

局部各向异性的薄壳收缩变形^{*}

孙晓鹏^{1,2}, 何鑫¹, 王振燕¹, 李娇娇¹, 陈腾¹, 董雨¹



¹(辽宁师范大学 计算机与信息技术学院 计算机系统研究所, 辽宁 大连 116029)

²(智能通信软件与多媒体北京市重点实验室(北京邮电大学), 北京 100876)

通讯作者: 孙晓鹏, E-mail: Cadcg2008@hotmail.com

摘要: 基于位置动力学提出局部各向异性的薄壳收缩变形方法. 首先针对基于位置动力学变形模拟方法的材质局限性的不足, 提出薄壳收缩变形的弹性变形能, 实现了多材质的弹性收缩变形. 其次, 针对薄壳收缩变形过程中的抖动问题, 给出适当的弯曲能系数, 实现了稳定的收缩变形. 第三, 针对薄壳局部类球面结构收缩变形缓慢且细微的不足, 定义了局部各向异性 ARAP 变形能等, 实现了薄壳局部类球面结构的快速、显著、稳定的收缩变形. 最后以轴向平行包围盒与非渗透滤波器作为碰撞检测的预处理, 剔除不可能发生碰撞的图元对, 提高了收缩变形过程中的碰撞检测效率. 相关实验结果表明, 提出的薄壳收缩变形算法适用于多种材质模型以及多种各向异性能量, 且有效地解决了抖动及局部类球面结构收缩变形缓慢且不显著等问题.

关键词: 收缩变形; 薄壳变形; 类球面结构; 各向异性能量

中图法分类号: TP391

中文引用格式: 孙晓鹏, 何鑫, 王振燕, 李娇娇, 陈腾, 董雨. 局部各向异性的薄壳收缩变形. 软件学报, 2020, 31(10): 3280-3294. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/6060.htm>

英文引用格式: Sun XP, He X, Wang ZY, Li JJ, Chen T, Dong Y. Local anisotropic contraction deformation of thin shell. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2020, 31(10): 3280-3294 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/6060.htm>

Local Anisotropic Contraction Deformation of Thin Shell

SUN Xiao-Peng^{1,2}, HE Xin¹, WANG Zhen-Yan¹, LI Jiao-Jiao¹, CHEN Teng¹, DONG Yu¹

¹(Institute of Computer System, School of Computer and Information Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

²(Beijing Key Laboratory of Intelligent Telecommunications Software and Multimedia (Beijing University of Posts and Telecommunications), Beijing 100876, China)

Abstract: A novel algorithm is proposed for local anisotropic contraction deformation on thin shell using the framework of position-based dynamics. Firstly, a new elastic deformation energy of thin shell is presented to address the material limitation of position-based dynamics, and get desired elastic contraction deformation on a variety of materials. Secondly, a stable contraction deformation is abstained without jittering by giving a proper coefficient of bending energy. Thirdly, a local anisotropic ARAP deformation energy is defined to produce a rapid and stable invagination on the area of the local spherical structures where the deformation is slow and slight. Finally, the axis-aligned bounding box and the non-penetration filters are used as a preprocess stage in order to cull the primitive pairs that are impossible to collide, to accelerate the speed of collision detection. The experimental results demonstrate that, the proposed method supports many different types of materials and local anisotropic energies, and can work with the problems of jittering and the slight deformation on local spherical structures.

Key words: contraction deformation; thin shell deformation; spherical structures; anisotropic energies

三维物体的变形模拟广泛应用于游戏动画、影视特效等领域^[1]. 以四面体素^[2]描述三维物体的变形方法复

* 基金项目: 国家自然科学基金(61472170); 北京邮电大学智能通信与多媒体北京市重点实验室开放课题(ITSM201301)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (61472170); Beijing Key Laboratory of Intelligent Telecommunications Software and Multimedia (Beijing University of Posts and Telecommunications) (ITSM201301)

收稿时间: 2020-03-01; 修改时间: 2020-04-05; 采用时间: 2020-04-27

杂度较高、计算量较大;以三维曲面网格模型^[3]描述物体变形时,往往忽略了网格曲面的厚度,以至其厚度远远小于其长宽尺寸.三维物体表面网格往往呈曲面状,常规薄板变形算法无法适用^[4],本文将物体三维曲面网格视为薄壳,进而基于薄壳受力的物理过程,实现三维曲面网格模型的收缩变形过程模拟.

虚拟现实和动画设计的变形过程,往往只关注视觉效果,不予深究变形的物理学合理性.本文基于位置动力学实现薄壳收缩变形,具有更高的合理性.基于位置动力学模拟薄壳收缩变形过程速度快、可控性强^[5],但适用材质模型具有较大的局限性^[6];且在收缩变形前后,具有类球面结构(如动物头部)的局部变形较慢且不显著.

据此,本文提出基于本构模型的弹性收缩变形能,以改善材质局限性问题;同时提出局部各向异性的收缩变形能,以改进薄壳收缩前后局部类球结构变形较弱的问题.另外,本文还给出了适当的弯曲系数,以消除弯曲变形过程中的抖动问题;并构造碰撞检测预处理,提高了收缩变形过程中的碰撞检测效率.

1 相关工作

薄壳模拟的方法有基于力的方法、基于位置动力学方法等^[7].基于力的方法首先计算内力和外力,以牛顿第二定律计算加速度,使用隐式积分法、隐式中点法等^[8]积分加速度得到速度,积分速度得到位置,计算量大,稳定性低.基于位置动力学方法省略了速度层,直接计算位移修正量以更新位置,本文基于位置动力学模拟薄壳收缩变形,速度快,可控性强^[5].

