; \sigma_i) * n(x, y)) \right|}{\left| \prod_{i=1}^k ((h_o - h_b) \sin \phi + \nabla g_y(x_+, y_+; \sigma_i) * n(x_+, y_+)) \right|} \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\left| \prod_{i=k+1}^m ((h_o - h_b) \cos \theta + \nabla g_x(x, y; \sigma_i) * n(x, y)) \right|}{\left| \prod_{i=k+1}^m ((h_o - h_b) \sin \phi + \nabla g_y(x_+, y_+; \sigma_i) * n(x_+, y_+)) \right|} = 0.$$

再分析 $k_s^{d \neq 0}(x, y)$ 的情形. 注意到 $\frac{k_s^{d \neq 0}(x, y)}{k_s^{d=0}(x, y)} = \frac{\left| \prod_{i=1}^m \left((h_o - h_b) e^{-\frac{d^2}{2\sigma_i^2}} \cos \theta + \nabla g_x(x, y; \sigma_i) * n(x, y) \right) \right|}{\left| \prod_{i=1}^m ((h_o - h_b) \cos \theta + \nabla g_x(x, y; \sigma_i) * n(x, y)) \right|}$.

随着 i 逐渐变大, $\sigma_y/2\sigma_i$ 会逐渐变小. 即: 随着 i 逐渐变大, $\frac{\left| (h_o - h_b) e^{-\frac{d^2}{2\sigma_i^2}} \cos \theta + \nabla g_x(x, y; \sigma_i) * n(x, y) \right|}{|(h_o - h_b) \cos \theta + \nabla g_x(x, y; \sigma_i) * n(x, y)|}$ 会逐渐趋向于 $\frac{\left| (h_o - h_b) e^{-\frac{d^2}{2\sigma_i^2}} \cos \theta \right|}{|(h_o - h_b) \cos \theta|} = e^{-\frac{d^2}{2\sigma_i^2}} < 1$, 从而 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{k_s^{d \neq 0}(x, y)}{k_s^{d=0}(x, y)} = 0$. 这样:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{k_s^{d \neq 0}(x, y)}{k(x_+, y_+)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{k_s^{d \neq 0}(x, y)}{k_s^{d=0}(x, y)} \times \frac{k_s^{d=0}(x, y)}{k(x_+, y_+)} \right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{k_s^{d \neq 0}(x, y)}{k_s^{d=0}(x, y)} \right) \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{k_s^{d=0}(x, y)}{k(x_+, y_+)} \right) = 0.$$

证毕.

1.4 在 L_+ 和 L_- 上构建相同的离散概率分布

下面的命题 5 为 m 充分大时, 可在 L_+ 和 L_- 上构建出两个相同的离散概率分布提供理论支撑.

命题 5. 若 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{k_b(x,y)}{k(x_+,y_+)}$ 位于区间 $(\delta/256, (\delta+1)/256)$ 内 (其中, $0 \leq \delta \leq 255$), 则 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{L_+(x,y)}{k(x_+,y_+)}$ 和 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{L_-(x,y)}{k(x_+,y_+)}$ 也将位于区间 $(\delta/256, (\delta+1)/256)$ 内.

证明: 设 $k(x_+,y_+)=k_y(x_+,y_+)$, 则 $k_s(x_+,y_+)=k_x(x_+,y_+)$ (如果 $k(x_+,y_+)=k_x(x_+,y_+)$, 则 $k_s(x_+,y_+)=k_y(x_+,y_+)$, 可以仿照下述过程类似证明). 结合公式 (6) 和公式 (7), 可以将 $\frac{L_+(x,y)}{k(x_+,y_+)}$ 和 $\frac{L_-(x,y)}{k(x_+,y_+)}$ 分别转化为:

$$\begin{aligned}\frac{L_+(x,y)}{k(x_+,y_+)} &= \frac{|k_x(x,y) + k_y(x,y)|}{k(x_+,y_+)} = \frac{k_b(x,y) + k_s(x,y)}{k(x_+,y_+)} = \frac{k_b(x,y)}{k(x_+,y_+)} + \frac{k_s(x,y)}{k(x_+,y_+)}, \\ \frac{L_-(x,y)}{k(x_+,y_+)} &= \frac{|k_x(x,y) - k_y(x,y)|}{k(x_+,y_+)} = \frac{k_b(x,y) - k_s(x,y)}{k(x_+,y_+)} = \frac{k_b(x,y)}{k(x_+,y_+)} - \frac{k_s(x,y)}{k(x_+,y_+)}.\end{aligned}$$

根据命题 3 和命题 4 知 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{k_s(x,y)}{k(x_+,y_+)} = 0$, 从而:

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{L_+(x,y)}{k(x_+,y_+)} &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{k_b(x,y)}{k(x_+,y_+)} \in (\delta/256, (\delta+1)/256), \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{L_-(x,y)}{k(x_+,y_+)} &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{k_b(x,y)}{k(x_+,y_+)} \in (\delta/256, (\delta+1)/256).\end{aligned}$$

证毕.

命题 5 的作用在于: ① 只要公式 (4) 和公式 (5) 中的 m 值充分大, 即可在图像 L_+ 和 L_- 上构建出两个完全相同的离散概率分布; ② 反过来, 又可根据两个离散概率分布的等同时机来确定 m 值. 为了方便后续论述, 将这两个离散概率分布等同时的 m 特别标记为 m^* ; 相应地, 将 $m=m^*$ 时由公式 (4) 和公式 (5) 计算到的 k_x 和 k_y 分别标记为 k_x^* 和 k_y^* .

为了计算 m^* 值, 技术上可将 m 值时的图像 L_+ (或 L_-) 的像素值划分到如下 256 个区间之一:

$$[0, \lambda/256], (\lambda/256, 2\lambda/256], (2\lambda/256, 3\lambda/256], \dots, (255\lambda/256, +\infty),$$

其中, $\lambda=k(x_+,y_+)$. 如果 $L_+(x,y)$ (或 $L_-(x,y)$) 属于第 j 个区间, 则将计数器 p_j (或 q_j) 加上 1. 统计完所有像素点 (x,y) 后, 将 p_j (或 q_j) 除以图像大小以产生归一化的 p_j (或 q_j), 即可获得 m 值时关于图像 L_+ (或 L_-) 的离散概率分布. 当 m 从 1 开始持续变大时, 可寻找使 $\sum_{j=0}^{255} |p_j - q_j| = 0$ 成立的第一个 m 值作为 m^* .

图 4 展示了图 3(b) 对应于图像 L_+ 和 L_- 的离散概率分布的差异 $\sum_{j=0}^{255} |p_j - q_j|$, 其中, p_j 和 q_j 分别是图像 L_+ 和 L_- 所对应的离散概率分布. 可以观察到: 当 m 逐渐变大时, 图像 L_+ 和 L_- 的离散概率分布的差异逐渐变小; 并且从 $m=18$ 开始, 两者的差异为 0, 即两者具有相同的离散概率分布.

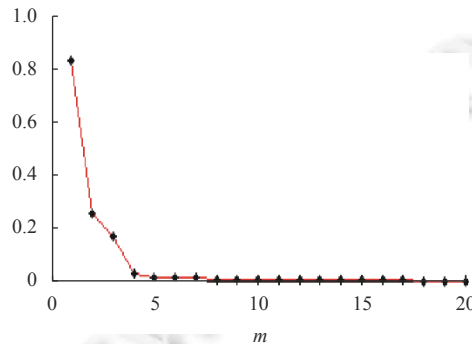


图 4 图 3(b) 对应的图像 L_+ 和 L_- 的离散概率分布差异 $\sum_{j=0}^{255} |p_j - q_j|$ 随 m 值变化的趋势图

1.5 二维随机变量概率分布的双向稀疏化

基于图像 k_x 和 k_y 构造一个二维随机变量 (φ, ϖ) , 其中, 随机变量 φ 和 ϖ 分别与图像 k_x 和 k_y 对应, 且两个随机变量的取值范围限定为 $[1, 256]$. 该取值范围描述了某个点 (x,y) 处的 $k_x(x,y)$ (或 $k_y(x,y)$) 值属于下列 256 个区间的

第 i (或第 j) 个区间: $[0, \lambda/256], (\lambda/256, 2\lambda/256], (2\lambda/256, 3\lambda/256], \dots, (255\lambda/256, +\infty)$, 其中, $\lambda = k(x_+, y_+)$. 如果 $k_x(x, y)$ 和 $k_y(x, y)$ 分别属于第 i 和第 j 个区间, 则将计数器 p_{ij} 加 1. 统计完所有点 (x, y) 后, 将 p_{ij} 除以总的点数, 可获得随机变量 φ 和 ϖ 的联合概率分布. 以联合概率分布为基础, 可以获得二维随机变量 (φ, ϖ) 关于 φ 和 ϖ 的边缘概率分布, 分别用 $p_{i\cdot}$ 和 $p_{\cdot j}$ 来表示.

根据命题 4 和命题 5 可知: 当 $m=m^*$ 时, 随机变量 φ 和 ϖ 的联合概率分布 $p_{ij}(i \geq 2, j \geq 2)$ 会等于 0, 而 $p_{1,1}$ 趋向于 1, $p_{1,j}(j \geq 2)$ 和 $p_{i,1}(i \geq 2)$ 的值可能为 0, 也可能非 0. 换言之, 当 $m=m^*$ 时, 二维随机变量 (φ, ϖ) 的概率分布不但是稀疏的, 且概率分布中只有第 1 行和第 1 列的元素具有非 0 概率. 图 5 以图 3(b) 对应的图像 k_x 和 k_y 为例, 展示二维随机变量 (φ, ϖ) 概率分布双向稀疏化过程: 按从上到下和从左到右顺序, 依次展示了 m 等于 1, 2, 4, 8, 16 和 18 时的概率分布中的 0 值和非 0 值, 其中, 黑点表示 $p_{ij}=0$, 红点表示 $p_{ij} \neq 0$. 这里, 将具有这种稀疏分布特征的二维随机变量概率分布定义为双向稀疏概率分布.