基于本构模型可有效模拟物体变形过程中的物理性质,不同材质的本构模型不同^[9],常见材质有 Corotated 线性弹性材质、线性弹性材质、Saint Venant-Kirchhoff 材质^[9]、Mooney-Rivlin 材质等^[10].位置动力学方法常用于模拟布料、弹性棒、三维实体、流体等^[11-14].该方法在材质模型选择上具有较大的局限性,难以应用于常见的材质模型^[6].2011年,Diziol 等人基于 Shape matching 方法模拟薄壳变形,该方法仅考虑了几何特征,无法模拟材质模型^[15].2014年,Bender 等人基于位置动力学框架,基于四面体素表示的三维模型模拟三维柔体的变形,计算量较大^[13].本文在 Bender 工作的基础上,以离散三角网格代替四面体素模型,基于 Saint Venant-Kirchhoff 材质的本构模型^[9]定义弹性变形能,实现适用于多种材质模型^[9,10]的薄壳变形模拟.

各向同性能量在物理模拟中应用广泛,但基于各向同性能量难以模拟三维物体沿特定方向的变形(如伸展变形或生长模拟等)^[16,17].相比之下,基于各向异性能量的变形模拟真实感较高.2019年,Kim 等人基于各向异性能量模拟肌肉及绳索等物体沿指定方向的拉伸变形^[18].本文基于位置动力学,针对局部类球结构变形缓慢且不显著的问题,局部添加各向异性变形能量,以实现局部各向异性的薄壳收缩变形,并有效地改进了局部类球结构的变形效果,该方法适用于各向异性 ARAP 能量、各向异性 StVK 能量、各向异性 Sqrt 能量^[18]等多种各向异性能量.

快速、精确的碰撞检测是物理模拟的关键^[19],碰撞检测可分为离散碰撞检测(DCD)和连续碰撞检测(CCD)两类.本文采用连续碰撞检测,以轴向平行包围盒^[20]和非渗透滤波器^[21]作为预处理,剔除不可能碰撞的图元对,提高计算效率,然后以 Bridson 方法^[22]来检测碰撞.

本文基于位置动力学的收缩变形模拟分为 3 个步骤:第 1 步基于外部压力模型和时间积分法预测顶点位置,得到预测模型,预测模型中存在过度面内拉伸和面外弯曲(如图 1(b)所示);第 2 步基于弹性变形能、弯曲变形能和局部各向异性变形能的定义,构建约束函数组,迭代计算位移修正量,并更新顶点位置;第 3 步基于顶点位置变化信息更新速度.本文在收缩变形算法的流程中,在不同的力和变形能量作用下的变形效果如图 1 所示.

本文第 2 节介绍外部压力模型.第 3 节介绍薄壳变形能.第 4 节介绍碰撞检测.第 5 节给出算法流程.第 6 节分析实验结果.第 7 节总结全文.

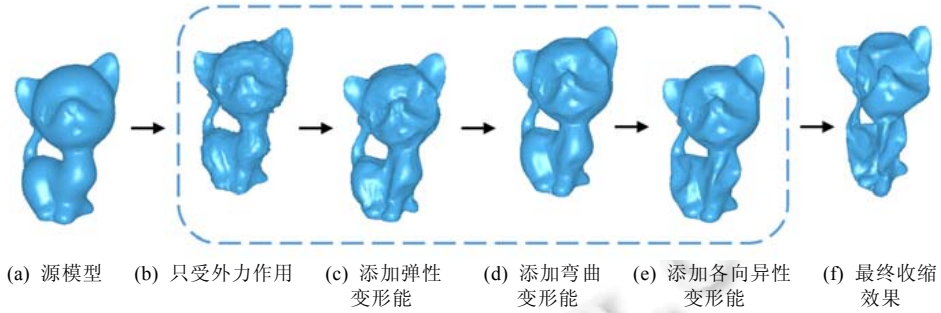


Fig.1 The pipeline of contraction deformation algorithm

图 1 本文收缩变形算法流程

2 外部压力模型

记薄壳模型 $M=\{V,E,F\}$ 为封闭离散三角面片网格,其中, V 、 E 、 F 分别为顶点集、边集、面片集.记顶点位置集合为 $\mathbf{x}=\{\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n\}$,其中, n 为顶点数量, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$ 为顶点 i 的位置坐标.记顶点 i 的参数坐标为 $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^2$.三角面片顶点按逆时针方向排序.

设薄壳模型 M 受外部空气压力收缩变形,空气压强记为 P ,顶点 i 所受外部压力为

$$\mathbf{f}_{pi} = -P\mathbf{n}_i \sum_{f_j \in aF_i} w_{ij}A_j,$$

其中, A_j 为面 f_j 的面积, $w_{ij}=1/3$, aF_i 为顶点 i 的 1-ring 邻域三角面片集合, \mathbf{n}_i 为顶点单位法向量.

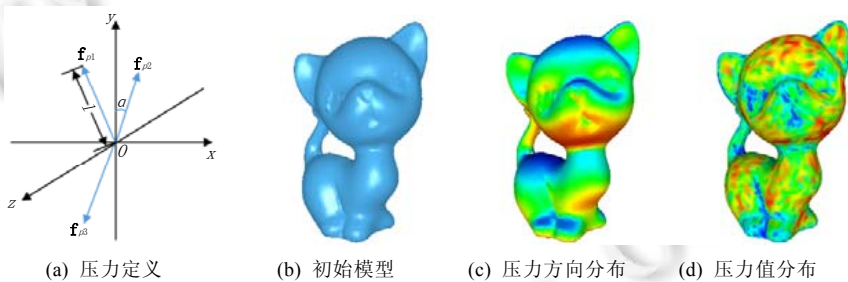


Fig.2 Pressure force distribution of initial model

图 2 初始模型压力分布

如图 2(a)所示, \mathbf{f}_{p1} 、 \mathbf{f}_{p2} 、 \mathbf{f}_{p3} 为随机 3 个点所受外部压力,定义外部压力方向与 y 轴正向夹角为 α , $l=|\mathbf{f}_{pi}|$ ($i \in 1, 2, \dots, n$) 为压力值,则初始模型所受外部压力的方向分布如图 2(c)所示,红色表示 $\cos\alpha$ 趋近于 1,蓝色表示 $\cos\alpha$ 趋近于 -1;初始模型压力值分布如图 2(d)所示,红色表示压力值较大,蓝色表示压力值较小.

3 收缩变形能

本节详细介绍基于位置动力学变形模拟方法第 2 步的各种变形能定义:定义弹性变形能 E_S 以抵抗模型变形过程中产生的面内拉伸,定义弯曲变形能 E_B 以抵抗模型变形过程中产生的面外弯曲,定义各向异性变形能 E_A 使模型向其内部凹陷.本文第 5 节将基于 E_S 、 E_B 和 E_A 的定义构建约束函数组,迭代计算位移修正量,并更新顶点位置.

3.1 弹性变形能

本节基于 Saint Venant-Kirchhoff 材质的本构模型^[9]定义薄壳收缩变形的弹性变形能 E_S .

对于任意三角面片 $f_j \in F$,设顶点序号为 j_1, j_2, j_3 .定义 $\mathbf{D}_m=[\mathbf{X}_{j1}-\mathbf{X}_{j3} \ \mathbf{X}_{j2}-\mathbf{X}_{j3}]$, $\mathbf{D}_s=[\mathbf{x}_{j1}-\mathbf{x}_{j3} \ \mathbf{x}_{j2}-\mathbf{x}_{j3}]$,记 f_j 变形梯度

为 $\mathbf{F} = \mathbf{D}_s \mathbf{D}_m^{-1} \in \mathbf{R}^{3 \times 2}$, 其应变能可定义为^[13]

$$E = A_j \Psi(\mathbf{F}),$$

其中, A_j 为三角面片 f_j 的面积, $\Psi(\mathbf{F})$ 为能量密度场, 则面 f_j 这 3 个顶点的应变能梯度分别记为

$$\left[\frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}_{j1}} \quad \frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}_{j2}} \right] = A_j \mathbf{P}(\mathbf{F}) \mathbf{D}_m^{-T}, \quad \frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}_{j3}} = -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}_{ji}} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{P}(\mathbf{F})$ 为 $\Psi(\mathbf{F})$ 的 1st Piola-Kirchhoff 应力张量.

基于变形梯度 \mathbf{F} 计算面 f_j 的二维变形梯度 $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{p} \mathbf{F} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$, 其中, \mathbf{p} 为投影矩阵^[23], 则格林应变张量为 $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I})$, Saint Venant-Kirchhoff 模型应变能量密度场 Ψ_s 和 1st Piola-Kirchhoff 应力张量 $\mathbf{P}(\bar{\mathbf{F}})$ 分别记为

$$\Psi_s = \mu \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_F^2 + \frac{\lambda}{2} \text{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \mathbf{P}(\bar{\mathbf{F}}) = \bar{\mathbf{F}} [2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}],$$

其中, μ 和 λ 为 Lamé 系数, $\|\cdot\|_F$ 为 Frobenius 范数, $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹, 则薄壳模型 M 的弹性变形能 E_s 可记为

$$E_s = \int_{\Omega} \Psi_s d\mathbf{X} \quad (2)$$

根据公式(1)计算每个顶点的二维空间能量梯度, 并基于 \mathbf{p} 将能量梯度映射到三维空间, 得到顶点三维空间能量梯度 $\frac{\partial E_s}{\partial \mathbf{x}_{ji}} (i \in 1, 2, 3)$.

3.2 弯曲变形能

本节基于 Bender 等离散等距弯曲模型^[13,24], 定义薄壳模型 M 变形过程中的弯曲变形能 E_B , 以阻止模型收缩变形过程中产生过度的面外弯曲, 驱动模型恢复初始状态.

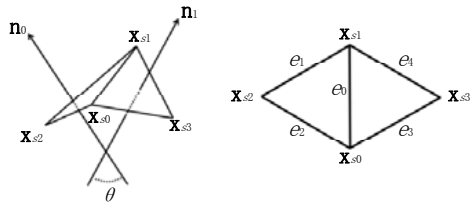


Fig.3 The geometry structure of a stencil

图 3 模板 s 的结构

对于边 $e_i \in E$ 及其两个邻接三角面片, 其 4 个顶点的集合记为 $\mathbf{x}_s = \{\mathbf{x}_{s0}, \mathbf{x}_{s1}, \mathbf{x}_{s2}, \mathbf{x}_{s3}\}$ 、5 条边的集合记为 $e_s = \{\mathbf{x}_{s0}\mathbf{x}_{s1}, \mathbf{x}_{s1}\mathbf{x}_{s2}, \mathbf{x}_{s2}\mathbf{x}_{s0}, \mathbf{x}_{s0}\mathbf{x}_{s3}, \mathbf{x}_{s3}\mathbf{x}_{s1}\}$, 则模板 s 的定义如图 3 所示, 其中, 两个邻接三角面片的法向量分别记为 \mathbf{n}_0 和 \mathbf{n}_1 , 其夹角为 θ , 则模板 s 的弯曲变形能定义为

$$E_B(\mathbf{x}_s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathbf{Q}_{i,j}^s \mathbf{x}_{si}^T \mathbf{x}_{sj} \quad (3)$$