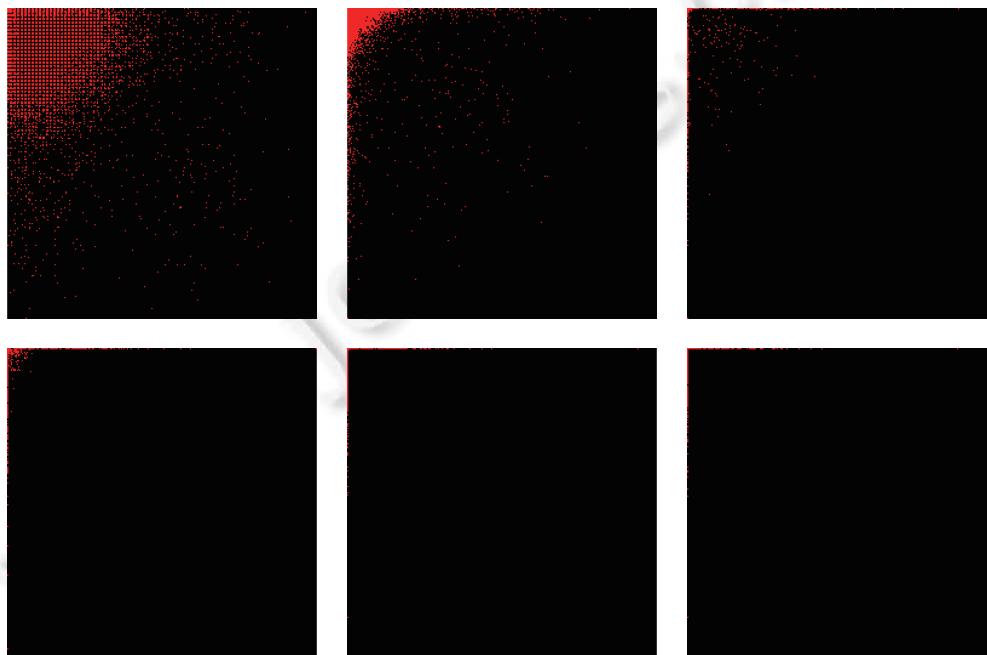


图 5 二维随机变量 (φ, ϖ) 概率分布双向稀疏化过程

2 单一 Tsallis 熵最大化导向的阈值选取

将用 4 个小节分步骤阐述单一 Tsallis 熵最大化导向的阈值选取理论和相关实现技术. 其中, 第 2.1 节推导了双向稀疏概率分布下的二维 Tsallis 熵的简化计算公式, 为有效降低二维 Tsallis 熵的计算代价提供理论支撑. 第 2.2 节综合分析了二维 Tsallis 熵的三个影响因素, 明确了 STEM 方法在选取分割阈值时所应遵循的基本原则: 在 Tsallis 熵指数 $\chi \in [0, 1]$ 时, 寻找相对更大的二维 Tsallis 熵所对应的灰度值, 该灰度值相对更适合作为候选分割阈值. 第 2.3 节进一步分析了 Tsallis 熵指数 χ 取 0.4744 的原因, 并最终构建出 STEM 方法在选取分割阈值时所用的目标函数. 最后, 第 2.4 节描述了选取分割阈值的算法步骤.

2.1 双向稀疏概率分布下的二维 Tsallis 熵简化计算

对于待分割图像 f (如图 6(a) 所示), 如果用一个灰度值 t 对其进行阈值化, 可得一幅二值图像 b_t (如图 6(b) 所示). 进一步, 从二值图像 b_t 中提取出内外轮廓图像 c_t (如图 6(e) 所示), 然后用图像 c_t 中值为 1 的像素对图像 k_x^* 和 k_y^* (图像 k_x^* 和 k_y^* 的计算方法见第 1.4 节, 它们的可视化示例如图 6(c)、图 6(d) 所示) 分别进行取样, 在取样所得像

素集合上分别定义随机变量, 这里用符号 φ_t 和 ϖ_t 表示. 在不产生误会的前提下, 这里仍以符号 p_{ij} 表示 φ_t 和 ϖ_t 的联合概率分布, 并用符号 $p_{i\cdot}$ 和 $p_{\cdot j}$ 来表示边缘概率分布.

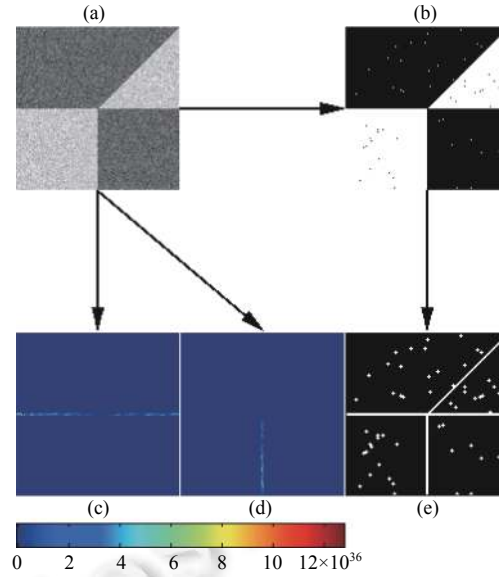


图6 STEM方法中关键步骤的示意图

对于一个双向稀疏化的二维随机变量 (φ_t, ϖ_t) , 它的边缘概率分布 $p_{i\cdot}$ 和 $p_{\cdot j}$ 可以按第 1.5 节介绍的方法先获得随机变量 φ_t 和 ϖ_t 的联合概率分布, 然后再基于联合概率分布计算边缘概率分布. 然而, 一种更有效的方式是直接根据图像 k_x^* 和 k_y^* 来构建边缘概率分布. 具体而言: 将两个随机变量 φ_t 和 ϖ_t 的取值范围限定为 $[1, 256]$, 该取值范围描述了某个取样点 (x, y) 处的 $k_x^*(x, y)$ (或 $k_y^*(x, y)$) 值属于下列 256 个区间的第 i (或第 j) 个区间: $[0, \lambda/256]$, $(\lambda/256, 2\lambda/256]$, $(2\lambda/256, 3\lambda/256]$, ..., $(255\lambda/256, +\infty)$, 其中, $\lambda = k^*(x_+, y_+)$. 如果 $k_x^*(x, y)$ (或 $k_y^*(x, y)$) 属于第 i (或第 j) 个区间, 则将计数器 $p_{i\cdot}$ (或 $p_{\cdot j}$) 加上 1. 统计完所有采样点 (x, y) 后, 将 $p_{i\cdot}$ (或 $p_{\cdot j}$) 除以总的采样点数, 可以获得二维随机变量 (φ_t, ϖ_t) 关于 φ_t (或 ϖ_t) 的边缘概率分布 $p_{i\cdot}$ (或 $p_{\cdot j}$). 进一步, 下面的命题 6 和命题 7 将证明: 当 $m=m^*$ 时, 计算二维随机变量 (φ_t, ϖ_t) 对应的 Tsallis 熵只涉及到它的边缘概率分布.

命题 6. 对于给定的 Tsallis 熵指数 $\chi (\chi \neq 1)$, 当 $m=m^*$ 时, 二维随机变量 (φ_t, ϖ_t) 的 Tsallis 熵为:

$$H_\chi(\varphi_t, \varpi_t) = \frac{1 - \left((p_{1\cdot} + p_{\cdot 1} - 1)^\chi + \sum_{i=2}^{256} (p_{i\cdot})^\chi + \sum_{j=2}^{256} (p_{\cdot j})^\chi \right)}{1 - \sum_{i=1}^{256} \sum_{j=1}^{256} (p_{i,j})^\chi} \quad (\chi \neq 1) \quad (12)$$

证明: 根据 Tsallis 熵定义^[31]知: $H_\chi(\varphi_t, \varpi_t) = \frac{1 - \sum_{i=1}^{256} \sum_{j=1}^{256} (p_{i,j})^\chi}{\chi - 1}$ ($\chi=0$ 且 $p_{i,j}=0$ 时定义 $(p_{i,j})^\chi=0$). 根据第 1.5 节可知: $m=m^*$ 时, 二维随机变量 (φ_t, ϖ_t) 的概率分布 $p_{ij} (i \geq 2, j \geq 2)$ 也会等于 0, 从而当 $\chi \neq 1$ 时有:

$$H_\chi(\varphi_t, \varpi_t) = \frac{1 - \sum_{i=1}^{256} \sum_{j=1}^{256} (p_{i,j})^\chi}{\chi - 1} = \frac{1 - \left((p_{1,1})^\chi + \sum_{i=2}^{256} (p_{i,1})^\chi + \sum_{j=2}^{256} (p_{1,j})^\chi \right)}{\chi - 1} = \frac{1 - \left((p_{1,1})^\chi + \sum_{i=2}^{256} (p_{i\cdot})^\chi + \sum_{j=2}^{256} (p_{\cdot j})^\chi \right)}{\chi - 1} \quad (13)$$

又 $\begin{cases} p_{1,1} + \sum_{i=2}^{256} p_{i,1} = p_{1\cdot} \\ p_{1,1} + \sum_{j=2}^{256} p_{1,j} = p_{\cdot 1} \end{cases}$, 据此可推知:

$$p_{1,1} + \sum_{i=2}^{256} p_{i,1} + p_{1,1} + \sum_{j=2}^{256} p_{1,j} = p_{\cdot,1} + p_{1,\cdot};$$

$$\text{又 } \sum_{i=2}^{256} p_{i,1} + p_{1,1} + \sum_{j=2}^{256} p_{1,j} = 1, \text{ 从而有:}$$

$$p_{1,1} = p_{\cdot,1} + p_{1,\cdot} - 1 \quad (14)$$

将公式 (14) 代入公式 (13) 得:

$$H_{\chi}(\varphi_t, \varpi_t) = \frac{1 - \left((p_{1,\cdot} + p_{\cdot,1} - 1)^{\chi} + \sum_{i=2}^{256} (p_{i,\cdot})^{\chi} + \sum_{j=2}^{256} (p_{\cdot,j})^{\chi} \right)}{\chi - 1}.$$

证毕.

命题 7. 对于给定的 Tsallis 熵指数 $\chi=1$, 当 $m=m^*$ 时, 二维随机变量 (φ_t, ϖ_t) 的 Tsallis 熵为

$$H_{\chi=1}(\varphi_t, \varpi_t) = - \left((p_{1,\cdot} + p_{\cdot,1} - 1) \ln(p_{1,\cdot} + p_{\cdot,1} - 1) + \sum_{i=2}^{256} p_{i,\cdot} \ln p_{i,\cdot} + \sum_{j=2}^{256} p_{\cdot,j} \ln p_{\cdot,j} \right) \quad (15)$$

证明: 当 Tsallis 熵指数 $\chi=1$ 时, 根据 Tsallis 熵定义^[31]知:

$$H_{\chi=1}(\varphi_t, \varpi_t) = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1 - \sum_{i=1}^{256} \sum_{j=1}^{256} (p_{i,j})^{\chi}}{\chi - 1} = - \sum_{i=1}^{256} \sum_{j=1}^{256} p_{i,j} \ln p_{i,j}.$$

根据第 1.5 节可知: $m=m^*$ 时, 二维随机变量 (φ_t, ϖ_t) 的概率分布 $p_{i,j} (i \geq 2, j \geq 2)$ 会等于 0, 从而当 $\chi=1$ 时有:

$$H_{\chi=1}(\varphi_t, \varpi_t) = - \left(p_{1,1} \ln p_{1,1} + \sum_{i=2}^{256} p_{i,1} \ln p_{i,1} + \sum_{j=2}^{256} p_{1,j} \ln p_{1,j} \right) = - \left(p_{1,1} \ln p_{1,1} + \sum_{i=2}^{256} p_{i,\cdot} \ln p_{i,\cdot} + \sum_{j=2}^{256} p_{\cdot,j} \ln p_{\cdot,j} \right) \quad (16)$$

将公式 (14) 代入公式 (16) 得:

$$H_{\chi=1}(\varphi_t, \varpi_t) = - \left((p_{1,\cdot} + p_{\cdot,1} - 1) \ln(p_{1,\cdot} + p_{\cdot,1} - 1) + \sum_{i=2}^{256} p_{i,\cdot} \ln p_{i,\cdot} + \sum_{j=2}^{256} p_{\cdot,j} \ln p_{\cdot,j} \right).$$

证毕.

2.2 分割阈值的选取原则

影响 $H_{\chi}(\varphi_t, \varpi_t)$ 的因素有 3 个: Tsallis 熵指数 χ 、随机变量 (φ_t, ϖ_t) 的概率分布 $p_{i,j}$ 以及随机变量 (φ_t, ϖ_t) 所有可能取值的总个数 ψ . 下面将分析这 3 个因素对 $H_{\chi}(\varphi_t, \varpi_t)$ 的独立影响或组合影响, 以此阐明在 $\chi \in [0, 1]$ 的前提条件下, 通过最大化 $H_{\chi}(\varphi_t, \varpi_t)$ 来选取分割阈值的合理性.

当 Tsallis 熵指数 $\chi=0$ 时, $H_{\chi}(\varphi_t, \varpi_t)$ 的计算结果就是随机变量 (φ_t, ϖ_t) 所有可能取值的总个数 ψ . 当内外轮廓图像 c_t 对图像 k_x^* 和 k_y^* 分别进行取样时, 如果轮廓图像 c_t 中值为 1 的像素更多地位于图像 k_x^* 和 k_y^* 中的非边缘区域, 比如对象或者背景内部区域, 此时随机变量 (φ_t, ϖ_t) 的概率分布 $p_{i,j}$ 会进一步稀疏化, 不但 $p_{i,j} (i \geq 2, j \geq 2)$ 会等于 0, 且 $p_{i,1} (i \geq 2)$ 和 $p_{1,j} (j \geq 2)$ 中值为 0 的情况也会增多. 根据命题 6 中关于 $H_{\chi}(\varphi_t, \varpi_t)$ 的计算公式可知, 相应的 ψ 值会较小. 比较而言, 如果轮廓图像 c_t 中值为 1 的像素更多地位于图像 k_x^* 和 k_y^* 中的边缘区域时, $p_{i,1} (i \geq 2)$ 和 $p_{1,j} (j \geq 2)$ 中非 0 值会相对更多一些, 此时, $H_{\chi}(\varphi_t, \varpi_t)$ 会相对更大, 或者说将获得相对更大的 ψ 值 (参考图 7(a)).

相邻灰度值 t 所对应的随机变量 (φ_t, ϖ_t) 所有可能取值的总个数 ψ 之间一般变化较平滑, 此时, 如果固定 χ 不变, 则影响 $H_{\chi}(\varphi_t, \varpi_t)$ 计算结果的主要因素是概率分布 $p_{i,j}$, 并且由于概率分布双向稀疏化的原因, 最关键的影响因素是 $p_{1,1}$: $p_{1,1}$ 越小, 则概率分布 $p_{i,j}$ 总体倾向于更均匀. 根据 Tsallis 熵的性质^[31]可知:

① $\chi > 0$ 时, 如果概率分布 $p_{i,j}$ 越均匀, 则相应的 Tsallis 熵值越大, 从而更可能在 $H_{\chi}(\varphi_t, \varpi_t)$ 曲线上形成局部极大值; 如果概率分布 $p_{i,j}$ 越不均匀, 则相应的 Tsallis 熵值越小, 从而更可能在 $H_{\chi}(\varphi_t, \varpi_t)$ 曲线上形成局部极小值 (如图 7(b))—

图 7(e) 所示).

② $\chi < 0$ 时的情形和 $\chi > 0$ 时的情形相反, 概率分布 p_{ij} 越均匀时, 更可能形成局部极小值; 概率分布 p_{ij} 越不均匀时, 更可能形成局部极大值 (如图 7(f) 所示).

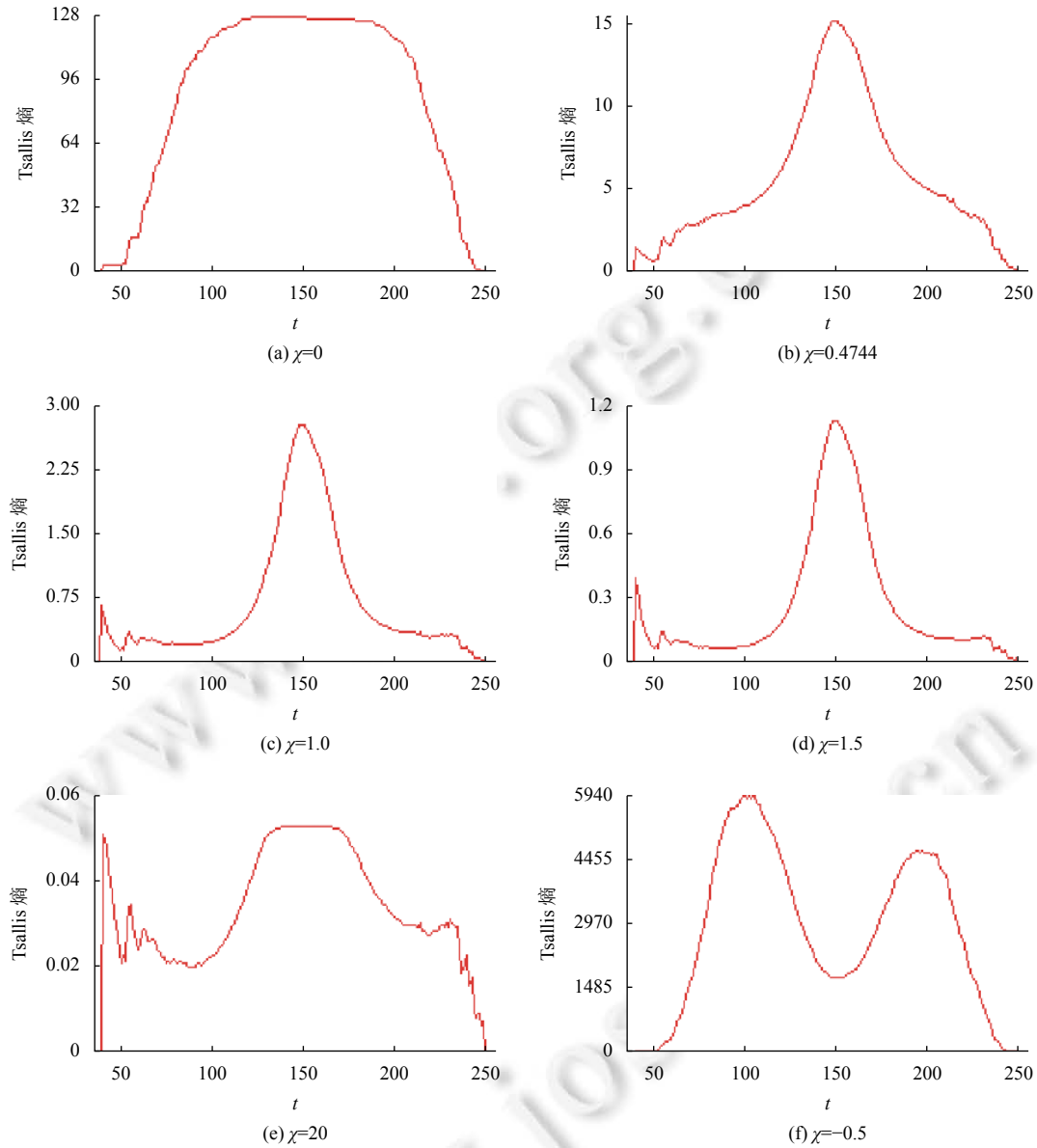


图 7 以图 6(a) 为例, 展示不同 Tsallis 熵指数 χ 下, Tsallis 熵 $H_\chi(\varphi_b, \omega_t)$ 随灰度值 t 的变化情况

根据 Tsallis 熵和熵指数 χ 的单调关系^[31], 在随机变量 (φ_b, ω_t) 具有相同概率分布 p_{ij} 情况下 (从而也具有相同的随机变量 (φ_b, ω_t) 所有可能取值的总个数 ψ), 熵指数 χ 越大, 则相应的 $H_\chi(\varphi_b, \omega_t)$ 越小 (参考图 7(a)–图 7(f)). 这意味着: 相对于 $0 \leq \chi \leq 1$ 而言, $\chi > 1$ 时的 $H_\chi(\varphi_b, \omega_t)$ 将具有更窄的 Tsallis 熵比较空间, 这将弱化全局极大值和局部极大值的差异; 并且 χ 值越大, 则全局极大值和局部极大值之间的差异更小 (如图 7(e) 所示).

根据 Tsallis 熵的性质^[31]可知: 在 $0 \leq \chi \leq 1$ 时, 如果固定 χ 不变, 随机变量 (φ_b, ω_t) 的概率分布 p_{ij} 越趋向均匀; 且随机变量 (φ_b, ω_t) 所有可能取值的总个数 ψ 越大时, 则相应的 Tsallis 熵 $H_\chi(\varphi_b, \omega_t)$ 越大. 一方面, 如果轮廓图像 c_t

中值为 1 的像素更多地位于图像 k_x^* 和 k_y^* 中的边缘区域, 根据前述 $\chi=0$ 时的分析可知, ψ 倾向于更大; 另外, 由于 $p_{1,1}$ 会相对更小, 使得概率分布 p_{ij} 总体会更趋向均匀 (这是相对于图像 c_t 中值为 1 的像素更多地位于图像 k_x^* 和 k_y^* 中的非边缘区域而言), 结果相应的 Tsallis 熵 $H_{\chi}(\varphi_t, \varpi_t)$ 总体更大. 另一方面, 如果轮廓图像 c_t 中值为 1 的像素更多地位于图像 k_x^* 和 k_y^* 中的边缘区域, 说明轮廓图像 c_t 中值为 1 的像素更多地位于待分割图像 f 中对象和背景的分界区域. 这样, 在 $\chi \in [0,1]$ 时, 寻找相对更大的 Tsallis 熵 $H_{\chi}(\varphi_t, \varpi_t)$ 所对应的灰度值更适合作为候选分割阈值.

2.3 选取分割阈值的目标函数

第 2.2 节的分析表明: 限定 $\chi \in [0,1]$, 总体上更利于构建 Tsallis 熵最大化导向的阈值选取原则. 该选取原则可以被形式化为如下的目标函数以选取分割阈值 t^* :

$$t^* = \arg \max_{t \in [t_{\min}, t_{\max}]} H_{\chi}(\varphi_t, \varpi_t) \quad (17)$$

其中, $\chi \in [0,1]$, $t_{\min}$ 和 $t_{\max}$ 分别表示待分割图像 f 的最小灰度值和最大灰度值. 为应用公式 (17) 求取分割阈值 t^* , 尚需从 $[0,1]$ 内具体确定一个总体相对合理的 Tsallis 熵指数. 为此, 定义了一个涉及 z 个 Tsallis 熵的计算公式:

$$H = \left(\prod_{k=1}^z (H_{\chi_k}(\varphi_t, \varpi_t)) \right)^{\frac{1}{z}} \quad (18)$$

其中, $\chi_k \in [0,1]$, z 表示参与乘积运算的 Tsallis 熵的总个数.

公式 (18) 计算的是 z 个 Tsallis 熵的几何均值, 它反映了 z 个 Tsallis 熵的集中趋势. 如果一个 Tsallis 熵 $H_{\chi^*}(\varphi_t, \varpi_t)$ 和 r 个随机产生的几何均值 H 具有累加最小绝对差, 则可定义相应的 Tsallis 熵指数 χ^* 为“几何均值累加绝对差最小化标准下的最优 Tsallis 熵指数”, 其形式化定义如下:

$$\chi^* = \arg \min_{\chi_k \in [0,1]} \sum_{i=1}^r |H_{\chi_k}(\varphi_t, \varpi_t) - H_i| \quad (19)$$

另一方面, 随机变量 (φ_t, ϖ_t) 的概率分布 p_{ij} 具有 3 个一般性特征.