这里, $\mathbf{Q}^s = \frac{3}{A_0 + A_1} \mathbf{K}^T \mathbf{K}$, A_0 和 A_1 分别为边 e_i 的两个邻接三角面片的面积, 其中, 行向量 \mathbf{K} 定义为 $(c_{01} + c_{04}, c_{02} + c_{03},$

$-c_{01} - c_{02}, -c_{03} - c_{04})$, 其中, $c_{ab} = \cot \angle(e_a, e_b)$, 则顶点 si 上的弯曲变形能梯度可定义为

$$\frac{\partial E_B}{\partial \mathbf{x}_{si}} = \sum_j \mathbf{Q}_{i,j}^s \mathbf{x}_{sj}$$

图 4 展示模板变形过程中呈现的不同状态, 设模板初始结构为黑色, 无弯曲变形能 E_B 实施变形后结构为紫色, 定义初始面片夹角为 β^0 . 添加 E_B 后, 紫色模板受 E_B 影响具有恢复初始结构的运动趋势, 若 E_B 过大, 模板会发生过度抗弯曲现象以抵抗收缩(如蓝色模板所示), 使模型产生抖动. 理想模板运动范围应位于紫色模板和黑色模板之间(如绿色模板所示).

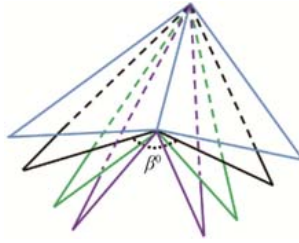


Fig.4 Different states of a stencil during deformation

图4 模板变形过程中的不同状态

本文定义弯曲系数 k_B , 以 $k_B E_B$ 取代 E_B 来控制弯曲变形能. 当 k_B 为 1 时, 弯曲变形能较大, 模型变形过程出现细微抖动. k_B 为 10^{-2} 时弯曲变形能较小, 变形效果较为理想 (如第 6 节中图 16~图 17 所示), 且有效地解决了模型弯曲变形过程中的抖动问题 (如第 6 节中图 18 所示).

3.3 局部各向异性 ARAP 变形能

图 5 展示了模型仅在弹性变形能 E_S 和弯曲变形能 E_B 作用下的变形效果, 图 5(a) 所示为初始模型, 图 5(b)~图 5(e) 分别为模型变形 50 帧、100 帧、150 帧、200 帧效果图. 显然, 在模型变形过程中, 对于薄壳曲面网格的局部类球结构 (如红框区域所示), 在各向同性能量作用下, 局部曲面结构较为稳定, 难以快速产生显著的收缩变形.

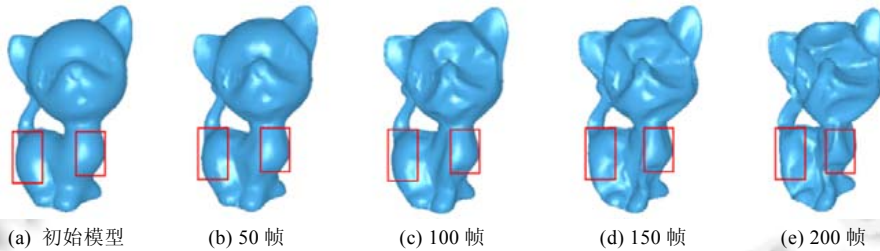
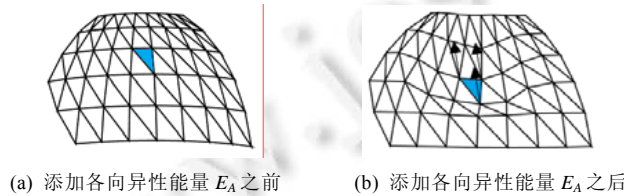


Fig.5 Deformation effects after adding elastic energy and bending energy

图5 仅添加弹性变形能和弯曲变形能的变形效果

本文通过为局部类球结构添加各向异性变形能解决此问题. 如图 6 所示, 图 6(a) 为类球曲面, 在其局部区域内选择三角面片 (如图 6 蓝色区域所示), 定义其局部各向异性 ARAP 变形能量 E_A , 使该三角面片所在局部类球结构及邻近区域产生显著的内部收缩凹陷变形趋势 (如图 6(b) 所示箭头为顶点梯度方向).



(a) 添加各向异性能量 E_A 之前 (b) 添加各向异性能量 E_A 之后

Fig.6 The comparison of deformation before and after the addition of anisotropic energy on the spherical structure

图6 局部类球结构添加各向异性能量前后变形对比

本节各向异性 ARAP 收缩变形能 E_A 定义如下.

对三角面片 f_j 的二维变形梯度 $\bar{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 进行奇异值分解, 可得 $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T$, 其中, $\boldsymbol{\Sigma}$ 为对角矩阵, $\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{V}^T$ 为旋转矩阵, 令拉伸张量 $\mathbf{S} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T$, 则各向异性常量 I_4 和 I_5 定义为^[18]

$$I_4 = \mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a} = \text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{R}^T \bar{\mathbf{F}} \mathbf{A}), \quad I_5 = \|\bar{\mathbf{F}} \mathbf{a}\|_2^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{a} = \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{A}),$$

其中, $\mathbf{C} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$, $\mathbf{A} = \mathbf{a} \mathbf{a}^T$, \mathbf{a} 为各向异性向量.

本文定义 $\mathbf{f} = \mathbf{p}^T \mathbf{p} \mathbf{F}$, $\mathbf{c} = \mathbf{f}^T \mathbf{f}$, $\mathbf{r} = \mathbf{p}^T \mathbf{R}$, 并重新定义各向异性常量 i_4 和 i_5 如下:

$$i_4 = \text{tr}(\mathbf{r}^T \mathbf{f} \mathbf{A}), i_5 = \text{tr}(\mathbf{c} \mathbf{A}),$$

则各向异性 ARAP 能量密度场 Ψ_{ARAP} 及 1st Piola-Kirchhoff 应力张量 $\mathbf{P}(\mathbf{f}) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ 为

$$\Psi_{\text{ARAP}} = \mu/2 \left(\sqrt{i_5} - \text{Sign}(i_4) \right)^2, \mathbf{P}(\mathbf{f}) = \frac{\partial \Psi_{\text{ARAP}}}{\partial \mathbf{f}} = \mu \left(1 - \frac{\text{Sign}(i_4)}{\sqrt{i_5}} \right) \mathbf{f} \mathbf{A},$$

其中, $\text{Sign}(\cdot)$ 为符号函数. 进而, 本文各向异性 ARAP 变形能量定义为

$$E_A = \int_{\Gamma} \Psi_{\text{ARAP}} d\mathbf{X} \tag{4}$$

记三角面片 f_j 的 3 个顶点能量梯度 $\frac{\partial E_A}{\partial \mathbf{x}_{ji}} (i \in \{1, 2, 3\})$. 为使模型向内凹陷, 本文以新的梯度方向 $\frac{\partial \tilde{E}_A}{\partial \mathbf{x}_{ji}} = \frac{\partial E_A}{\partial \mathbf{x}_{ji}} + k_A \mathbf{n}_j$

代替 $\frac{\partial E_A}{\partial \mathbf{x}_{ji}}$, 其中, \mathbf{n}_j 为面 f_j 的法向量, k_A 为常量.

4 碰撞检测

针对薄壳收缩变形过程中发生的顶点与三角面片、边与边之间的自碰撞问题, 本节采用连续碰撞检测, 即检测模型中任意点和面(点-面图元对), 或任意两条边(边-边图元对), 在某一特定的时间步长内有无自相交. 2002 年 Bridson 等人^[22]以求解 3 次多项式的方法检测点-面碰撞和边-边碰撞. 考虑三维模型在某一时间步长内, 任意点和面、任意两条边都可能发生碰撞, 在每一时间步长内求解 3 次多项式计算效率过低.

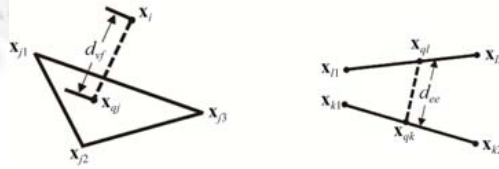


Fig. 7 The vertex-triangle collision(left) and the edge-edge collision(right)

图 7 点-面碰撞(左)、与边-边碰撞(右)

为提高计算效率, 本节首先采用轴向平行包围盒^[20]与非渗透滤波器^[21]等碰撞剔除算法作为预处理, 剔除不可能发生碰撞的图元对, 降低误报率, 然后采用 Bridson 方法检测碰撞. 如图 7 图元对碰撞所示, 首先定义阈值 τ .

当点 i 与面 f_j 的距离 d_{vf} 小于 τ 时(如图 7 左图所示), 点 i 将与面 f_j 内的点 q_j 发生碰撞, 点 i 的位置为 \mathbf{x}_i , 点 q_j 的位置为 $\mathbf{x}_{qj} = \alpha_{j1} \mathbf{x}_{j1} + \alpha_{j2} \mathbf{x}_{j2} + \alpha_{j3} \mathbf{x}_{j3}$, 其中, \mathbf{x}_{j1} 、 \mathbf{x}_{j2} 、 \mathbf{x}_{j3} 为面 f_j 的 3 个顶点的位置, α_{j1} 、 α_{j2} 、 α_{j3} 为面 f_j 这 3 个顶点的权值, 且 $\alpha_{j1} + \alpha_{j2} + \alpha_{j3} = 1$.

当边 e_l 与边 e_k 的距离 d_{ee} 小于 τ 时(如图 7 右图所示), 边 e_l 上一点 q_l 将与边 e_k 上一点 q_k 发生碰撞, 点 q_l 位置为 $\mathbf{x}_{ql} = \alpha_{l1} \mathbf{x}_{l1} + \alpha_{l2} \mathbf{x}_{l2}$, 其中, \mathbf{x}_{l1} 和 \mathbf{x}_{l2} 分别为边 e_l 的两个端点位置, α_{l1} 和 α_{l2} 分别为边 e_l 的两个端点权值, $\alpha_{l1} + \alpha_{l2} = 1$; 点 q_k 的位置为 $\mathbf{x}_{qk} = \alpha_{k1} \mathbf{x}_{k1} + \alpha_{k2} \mathbf{x}_{k2}$, 其中, \mathbf{x}_{k1} 和 \mathbf{x}_{k2} 分别为边 e_k 的两个端点位置, α_{k1} 和 α_{k2} 为边 e_k 的两个端点权值, $\alpha_{k1} + \alpha_{k2} = 1$.

检测到发生碰撞的图元对后, 分别定义点-面碰撞的约束函数和边-边碰撞的约束函数. 若点 i 和面 f_j 发生碰撞, 定义 $C_{vf} = |\mathbf{x}_i - (\alpha_{j1} \mathbf{x}_{j1} + \alpha_{j2} \mathbf{x}_{j2} + \alpha_{j3} \mathbf{x}_{j3})| - \delta$; 若边 e_l 和边 e_k 发生碰撞, 则定义 $C_{ee} = |(\alpha_{l1} \mathbf{x}_{l1} + \alpha_{l2} \mathbf{x}_{l2}) - (\alpha_{k1} \mathbf{x}_{k1} + \alpha_{k2} \mathbf{x}_{k2})| - \delta$, 其中, $\delta = 10^{-4}$.