- (1) $p_{1,1}$ 的独特性: $p_{i,j}(i \geq 2, j \geq 2)$ 中被稀疏化的概率主要迁移累积到 $p_{1,1}$ 上, 这使得 $p_{1,1}$ 一般会比其他 $p_{i,j}$ 大;
- (2) $p_{i,1}(i \geq 2)$ 和 $p_{1,j}(j \geq 2)$ 的随机性: 它们的加和应等于 $1-p_{1,1}$, 但它们的概率值并不确定;
- (3) 随机变量 (φ_t, ϖ_t) 所有可能取值的总个数 ψ 的有限性: 因为双向稀疏化的原因, ψ 一般小于 256.

根据公式 (18) 和公式 (19) 以及随机变量 (φ_t, ϖ_t) 的概率分布 p_{ij} 所具有的上述 3 个特征, 设计了一个计算 Tsallis 熵指数 χ^* 的算法.

算法 1. 计算单一 Tsallis 熵指数.

输入: 参与几何均值计算的 Tsallis 熵指数的总个数 z , 随机产生不同几何均值的运行总次数 r ;

输出: Tsallis 熵指数 χ^* .

步骤 1. 确定参与计算的 z 个 Tsallis 熵指数, 它们将区间 $[0,1]$ 等分为 $z-1$ 子区间.

步骤 2. 初始化一个大小 r 行 z 列的数组 v , 然后循环执行步骤 3 到步骤 7 共 r 次.

步骤 3. 产生介于 2 到 256 的一个随机数 ψ , 以模拟随机变量 (φ_t, ϖ_t) 所有可能取值的总个数.

步骤 4. 产生介于 0 到 1 的一个随机数 ϑ 以模拟 $p_{1,1}$.

步骤 5. 产生 $\psi-1$ 个随机数, 并通过归一化使得它们的加和等于 $1-\vartheta$.

步骤 6. 计算步骤 1 中 z 个 Tsallis 熵指数对应的 Tsallis 熵, 并按公式 (18) 计算这 z 个 Tsallis 熵的几何均值 H .

步骤 7. 计算该几何均值 H 与步骤 6 中的 z 个 Tsallis 熵的差的绝对值, 并将结果保存到数组 v 中的相应行中, 行号等于循环迭代变量的当前值.

步骤 8. 计算数组 v 中每 1 列的和, 然后寻找这 z 个和中最小值对应的 Tsallis 熵指数 χ^* 并输出.

算法 1 中, 总次数 r 设定为一个足够大的值 10 000, 而 z 则分别设置为 $z=2^i+1, i=1,2,3,\dots,17$, 运行结果见表 1.

随着 z 值不断变大, 在区间 $[0,1]$ 内均匀分布的 Tsallis 熵指数也越来越密集, 从而输出的 χ^* 的精度也逐渐提

高, 且最终趋近于 0.4744. 据此, 将公式 (17) 中的 Tsallis 熵指数确定为 0.4744, 从而最终建立起计算分割阈值 t^* 的目标函数:

$$t^* = \arg \max_{t \in [t_{\min}, t_{\max}]} H_{\chi=0.4744}(\varphi_t, \varpi_t) \quad (20)$$

其中, $H_{\chi}(\varphi_t, \varpi_t)$ 的计算见命题 6 的公式 (12).

表 1 不同 z 值下输出的 Tsallis 熵指数 χ^*

z	3	5	9	17	33	65	129	257	513
Tsallis熵指数	0.5	0.5	0.5	0.5	0.468 75	0.468 75	0.476 562 5	0.476 562 5	0.474 609 375

表 1 不同 z 值下输出的 Tsallis 熵指数 χ^* (续 1)

z	1 025	2 049	4 097	8 193
Tsallis熵指数	0.474 609 375	0.474 121 093 75	0.474 365 234 375	0.474 365 234 375

表 1 不同 z 值下输出的 Tsallis 熵指数 χ^* (续 2)

z	16 385	32 769	65 537	131 073
Tsallis熵指数	0.474 365 234 375	0.474 365 234 375	0.474 441 528 320 313	0.474 372 863 769 531

2.4 选取分割阈值的算法描述

算法 2. STEM.

输入: 待分割图像 f ;

输出: 分割阈值 t^* 及分割结果图像 b_{t^*} .

步骤 1. 用变量 H_t 记录 Tsallis 熵 $H_{\chi=0.4744}(\varphi_t, \varpi_t)$, 用变量 $H_{\max}$ 记录最大的 H_t 值, 用变量 t^* 记录对应于 $H_{\max}$ 的灰度值. 变量 H_t , $H_{\max}$ 和 t^* 的初始值均设置为 0.

步骤 2. 根据第 1.4 节倒数第 2 段所述方法计算 m^* , 并将 $m=m^*$ 时按公式 (4) 和公式 (5) 计算出的图像 k_x 和 k_y 分别记为 k_x^* 和 k_y^* .

步骤 3. 对于待分割图像 f 的每一个可能灰度值 $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$, 按照由小到大的顺序循环执行下面的步骤 4 到步骤 8.

步骤 4. 用灰度值 t 对图像 f 进行阈值化, 获得一幅二值图像 b_t .

步骤 5. 从二值图像 b_t 中提取出内外轮廓图像 c_t , 这可通过 3 小步来达成:

首先, 让二值图像 c_t 的像素值全部等于 1;

其次, 提取出内部轮廓: 在二值图像 b_t 中, 如果某个像素值等于 1, 且该像素的 4 邻域像素值都等于 1, 那么设置该像素在图像 c_t 中对应位置的像素值等于 0;

最后, 提取出外部轮廓: 将二值图像 b_t 取反得二值图像 $\bar{b}_t$, 然后参考提取内部轮廓的方法对 $\bar{b}_t$ 也进行像素及其 4 邻域的分析判断, 并在二值图像 c_t 上进行赋值.

步骤 6. 用二值图像 c_t 中像素值为 1 的像素对图像 k_x^* 和 k_y^* 分别进行取样, 在取样所得像素集合上分别定义随机变量 φ_t 和 ϖ_t , 并按第 2.1 节第 2 段介绍的方法获得随机变量 φ_t 和 ϖ_t 的边缘概率分布 p_{φ_t} 和 p_{ϖ_t} .

步骤 7. 按照命题 6 的公式 (12) 计算相应的 Tsallis 熵 H_t , 其中, Tsallis 熵指数 $\chi=0.4744$.

步骤 8. 判断 H_t 和 $H_{\max}$ 大小关系, 如果 $H_t > H_{\max}$, 那么让 $H_{\max}$ 等于 H_t , t^* 等于 t .

步骤 9. 用循环结束时的 t^* 值阈值化待分割图像 f , 得到分割结果图像 b_{t^*} , 最后输出 t^* 及 b_{t^*} .

3 实验结果与讨论

将用 4 个小节分析和讨论 STEM 方法和 6 个被比较方法的分割精度和分割效率. 其中, 第 3.1 节简要介绍了

实验测试环境、定量评估指标、参与比较的其他 6 个方法; 第 3.2 节细致地展示和讨论了 7 个分割方法在 44 幅合成图像上的分割结果; 第 3.3 节进一步展示了 7 个分割方法在 44 幅真实世界图像上的分割结果; 最后, 第 3.4 节比较了 6 个自动分割方法的 CPU 计算代价。

3.1 测试环境、定量评估指标、参与比较的方法

用于测试实验的主要软硬件配置如下: CPU 为 2.3 GHz 的 Intel Core i3-2350M, 内存为 4 GB 大小的 DDR2, 操作系统为 32 位 Windows 7, 开发平台为 32 位 Matlab 2009a. 测试图像集由 44 幅合成图像和 44 幅真实世界图像组成, 它们具有不同的灰度直方图模式. 访问网址 <https://share.weiyun.com/53KjVPB> 可以获得测试图像集、分割参考图像集和分割参考图像的制作规范.

在评估阈值分割方法的分割精度时, 一个常用的定量评估指标是误分类率 (misclassification error, ME)^[24,32-34]. ME 表示在分割结果图像中背景像素被误分为目标像素以及目标像素被误分为背景像素的百分比. ME 的计算公式为

$$ME = \left(1 - \frac{\text{card}(\Phi \cap \Phi_t) + \text{card}(r \cap r_t)}{\text{card}(\Phi) + \text{card}(r)} \right) \times 100\% \quad (21)$$

其中, Φ 和 r 分别表示在分割参考图像中的目标像素集和背景像素集, 而 Φ_t 和 r_t 分别表示在分割结果图像中的目标像素集和背景像素集, 符号 $\cap$ 表示求交集, 符号 $\text{card}(\cdot)$ 表示求集合中元素的个数. 当分割结果图像和分割参考图像完全一样时, ME 将为 0%; 当分割结果图像和分割参考图像完全相反时, ME 将为 100%.

提出的 STEM 方法和 Masi 广义熵 (Masi generalized entropy, MGE) 阈值方法^[2]、自适应 Tsallis 熵 (adaptive Tsallis entropy, ATE) 阈值方法^[3]、迭代 3 类 (iterative triclass, ITC) 阈值方法^[35]、斜率差分分布 (slope difference distribution, SDD) 阈值方法^[36]、快速鲁棒模糊 C-均值 (fast and robust fuzzy C-means, FRFCM) 聚类分割方法^[37]以及交互式阈值 (interactive thresholding, IT) 方法^[38]进行了比较. 其中, MGE 方法和 ATE 方法是新近提出的熵阈值分割方法, ITC 方法是经典 Otsu 阈值分割方法的改进, SDD 方法是新近提出的基于直方图形状的阈值分割方法, 而 FRFCM 是新近提出的一种聚类分割方法. 最后, IT 方法通过交互方式来选取一个分割阈值, 该阈值对应的二值图像具有最小的 ME 值. 因此, IT 方法可以作为其他比较方法在分割精度方面的参考.

3.2 在合成图像上的比较实验

图 8 是代表性的合成测试图像: 图 8(a) 是用于合成测试图像的无噪图像, 其中, 目标区域和背景区域的大小比率约等于 3:7, 用于模拟目标和背景大小比例较均衡的情况; 图 8(b) 是用于合成测试图像的无噪图像, 目标区域和背景区域的大小比率约等于 3:1997, 用于模拟目标和背景大小比例失衡的情况; 图 8(c) 和图 8(d) 分别是在图 8(a) 和图 8(b) 图像上添加高斯噪声后所得合成图像; 图 8(e) 和图 8(f) 分别是对图 8(c) 和图 8(d) 图像进行高斯点扩散后所得合成图像. 用于测试的合成图像总计 44 幅, 这些测试图像或者是对图 8(a) 和图 8(b) 添加诸如高斯噪声 (如图 8(c)、图 8(d) 所示)、伽马噪声、极值噪声、瑞利噪声、均匀噪声或贝塔噪声来产生, 或者是在添加噪声之后再行高斯点扩散来产生 (如图 8(e)、图 8(f) 所示). 结果, 这些合成图像的直方图展现为双峰、单峰、无峰或者多峰模式. 为了全面检验 7 个分割方法对不同直方图模式的分割适应能力, 将 44 幅合成图像分成 6 组分别进行测试.