5 算法流程

本节基于第 3 节弹性变形能 E_S 、弯曲变形能 E_B 和局部各向异性变形能 E_A 的定义, 构造约束函数组, 并给出完整的局部各向异性薄壳收缩变形算法流程如下.

首先, 指定各向异性变形能 E_A 局部作用区域, 只考虑模型所受外部压力, 基于 Symplectic 欧拉法^[5]计算每个顶点的预测位置 $\mathbf{p} = \{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$.

其次,以预测位置 $\mathbf{p}=\{\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_n\}$ 更新顶点位置 $\mathbf{x}=\{\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n\}$,即顶点位置 $\mathbf{x}=\mathbf{p}$.构造 $E(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})$ 的一阶泰勒展开式 $E(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})\approx E(\mathbf{x})+\nabla_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x})\cdot\Delta\mathbf{x}=0$,其中, $E(\cdot)$ 为能量函数,包括弹性变形能 E_S 、弯曲变形能 E_B 以及各向异性变形能 E_A ,总能量为 3 种能量之和.计算各项点位移修正量 $\Delta\mathbf{x}=[\Delta\mathbf{x}_1,\Delta\mathbf{x}_2,\dots,\Delta\mathbf{x}_n]$,使 $E(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})=0$.顶点位移修正量应满足所有能量函数(设共有 N 个能量函数),需求解线性系统^[5]:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} E_1(\mathbf{x}) \cdot \Delta\mathbf{x} &= -E_1(\mathbf{x}) \\ &\dots \\ \nabla_{\mathbf{x}} E_N(\mathbf{x}) \cdot \Delta\mathbf{x} &= -E_N(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5)$$

本文基于位置动力学方法,以非线性高斯-赛德尔方法^[5]求解式(5)约束函数,计算 $\Delta\mathbf{x}$,并以 $\Delta\mathbf{x}$ 更新顶点位置.最后,碰撞检测.检测发生碰撞的图元对,计算顶点位移修正量 $\Delta\mathbf{x}$,使 $C_{vf}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})\geq 0, C_{ee}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})\geq 0$,更新顶点位置^[5].

设模型初始体积为 V_0 ,变形后体积为 V' ,则体积比 $r=V'/V_0$.定义阈值 ε ,当前时刻 t 顶点位置的集合为 \mathbf{x}' ,时间步长为 Δt ,则每一帧薄壳变形算法流程描述如下.

输入:当前时刻顶点位置集合 \mathbf{x}' ;

输出:下一时刻顶点位置集合 \mathbf{x}^{t+1} .

Step 1. 仅考虑外部压力,以 Symplectic 欧拉法计算顶点预测位置 \mathbf{p}^{t+1} ;

Step 2. 更新顶点位置 $\mathbf{x}^{t+1}\leftarrow\mathbf{p}^{t+1}$,基于公式(2)~公式(4)给出的 E_S 、 E_B 和 E_A 构建线性系统(5);

Step 3. 以非线性高斯-赛德尔方法迭代求解线性系统,计算顶点位移修正量 $\Delta\mathbf{x}$,更新顶点位置 $\mathbf{x}^{t+1}\leftarrow\mathbf{x}^{t+1}+\Delta\mathbf{x}$,迭代 5 次可得到较为精确的结果;

Step 4. 检测碰撞,若发生自碰撞,则计算新的顶点位置,使 $C_{vf}\geq 0, C_{ee}\geq 0$;

Step 5. 更新顶点位置,计算体积比 r ,若 r 小于 ε ,则变形终止;

Step 6. 更新顶点速度 $\mathbf{v}^{t+1}\leftarrow(\mathbf{x}^{t+1}-\mathbf{x}')/\Delta t$;

Step 7. 更新时间 $t\leftarrow t+\Delta t$,跳转 Step 1,计算下一时刻顶点位置.

6 实验结果与分析

本文的实验环境为 Inter(R) Core(TM) i7 处理器,主频 3.4GHz,内存 32GB,PC,操作系统为 64 位 Windows. 编程语言环境为 Microsoft Visual Studio 2010 C++.

6.1 部分收缩变形实验结果

图 8 为变形至 100 帧时,分别添加弹性变形能 E_S 、 E_S +弯曲变形能 $E_B(k_B=1)$ 、 $E_S+E_B(k_B=10^{-2})$ 、 E_S+E_B +各向异性变形能 E_A 的情况下对应变形结果、平均曲率分布和能量分布.其中,红色区域能量较高,蓝色区域能量较低;红色区域曲率值较大,蓝色区域曲率值较小.

首先,从图 8(a)可以看出,显然,在弹性变形能 E_S 较高的区域,模型变形显著;弹性变形能 E_S 较低,模型变形较弱.

其次,对比图 8(a)和图 8(c)可以发现,图 8(a)无弯曲变形能 E_B ,红框区域被过度拉伸,平均曲率分布不均匀,说明模型变形效果较粗糙;图 8(c)添加弯曲变形能 E_B 后,红框区域平均曲率分布较均匀,模型表面较光滑,收缩变形效果较好,无过度拉伸.对比图 8(b)和图 8(c),当弯曲变形能 E_B 的系数 $k_B=1$ 时,图 8(b)中模型无明显收缩,抗弯曲现象较强,当弯曲变形能 E_B 的系数 $k_B=10^{-2}$ 时,图 8(c)中模型发生较好的收缩变形.

最后,对比图 8(c)和图 8(d),显然,在添加各向异性变形能 E_A 之后,红框区域内局部类球结构变形较显著;对比图 8(a)、图 8(c)和图 8(d)红框区域内平均曲率分布可见,在加入 E_A 后,红框区域内产生了显著的凹陷变形;对比图 8(a)、图 8(c)和图 8(d)红框区域内能量分布可见,在加入 E_A 后,红框区域内能量分布发生了明显变化,该区域内局部类球结构消失.显然,在添加 E_A 后,红框内的局部类球结构收缩变形较添加 E_A 前更为显著,局部类球结构变形幅度更为明显.针对各向同性能量作用下薄壳局部类球结构收缩变形缓慢且不显著的不足,各向异性变形能 E_A 能够使局部类球结构及邻近区域快速产生显著变形.

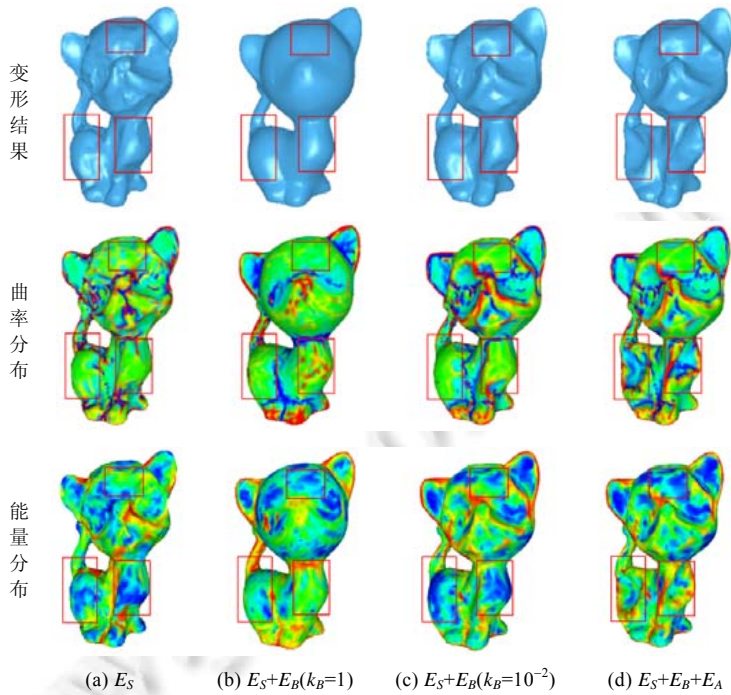


Fig.8 The comparison of deformation effects before and after adding energies

图 8 添加变形能前后变形效果对比

图 9 所示为部分模型的收缩变形过程,图 9(a)所示为初始模型,图 9(b)~图 9(e)所示分别为第 50 帧、第 100 帧、第 150 帧和第 200 帧的收缩变形效果.显然,本文方法能够有效地解决薄壳模型局部类球结构收缩变形缓慢、变形细微的不足.

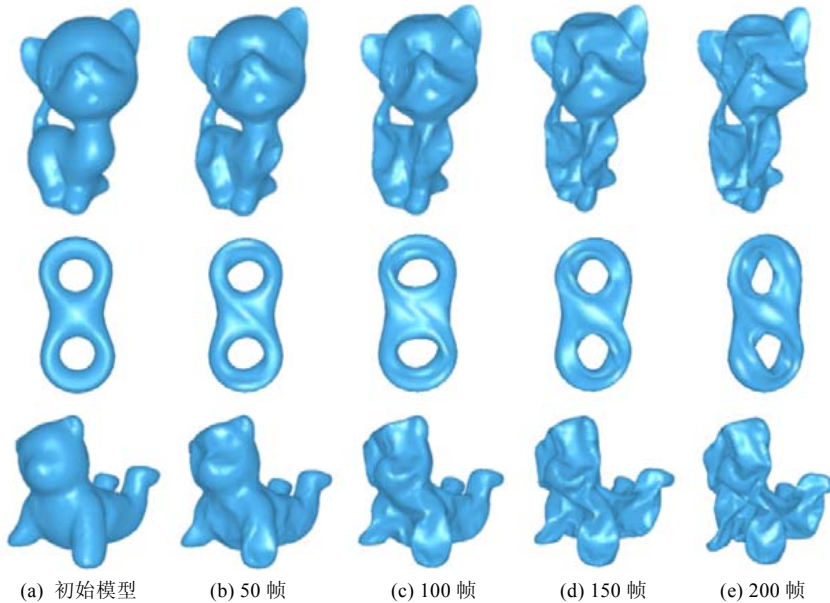


Fig.9 The procedure of contraction deformation

图 9 部分薄壳模型收缩变形过程

更多薄壳模型收缩变形效果如图 10 所示,自左至右,分别为压力值分布、初始模型、变形后模型、初始模型平均曲率分布、变形后模型平均曲率分布、初始模型高斯曲率分布、变形后模型高斯曲率分布,红色曲率值较大,蓝色曲率值较小,从平均曲率和高斯曲率的变化可以看出,在本文算法驱动下,薄壳模型局部类球结构发生快速收缩变形且形变较为显著。