第 1 组测试图像共有 8 幅, 这些图像的目标区域和背景区域的大小比率约等于 3:7. 它们是通过在无噪合成图像 (如图 8(a) 所示) 分别添加高斯噪声、伽马噪声、极值噪声、瑞利噪声或不同参数的贝塔噪声而产生的. 因为目标区域和背景区域的大小比例较为均衡, 所得合成图像的直方图呈现出双峰模式. 由于添加的噪声类型不同, 结果构成直方图的基本形态也不同. 对比图 9(a)–图 9(g) 中红色实心三角形标识的数据, 可以观察到: ① MGE 方法的总体分割结果最差, 其 ME 值分布在 15% 到 30% 之间, 其平均 ME 值远远大于其他方法的平均 ME 值; ② ATE 方法的分割精度总体优于 MGE 方法, 但是在伽马噪声和贝塔噪声 ($\alpha=0.1, \beta=0.8$) 情况下误分割严重, ME 值均超过 22.5%; ③ SDD 方法的总体分割结果优于 MGE 方法和 ATE 方法, 但是在伽马噪声、贝塔噪声 ($\alpha=0.1, \beta=0.8$) 和贝塔噪声 ($\alpha=1.5, \beta=1.5$) 情况下误分割仍然较严重, ME 值均在 15% 左右; ④ ITC, FRFCM 和 STEM 方法的分割结果明显优于其他 3 个比较方法, 特别是 STEM 方法, 其分割结果和 IT 方法完全一致, 达到了理论上的最优分割.

第 2 组测试图像共有 4 幅, 这些图像的目标区域和背景区域的大小比率约等于 3:7. 它们是通过在无噪合成图像 (如图 8(a) 所示) 分别添加均匀噪声、贝塔噪声 ($\alpha=0.5, \beta=0.5$) 或者瑞利、均匀、极值、正态和贝塔的混合噪声

来产生. 这些合成图像的灰度直方图呈现出无峰模式或者多峰模式. 对比图 9(a)–图 9(g) 中绿色实心正方形标识的数据可以发现: ① SDD 方法的误分割最严重, 平均 ME 值接近于 30%; ② MGE 方法略优于 SDD 方法, 但是 ME 值最低仍然大于 10%; ③ ATE, ITC 和 FRFCM 这 3 个方法的分割结果不稳定, ME 值时大时小, 小的时候接近于 0, 而大的时候又超过 20%; ④ STEM 方法和 IT 方法仅在第 3 幅测试图像上两者的 ME 值相差 0.006%, 在其他 3 幅图像上 ME 值均相同, STEM 方法再次逼近了理论上的最优分割.

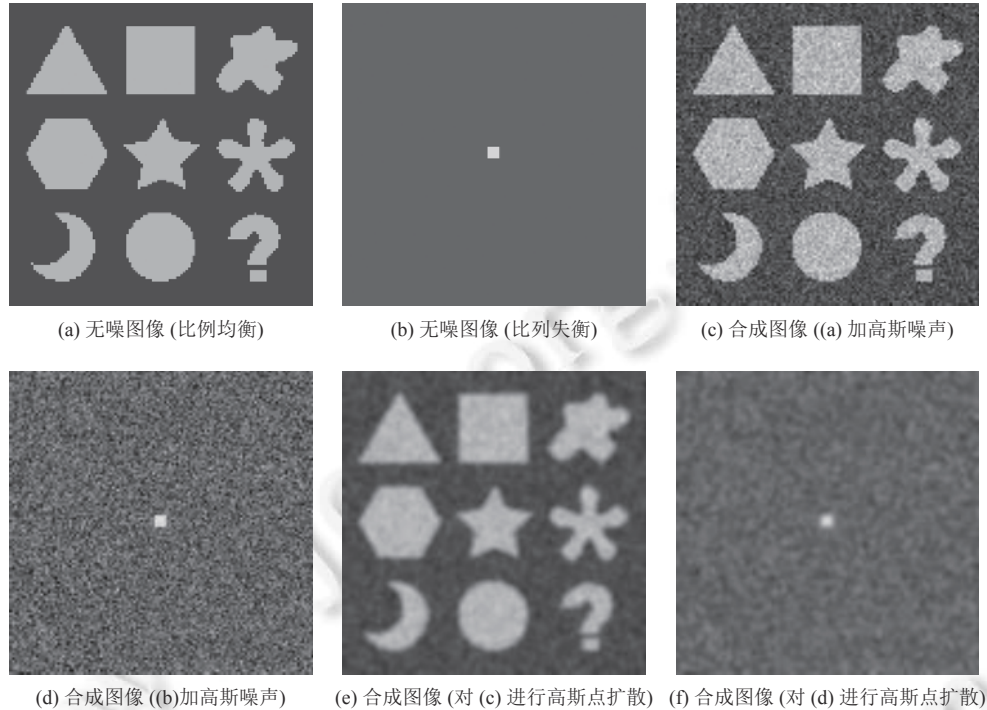


图 8 4 幅代表性的合成测试图像

第 3 组测试图像共有 10 幅, 这些图像的目标区域和背景区域的大小比率约等于 3:1997. 它们是通过无噪合成图像 (如图 8(b) 所示) 分别添加高斯噪声、伽马噪声、极值噪声、瑞利噪声、均匀噪声或不同参数的贝塔噪声而产生的. 因为目标区域和背景区域的大小比率严重失衡, 所得合成图像的直方图呈现出单峰模式或者双峰模式或者无峰模式. 此外, 由于添加的噪声类型不同, 结果, 构成直方图的基本形态也不同. 对比图 9(a)–图 9(g) 中蓝色实心圆形标识的数据可以观察到: ① MGE 和 SDD 方法的分割结果均不稳定, 前者 ME 值分布在 0% 到 70% 之间, 而后者 ME 值分布在 0% 到 55% 之间; ② ITC 和 FRFCM 方法的稳定性也较差, 并且相对 MGE 和 SDD 方法而言, 它们的误分割更严重, 两者的 ME 均值都大于 40%; ③ ATE 方法的总体分割结果优于 MGE, SDD, ITC 和 FRFCM 方法, 但是在无峰模式情况下误分割仍然较严重, ME 值接近 15%; ④ STEM 方法和 IT 方法仅在第 8 幅测试图像上两者的 ME 值相差 0.006%, 在其他 9 幅图像上 ME 值均相同, STEM 方法再次逼近了理论上的最优分割.

第 4 组和第 5 组的测试图像分别通过对第 1 组和第 2 组的测试图像进行高斯点扩散而产生. 高斯点扩散使得这两组测试图像的目标区域和背景区域都变模糊, 其灰度直方图的主要特征是双峰平谷, 但在平谷区域各有不同. 对比图 9(a)–图 9(g) 中实心三角形与空心三角形以及实心正方形与空心正方形标识的数据可以发现: ① MGE, ATE, ITC, SDD 和 FRFCM 方法在第 4 组和第 5 组合成图像上的分割精度在总体上都优于它们在对应的第 1 组和第 2 组合成图像上的分割精度, 这说明相对于具有双峰深谷、无峰或者多峰直方图模式的测试图像而言, 这些方法更适合分割具有双峰平谷直方图模式的图像; ② IT 方法在第 4 组和第 5 组合成图像上的分割精度都低于它们在对应的第 1 组和第 2 组合成图像上的分割精度, 注意到 IT 方法是通过交互方式来选取一个分割阈值, 该阈值对应的二值图像具有最小的 ME 值, 这表明高斯点扩散使得目标区域发生模糊变形, 从而降低了阈值分割在理论上

所能达到的最优分割精度; ③ 尽管如此, STEM 方法和 IT 方法的最大 ME 值仍然低于 1.1%, STEM 方法的分割结果仍然最接近于 IT 方法确定的最优分割结果。

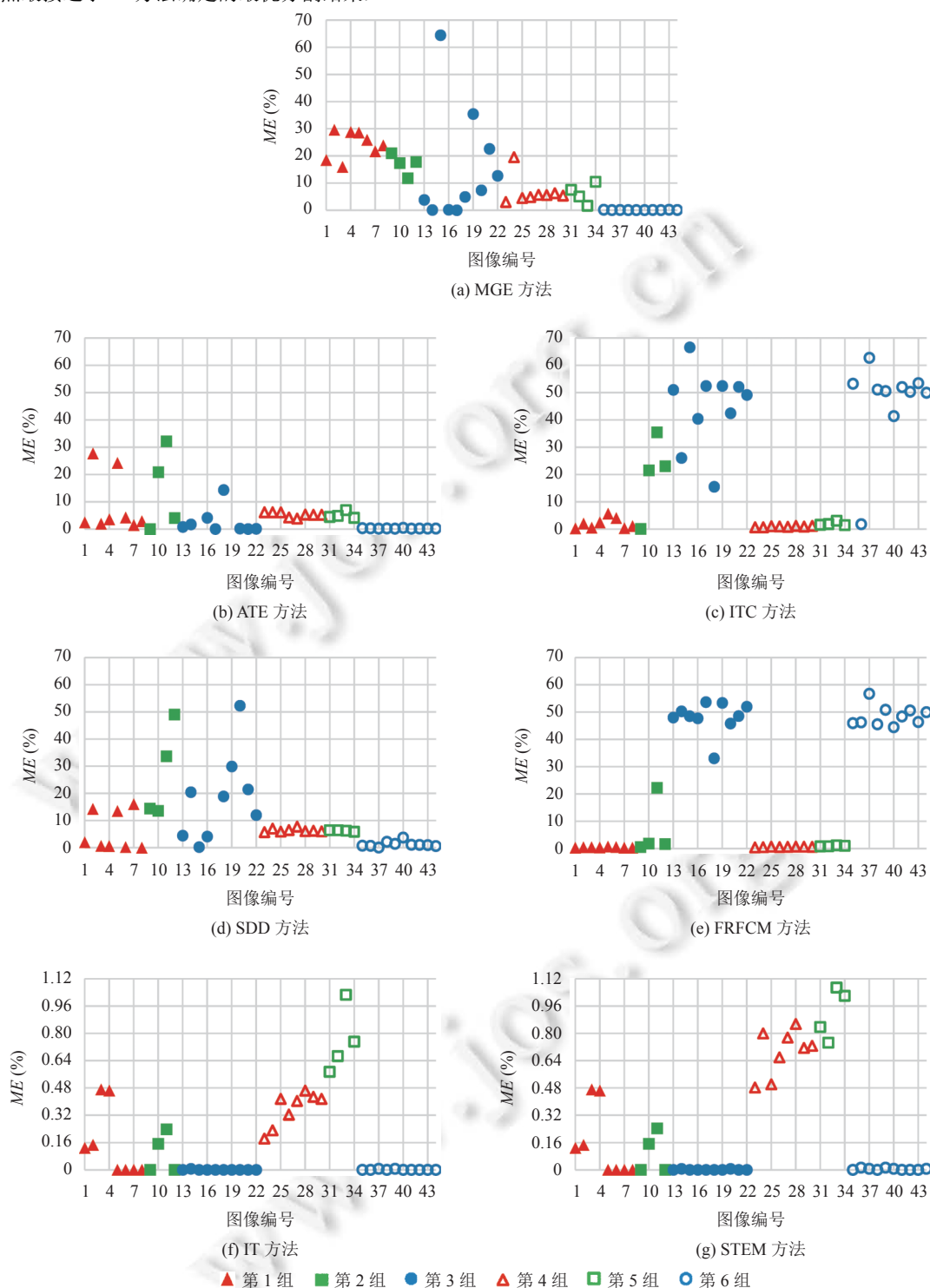


图9 7个分割方法在44幅合成图像上的 ME 值比较

第 6 组测试图像共有 10 幅, 它们通过对第 3 组测试图像进行高斯点扩散而产生. 这组测试图像都是在模糊的背景上显示了一个小的模糊目标, 其灰度直方图的主要特征是单峰右偏模式. 对比图 9(a)–图 9(g) 中蓝色空心圆形标识的数据可以观察到: ① MGE, ATE 和 SDD 方法较适合分割具有单峰右偏直方图模式的测试图像, 它们在这组测试图像上的平均 ME 值分别仅为 0.05%, 0.19% 和 1.2%; ② ITC 和 FRFCM 方法在这组测试图像上的误分割都很严重, 它们在这组测试图像上的平均 ME 值分别达到了 46.58% 和 48.44%; ③ STEM 和 IT 方法仅在第 2 幅、第 5 幅、第 6 幅和第 10 幅测试图像上的分割结果有极微小的差别, 但两者的 ME 值差不超过 0.01%, 在其他 6 幅测试图像上则具有完全一致的分割结果, STEM 方法的分割结果仍然最接近于 IT 方法确定的最优分割结果.

3.3 在真实世界图像上的比较实验

具有不同灰度直方图模式的 44 幅真实世界图像被用于进一步检验 7 个分割方法的分割适应能力. 这些真实世界图像的灰度直方图可用高斯分布、伽马分布、极值分布、瑞利分布、均匀分布和贝塔分布中的若干分布的混合进行逼近. 在这 44 幅真实世界图像中: 编号 1 到 10 的图像的灰度直方图为单峰左偏、右偏或者无偏模式; 编号 11 到 25 的图像的灰度直方图为双峰平谷或者深谷模式; 编号 26 到 38 的图像的灰度直方图为多峰模式, 且峰数大于等于 3; 编号 39 到 44 的图像的灰度直方图为无峰模式.

作为代表性示例, 图 10 显示了 4 幅真实世界测试图像 (对应的图像编号分别是 2, 18, 29 和 44) 以及它们相应的灰度直方图, 同时也显示了 STEM 方法获得的分割结果 (在中间一列, 绿色区域显示了对应的灰度直方图, 黑色曲线显示了 STEM 方法计算阈值的 Tsallis 熵目标函数曲线, 红色虚线及旁边的数字标示了 STEM 方法选取的阈值).

可以观察到, STEM 方法均精确地将目标区域和背景区域进行了分割. 事实上, 对这 4 幅测试图像, STEM 方法对应的 ME 值分别为 0.15%, 0.39%, 0.007% 和 0.24%, 而用于分割参考的 IT 方法在这 4 幅测试图像上的 ME 值分别是 0.15%, 0.3%, 0.007% 和 0.24%. 这意味着 STEM 方法的分割结果非常接近 IT 方法确定的最优分割结果.

图 11 全面显示了 7 个分割方法在 44 幅真实世界图像上的误分割量化比较结果. 在每幅子图中, 红色、绿色、蓝色和黄色的竖条分别标示了各分割方法在单峰、双峰、多峰和无峰直方图模式情况下的 ME 值, 而红色、绿色、蓝色和黄色水平虚线分别标示了对应情形下 ME 值的平均值.

从图 11 中可以观察到:

- ① 对灰度直方图为单峰、双峰、多峰或无峰模式的图像, MGE 和 SDD 方法的分割结果都很不稳定, ME 值小的时候接近 0%, ME 值大的时候会超过 50%, 甚至接近完全误分割的 100%;
- ② 对具有双峰直方图模式的图像而言, ITC 和 FRFCM 方法尽管具有较好的分割精度, 但它们在单峰、多峰和无峰模式情况下的误分割都很严重, 各自 ME 均值都超过了 27%;
- ③ ATE 方法对具有单峰直方图模式的测试图像具有相对稳定的分割结果, 它对这一组具有多峰直方图模式的测试图像分割精度也较好, ME 均值为 2.14%, 这主要是因为这组测试图像的多峰直方图模式大多带有较长的拖尾. 但是, ATE 方法在双峰和无峰模式的测试图像上的分割结果也不稳定;
- ④ 灰度直方图呈现为单峰、双峰、多峰或者无峰模式的图像, STEM 方法和 IT 方法对应的 ME 均值都小于 0.6%, 远远低于其他 5 个被比较方法的 ME 均值; 另外, STEM 方法和 IT 方法的单一 ME 值最大分别不超过 1.4% 和 1.1%, 远远低于其他 5 个被比较方法的 ME 均值. 这些都表明, STEM 方法的分割结果是最接近于 IT 方法确定的最优分割结果.

3.4 计算效率的比较实验

在相同软硬件条件下, 比较不同方法的 CPU 耗时能反映不同方法的计算效率差异. 注意到相同程序在不同时刻运行时其 CPU 耗时有轻微浮动, 为了降低这种浮动效应, 可以让每个待比较的分割方法在同一幅图像上连续运行 10 次, 再以这 10 次运行的平均耗时作为该分割方法在该图像上的 CPU 耗时. 进一步, 可以计算出每个分割

方法在 44 幅合成图像和 44 幅真实世界图像上 CPU 耗时的均值和标准偏差. 从表 2 可以观察到: ITC 方法具有相对更高的计算效率, 而 ATE 和 STEM 两个方法具有相对更低的计算效率.

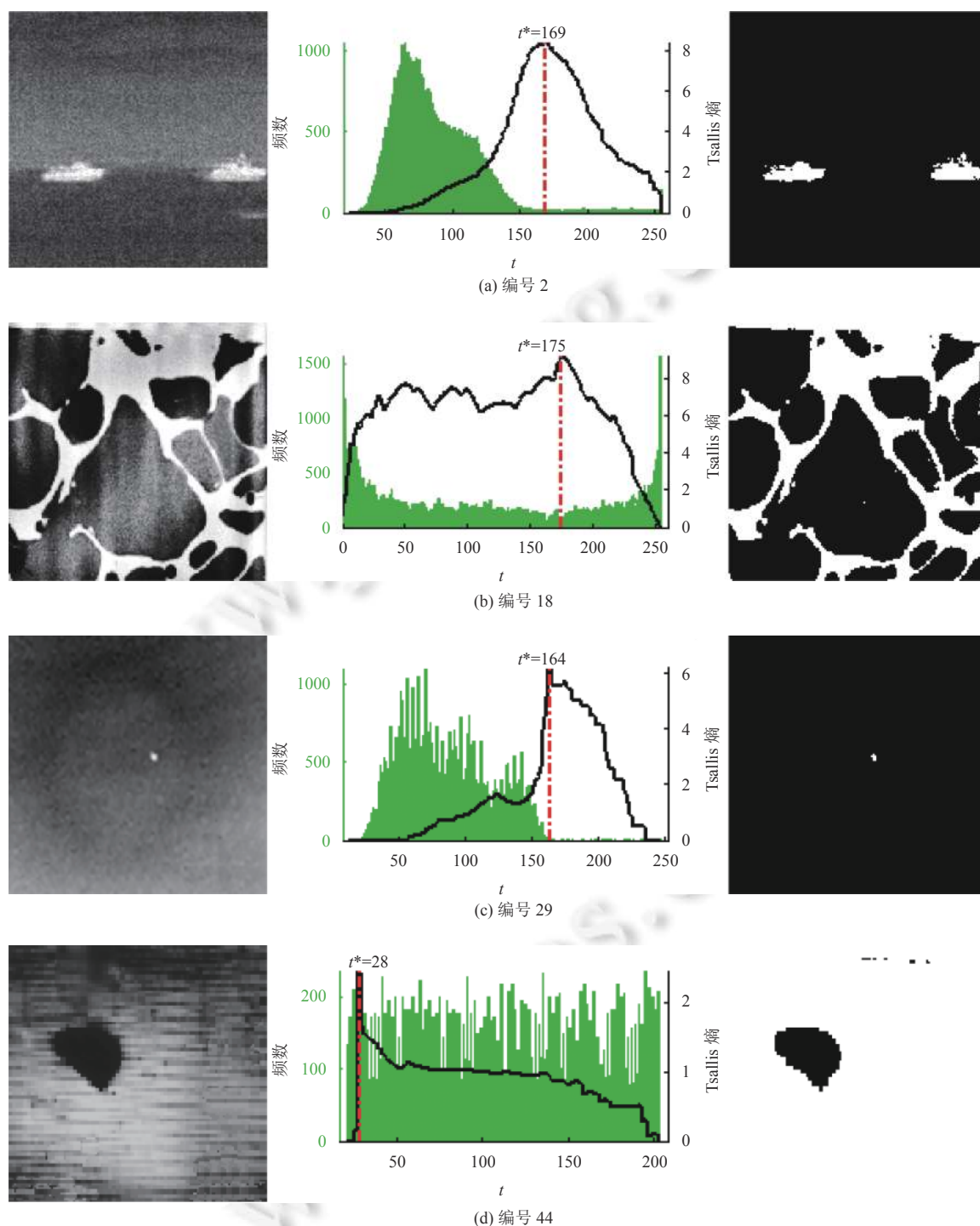


图 10 4 幅真实世界图像、相应的灰度直方图以及 STEM 方法的分割结果

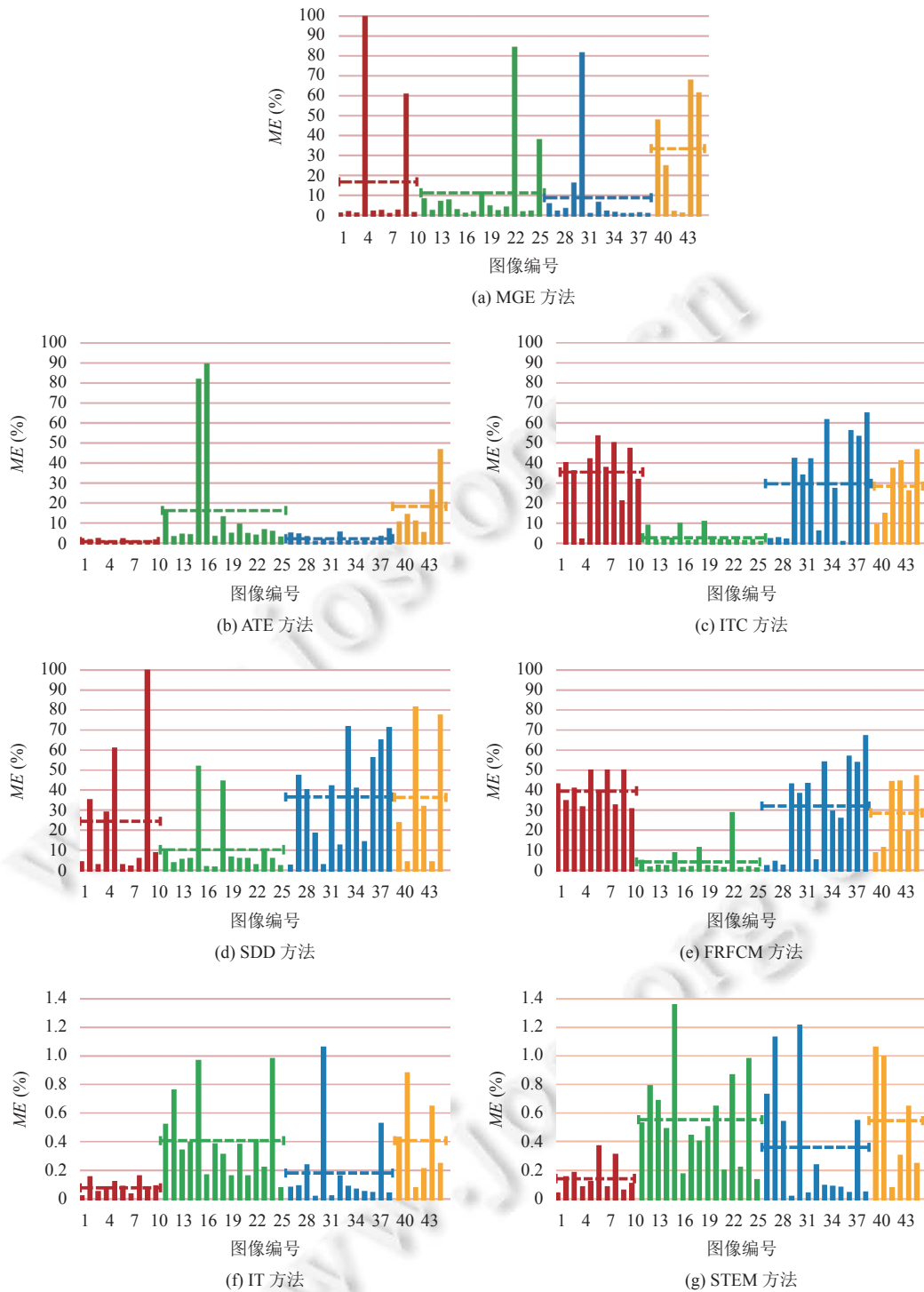


图 11 7 个分割方法在 44 幅真实世界图像上的 ME 值比较

ITC 方法涉及到的主要计算为对待分割图像进行灰度直方图的预先统计以及基于灰度直方图的均值和方差计算, 这些计算相对简单, 它的平均 CPU 耗时最少. FRFCM 方法是一个改进的 FCM 聚类算法, 它主要涉及到对

待分割图像的形态学闭重构、对重构后图像构建灰度直方图以及成员隶属关系的快速滤波. FRFCM 方法的计算量比 ITC 方法大, 因此其平均 CPU 耗时高于 ITC 方法. MGE 方法涉及待分割图像的灰度直方图的预先统计以及基于灰度直方图的 Masi 熵计算. 计算 Masi 熵比计算均值和方差相对复杂一些, 因此 MGE 方法的计算代价比 ITC 方法也略高. SDD 方法需要先构造归一化的灰度直方图, 然后在频率域进行该直方图的平滑处理, 并根据平滑后的灰度直方图计算斜率差分. SDD 方法的后两项计算比 MGE 方法的 Masi 熵计算更复杂一些, 因此前者的计算代价又比后者略高. ATE 方法除了需要预先计算待分割图像的灰度直方图外, 还需要分析待分割图像的冗余度来计算 Tsallis 熵指数 χ 以及各灰度分布概率的 χ 次幂, 其平均 CPU 耗时高于 MGE 方法. STEM 方法涉及到的主要计算为概率分布双向稀疏化、内外轮廓图像提取以及 Tsallis 熵的计算, 其计算代价最大, 平均 CPU 耗时最多.

表 2 6 个自动分割方法的 CPU 耗时比较

分割方法	在合成图像上的CPU耗时 (s)		在真实世界图像上的CPU耗时 (s)	
	均值	标准偏差	均值	标准偏差
STEM	0.746	0.324	1.049	0.635
MGE	0.052	0.024	0.048	0.030
ATE	0.185	0.029	0.263	0.101
ITC	0.007	0.001	0.009	0.003
SDD	0.069	0.006	0.103	0.043
FRFCM	0.038	0.004	0.082	0.045

为了降低 STEM 方法的 CPU 耗时, 可以将确定最大 Tsallis 熵的目标分解成两个过程: 跃进式过程和逐步式过程. 在跃进式过程中, 对于待分割图像 f 的区间 $[t_{\min}, t_{\max}]$, 把第 2.4 小节算法 2 中步骤 3 的逐级处理调整为以步长 η 跃进式处理, 而计算 Tsallis 熵的其他步骤保持不变. 跃进式过程将输出一个灰度值 t_{temp}^* , 它对应于跃进式过程中的最大 Tsallis 熵. 逐步式过程将对区间 $[t_{\text{temp}}^* - \eta + 1, t_{\text{temp}}^* + \eta - 1]$ 内的灰度值逐级处理, 此时只需把算法 2 中步骤 3 的区间 $[t_{\min}, t_{\max}]$ 替换为区间 $[t_{\text{temp}}^* - \eta + 1, t_{\text{temp}}^* + \eta - 1]$, 而计算 Tsallis 熵的其他步骤保持不变. 逐步式过程将输出最终的分割阈值 t^* , 它对应于区间 $[t_{\text{temp}}^* - \eta + 1, t_{\text{temp}}^* + \eta - 1]$ 内的最大 Tsallis 熵.

从表 3 中可以观察到, 对 44 幅合成图像和 44 幅真实世界图像: ① 在步长 η 从 1 逐渐变化到 5 的过程中, STEM 方法的平均耗时持续减少, 同时, 它的平均 ME 值保持稳定; ② 在步长 η 从 5 变化到 10 的过程中, STEM 方法的平均耗时减少相对缓慢, 它的平均 ME 值却出现一定浮动. 对比表 2 可以发现: 当步长 η 取 4 或 5 时, STEM 方法在分割精度和计算效率方面取得很好的折衷, 既能保持 η 取 1 时的分割精度, 且计算效率较接近于 ATE 方法.

表 3 不同跳跃步长下 STEM 方法的 CPU 平均耗时和误分类率 ME

图像	步长 η	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
合成图像	平均耗时 (s)	0.746	0.436	0.342	0.296	0.269	0.254	0.243	0.235	0.232	0.229
	平均ME (%)	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.26	0.25	0.26
真实世界图像	平均耗时 (s)	1.049	0.659	0.536	0.473	0.442	0.419	0.407	0.399	0.394	0.391
	平均ME (%)	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	3.13	2.20	3.12	1.58	4.94

4 结 论

对直方图表现为单峰、双峰、多峰或者无峰模式的灰度图像, 当目标或背景的灰度分布可用高斯分布、伽马分布、极值分布、瑞利分布、均匀分布或者贝塔分布逼近时, 相对于 MGE, ATE, ITC, SDD 和 FRFCM 这 5 个分割方法而言, STEM 方法虽然在计算效率方面不占优势, 但它的分割适应能力更稳健, 其分割结果的总体精确度更高.

STEM 方法之所以具有更稳健的分割适应性和更高的分割精度, 主要得益于: ① 它对输入的灰度图像执行水平和垂直两个方向的多尺度卷积变换, 可将图像的单峰、双峰、多峰或无峰灰度分布统一转化为双向稀疏化概率分布; ② 它在双向稀疏化概率分布的基础上定义了一个二维 Tsallis 熵, 可以统一刻画二维随机变量的多样性及其概率分布特征, 从而自然规避多个随机变量需要相互独立的约束条件。

STEM 方法需要进行概率分布双向稀疏化以及内外轮廓图像提取, 这使得它在计算效率方面不及 MGE, ATE, ITC, SDD 和 FRFCM 方法。如何进一步提高 STEM 方法的计算效率, 值得继续探究。后续可以考虑将一些广义熵取代 STEM 方法采用的 Tsallis 熵, 此时, 广义熵参数的自动评估将值得深入研究。

References:

- [1] Lei B, Fan JL. Adaptive Kaniadakis entropy thresholding segmentation algorithm based on particle swarm optimization. *Soft Computing*, 2020, 24(10): 7305–7318. [doi: [10.1007/s00500-019-04351-2](https://doi.org/10.1007/s00500-019-04351-2)]
- [2] Nie FY, Zhang PF, Li JQ, Ding DH. A novel generalized entropy and its application in image thresholding. *Signal Processing*, 2017, 134: 23–34. [doi: [10.1016/j.sigpro.2016.11.004](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2016.11.004)]
- [3] Ramírez-Reyes A, Hernández-Montoya AR, Herrera-Corral G, Domínguez-Jiménez I. Determining the entropic index q of Tsallis entropy in images through redundancy. *Entropy*, 2016, 18(8): 299. [doi: [10.3390/e18080299](https://doi.org/10.3390/e18080299)]
- [4] Luo XP, Tian J. The ICM algorithm for multi level threshold selection by maximum entropy criterion. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2000, 11(3): 379–385 (in Chinese with English abstract). http://jos.org.cn/jos/article/abstract/20000314?st=article_issue [doi: [10.13328/j.cnki.jos.2000.03.014](https://doi.org/10.13328/j.cnki.jos.2000.03.014)]
- [5] Zhou DL, Pan Q, Zhang HC, Dai GZ. Maximum entropy thresholding algorithm. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2001, 12(9): 1420–1422 (in Chinese with English abstract). http://jos.org.cn/jos/article/abstract/20010922?st=article_issue [doi: [10.13328/j.cnki.jos.2001.09.022](https://doi.org/10.13328/j.cnki.jos.2001.09.022)]
- [6] Sezgin M, Sankur B. Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation. *Journal of Electronic Imaging*, 2004, 13(1): 146–165. [doi: [10.1117/1.1631315](https://doi.org/10.1117/1.1631315)]
- [7] Liu F, Guo YW, Yin KY. Shot boundary detection using adaptive threshold and Fourier fitting. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2012, 23(S2): 105–114 (in Chinese with English abstract).
- [8] Cao JN. Review on image segmentation based on entropy. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2012, 25(6): 958–971 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.3969/j.issn.1003-6059.2012.06.011](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-6059.2012.06.011)]
- [9] Wu YQ, Meng TL, Wu SH. Research progress of image thresholding methods in recent 20 years (1994–2014). *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2015, 30(1): 1–23 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.16337/j.1004-9037.2015.01.001](https://doi.org/10.16337/j.1004-9037.2015.01.001)]
- [10] Li ZH, Chen L, Zhang BC, Shi H, Long T. SAR image oil spill detection based on maximum entropy threshold segmentation. *Journal of Signal Processing*, 2019, 35(6): 1111–1117 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.16798/j.issn.1003-0530.2019.06.024](https://doi.org/10.16798/j.issn.1003-0530.2019.06.024)]
- [11] Tao WB, Jin H. A new image thresholding method based on graph spectral theory. *Chinese Journal of Computers*, 2007, 30(1): 110–119 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.3321/j.issn:0254-4164.2007.01.013](https://doi.org/10.3321/j.issn:0254-4164.2007.01.013)]
- [12] Kapur JN, Sahoo PK, Wong AKC. A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 1985, 29(3): 273–285. [doi: [10.1016/0734-189X\(85\)90125-2](https://doi.org/10.1016/0734-189X(85)90125-2)]
- [13] Sahoo PK, Wilkins C, Yeager J. Threshold selection using Rényi's entropy. *Pattern Recognition*, 1997, 30(1): 71–84. [doi: [10.1016/S0031-3203\(96\)00065-9](https://doi.org/10.1016/S0031-3203(96)00065-9)]
- [14] Sahoo PK, Arora G. A thresholding method based on two-dimensional Rényi's entropy. *Pattern Recognition*, 2004, 37(6): 1149–1161. [doi: [10.1016/j.patcog.2003.10.008](https://doi.org/10.1016/j.patcog.2003.10.008)]
- [15] Lei B, Fan JL. Self-adaptation preferences in one-dimensional Rényi entropy thresholding. *Acta Photonica Sinica*, 2009, 38(9): 2439–2443 (in Chinese with English abstract).
- [16] Zhang XM, Xue ZA, Zheng YB. Fast and precise two-dimensional Rényi entropy image thresholding. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2012, 25(3): 411–418 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.3969/j.issn.1003-6059.2012.03.008](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-6059.2012.03.008)]
- [17] de Albuquerque MP, Esquef IA, Mello ARG, de Albuquerque MP. Image thresholding using Tsallis entropy. *Pattern Recognition Letters*, 2004, 25(9): 1059–1065. [doi: [10.1016/j.patrec.2004.03.003](https://doi.org/10.1016/j.patrec.2004.03.003)]
- [18] Sahoo PK, Arora G. Image thresholding using two-dimensional Tsallis-Havrda-Charvát entropy. *Pattern Recognition Letters*, 2006, 27(6): 520–528. [doi: [10.1016/j.patrec.2005.09.017](https://doi.org/10.1016/j.patrec.2005.09.017)]
- [19] Lin QQ, Ou CJ. Tsallis entropy and the long-range correlation in image thresholding. *Signal Processing*, 2012, 92(12): 2931–2939. [doi: [10.1016/j.sigpro.2012.11.011](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2012.11.011)]

- [10.1016/j.sigpro.2012.05.025](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2012.05.025)]
- [20] Zhuo W, Cao ZG, Xiao Y. Image thresholding based on two-dimensional Arimoto entropy. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2009, 22(2): 208–213 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.3969/j.issn.1003-6059.2009.02.007](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-6059.2009.02.007)]
- [21] Zhang H. One-Dimensional Arimoto entropy threshold segmentation method based on parameters optimization. In: *Proc. of the Int'l Conf. on Applied Informatics and Communication*. Xi'an: Springer, 2011. 573–581. [doi: [10.1007/978-3-642-23226-8_74](https://doi.org/10.1007/978-3-642-23226-8_74)]
- [22] Wu YQ, Zhu L, Wu SH. Fast iterative algorithm for image threshold segmentation based on two-dimensional Arimoto gray entropy. *Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition)*, 2016, 44(5): 48–57 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.3969/j.issn.1000-565X.2016.05.008](https://doi.org/10.3969/j.issn.1000-565X.2016.05.008)]
- [23] Sparavigna AC. On the generalized additivity of Kaniadakis entropy. *International Journal of Sciences*, 2015, 4(2): 44–48. [doi: [10.18483/ijSci.627](https://doi.org/10.18483/ijSci.627)]
- [24] Nie FY, Li JQ, Zhang PF, Tu TY. Threshold segmentation method of complex image based on Kaniadakis entropy. *Laser & Infrared*, 2017, 47(8): 1040–1045 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.3969/j.issn.1001-5078.2017.08.022](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-5078.2017.08.022)]
- [25] Liu D, Jiang ZH, Feng HQ. A novel fuzzy classification entropy approach to image thresholding. *Pattern Recognition Letters*, 2006, 27(16): 1968–1975. [doi: [10.1016/j.patrec.2006.05.006](https://doi.org/10.1016/j.patrec.2006.05.006)]
- [26] Wang FB, Sun F, Wang F, Zhao RH, Lei JF, Wang X. Infrared polarization thermal image segmentation algorithm based on Tsallis entropy. *Infrared Technology*, 2020, 42(3): 245–256 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.3724/SP.J.7101182186](https://doi.org/10.3724/SP.J.7101182186)]
- [27] Lindeberg T. Scale-Space for discrete signals. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, 12(3): 234–254. [doi: [10.1109/34.49051](https://doi.org/10.1109/34.49051)]
- [28] Gonzalez RC, Woods RE. *Digital Image Processing*. 4th ed., New York: Pearson, 2018.
- [29] Walpole RE, Myers RH, Myers SL, Ye KY. *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*. 9th ed., New Jersey: Prentice Hall, 2011.
- [30] Sheng Z, Xie SQ, Pan CY. *Probability and Mathematics Statistics*. 4th ed., Beijing: Higher Education Press, 2008 (in Chinese).
- [31] Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 1988, 52(1–2): 479–487. [doi: [10.1007/BF01016429](https://doi.org/10.1007/BF01016429)]
- [32] Long JW, Shen XJ, Zang H, Chen HP. An adaptive thresholding algorithm by background estimation in Gaussian scale space. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(8): 1773–1782 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.3724/SP.J.1004.2014.01773](https://doi.org/10.3724/SP.J.1004.2014.01773)]
- [33] Fan JL, Lei B. Image thresholding segmentation method based on reciprocal rough entropy. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2020, 42(1): 214–221 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.11999/JEIT190559](https://doi.org/10.11999/JEIT190559)]
- [34] Jiang ST, Mu XW. ADE method of parameter selection in image thresholding based on generalized fuzzy entropy. *Computer Engineering and Applications*, 2018, 54(9): 183–188, 250 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.3778/j.issn.1002-8331.1612-0253](https://doi.org/10.3778/j.issn.1002-8331.1612-0253)]
- [35] Cai HM, Yang Z, Cao XH, Xia WM, Xu XY. A new iterative triclass thresholding technique in image segmentation. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2014, 23(3): 1038–1046. [doi: [10.1109/TIP.2014.2298981](https://doi.org/10.1109/TIP.2014.2298981)]
- [36] Wang ZZ. A new approach for segmentation and quantification of cells or nanoparticles. *IEEE Trans. on Industrial Informatics*, 2016, 12(3): 962–971. [doi: [10.1109/TII.2016.2542043](https://doi.org/10.1109/TII.2016.2542043)]
- [37] Lei T, Jia XH, Zhang YN, He LF, Meng HY, Nandi AK. Significantly fast and robust fuzzy C-means clustering algorithm based on morphological reconstruction and membership filtering. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2018, 26(5): 3027–3041. [doi: [10.1109/TFUZZ.2018.2796074](https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2018.2796074)]
- [38] Bemis R. Thresholding tool. <http://cn.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/6770-thresholding-tool9>

附中文参考文献:

- [4] 罗希平, 田捷. 用最大熵原则作多阈值选择的条件迭代算法. *软件学报*, 2000, 11(3): 379–385. http://jos.org.cn/jos/article/abstract/20000314?st=article_issue [doi: [10.13328/j.cnki.jos.2000.03.014](https://doi.org/10.13328/j.cnki.jos.2000.03.014)]
- [5] 周德龙, 潘泉, 张洪才, 戴冠中. 最大熵阈值处理算法. *软件学报*, 2001, 12(9): 1420–1422. http://jos.org.cn/jos/article/abstract/20010922?st=article_issue [doi: [10.13328/j.cnki.jos.2001.09.022](https://doi.org/10.13328/j.cnki.jos.2001.09.022)]
- [7] 刘烽, 郭延文, 殷昆燕. 基于自适应阈值和傅里叶拟合的镜头边界检测. *软件学报*, 2012, 23(S2): 105–114.
- [8] 曹建农. 图像分割的熵方法综述. *模式识别与人工智能*, 2012, 25(6): 958–971. [doi: [10.3969/j.issn.1003-6059.2012.06.011](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-6059.2012.06.011)]
- [9] 吴一全, 孟天亮, 吴诗姘. 图像阈值分割方法研究进展20年(1994-2014). *数据采集与处理*, 2015, 30(1): 1–23. [doi: [10.16337/j.1004-9037.2015.01.001](https://doi.org/10.16337/j.1004-9037.2015.01.001)]
- [10] 李致衡, 陈亮, 张博程, 师皓, 龙腾. 基于最大熵阈值分割的SAR图像溢油检测. *信号处理*, 2019, 35(6): 1111–1117. [doi: [10.16798/j.issn.1003-0530.2019.06.024](https://doi.org/10.16798/j.issn.1003-0530.2019.06.024)]

- [11] 陶文兵, 金海. 一种新的基于图谱理论的图像阈值分割方法. 计算机学报, 2007, 30(1): 110–119. [doi: [10.3321/j.issn:0254-4164.2007.01.013](https://doi.org/10.3321/j.issn:0254-4164.2007.01.013)]
- [15] 雷博, 范九伦. 一维Rényi熵阈值法中参数的自适应选取. 光子学报, 2009, 38(9): 2439–2443.
- [16] 张新明, 薛占熬, 郑延斌. 二维直方图准分的Rényi熵快速图像阈值分割. 模式识别与人工智能, 2012, 25(3): 411–418. [doi: [10.3969/j.issn.1003-6059.2012.03.008](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-6059.2012.03.008)]
- [20] 卓问, 曹治国, 肖阳. 基于二维Arimoto熵的阈值分割方法. 模式识别与人工智能, 2009, 22(2): 208–213. [doi: [10.3969/j.issn.1003-6059.2009.02.007](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-6059.2009.02.007)]
- [22] 吴一全, 朱丽, 吴诗姘. 基于二维Arimoto灰度熵的图像阈值分割快速迭代算法. 华南理工大学学报(自然科学版), 2016, 44(5): 48–57. [doi: [10.3969/j.issn.1000-565X.2016.05.008](https://doi.org/10.3969/j.issn.1000-565X.2016.05.008)]
- [24] 聂方彦, 李建奇, 张平凤, 屠添翼. 复杂图像的Kaniadakis熵阈值分割方法. 激光与红外, 2017, 47(8): 1040–1045. [doi: [10.3969/j.issn.1001-5078.2017.08.022](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-5078.2017.08.022)]
- [26] 汪方斌, 孙凡, 王峰, 赵汝海, 雷经发, 王雪. 基于Tsallis熵的红外偏振热像分割算法. 红外技术, 2020, 42(3): 245–256. [doi: [10.3724/SP.J.7101182186](https://doi.org/10.3724/SP.J.7101182186)]
- [30] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计. 第4版, 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [32] 龙建武, 申铨京, 臧慧, 陈海鹏. 高斯尺度空间下估计背景的自适应阈值分割算法. 自动化学报, 2014, 40(8): 1773–1782. [doi: [10.3724/SP.J.1004.2014.01773](https://doi.org/10.3724/SP.J.1004.2014.01773)]
- [33] 范九伦, 雷博. 倒数粗糙熵图像阈值化分割算法. 电子与信息学报, 2020, 42(1): 214–221. [doi: [10.11999/JEIT190559](https://doi.org/10.11999/JEIT190559)]
- [34] 姜圣涛, 穆学文. 广义模糊熵图像阈值分割参数选取的ADE方法. 计算机工程与应用, 2018, 54(9): 183–188, 250. [doi: [10.3778/j.issn.1002-8331.1612-0253](https://doi.org/10.3778/j.issn.1002-8331.1612-0253)]



邹耀斌(1978—), 男, 博士, 副教授, 主要研究领域为图像处理, 模式识别.



王俊英(1971—), 女, 博士, 教授, CCF 专业会员, 主要研究领域为模式识别, 人工智能, 智能决策.



张进玉(1997—), 女, 硕士生, 主要研究领域为图像处理, 模式识别.



龚国强(1976—), 男, 博士, 副教授, 主要研究领域为智能信息处理, 大数据处理.



臧兆祥(1985—), 男, 博士, 副教授, CCF 专业会员, 主要研究领域为机器学习, 图像处理, 进化计算.



孙水发(1977—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 高级会员, 主要研究领域为智能信息处理, 计算机视觉, 多媒体信息处理, 三维处理及可视化.



夏平(1967—), 男, 教授, CCF 专业会员, 主要研究领域为机器学习, 智能信息处理, 多尺度几何分析及其应用.