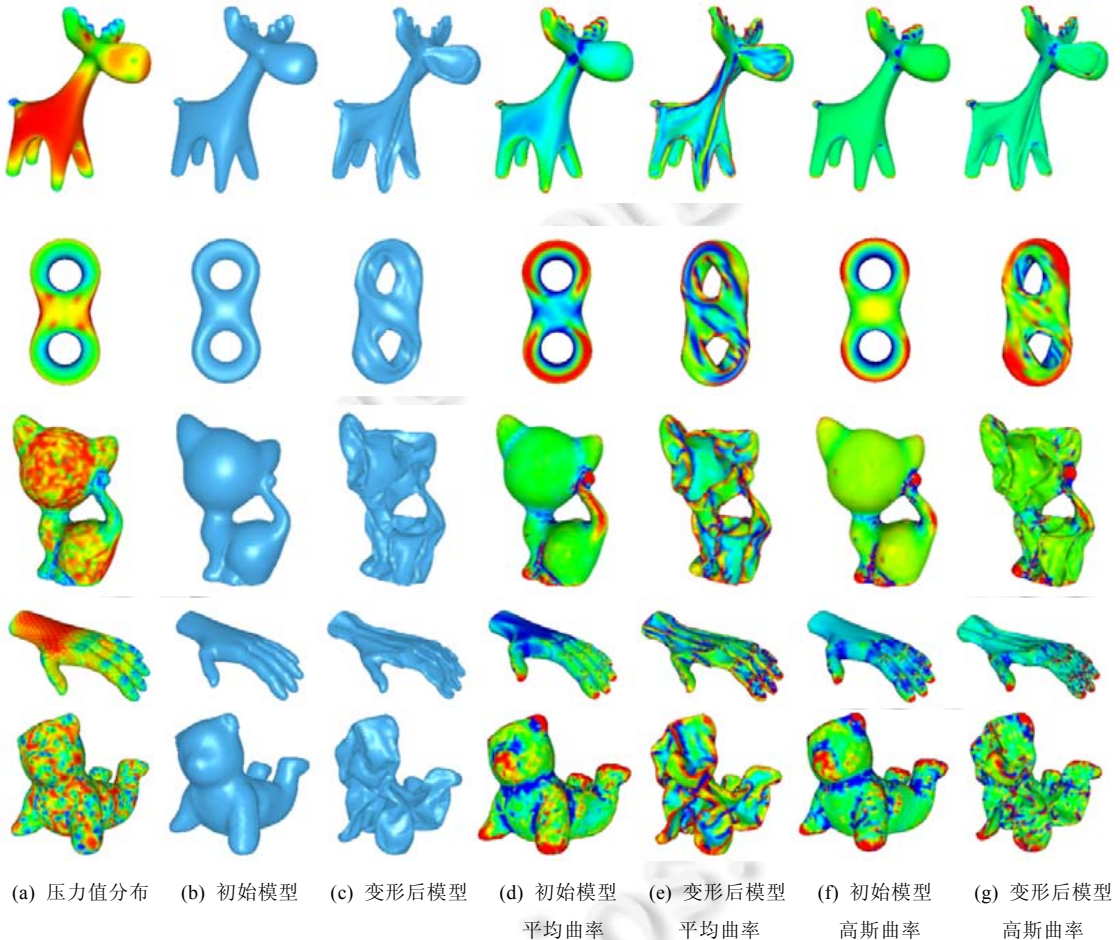


Fig.10 Contraction deformation results of different thin shells

图 10 不同薄壳模型收缩变形的效果

6.2 材质适用性与稳定性

在弹性变形能 E_S 作用下的多种材质薄壳模型收缩变形的实验效果的第 50 帧如图 11 所示,自左至右分别为 Corotated 线性弹性模型(Coro)、Saint Venant-Kirchhoff 模型(SVK)、线性弹性模型(LE)、Mooney-Rivlin 模型(MR).显然,本文方法适用于多种材质的薄壳收缩变形模拟。

由于 LE 材质模型 1st Piola-Kirchhoff 应力张量定义为 $\mathbf{P}(\mathbf{F})_{LE} = \mu(\mathbf{F} + \mathbf{F}^T - 2\mathbf{I}) + \lambda \text{tr}(\mathbf{F} - \mathbf{I})\mathbf{I}$, Coro 材质模型 1st Piola-Kirchhoff 应力张量定义为 $\mathbf{P}(\mathbf{F})_{Coro} = 2\mu(\mathbf{F} - \mathbf{R}) + \lambda \text{tr}(\mathbf{R}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})\mathbf{R}$,而文献[10]的变形梯度为 $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$,不是方阵,无法计算 1st Piola-Kirchhoff 应力张量 $\mathbf{P}(\mathbf{F})_{LE}$ 和 $\mathbf{P}(\mathbf{F})_{Coro}$,所以文献[10]方法不适用于 LE 材质模型和 Coro 材质模型.比较而言,本文方法材质适用性更强,优于文献[10]方法。

图 12 为使用 SVK 材质 50 帧收缩变形效果及能量分布.红框区域显示,本文方法弹性变形能 E_S 分布更为均匀,能量过渡较平滑,变形过程稳定,模型不易失真.而文献[13]方法能量波动较大,故本文方法稳定性更强,优于

文献[13]方法.

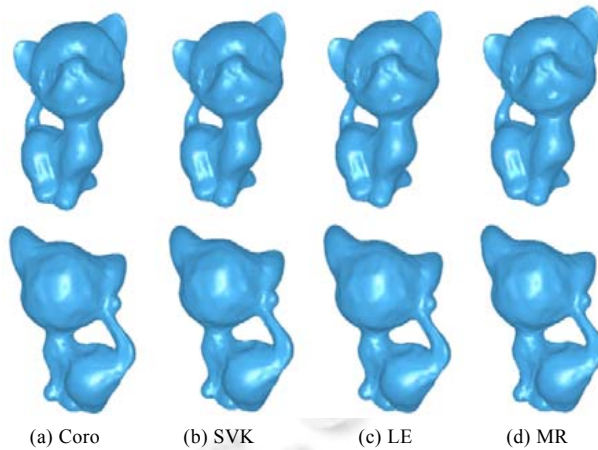


Fig. 11 Contraction deformation results of different materials (on frame 50)

图 11 本文方法对不同材质模型收缩变形模拟(50 帧)

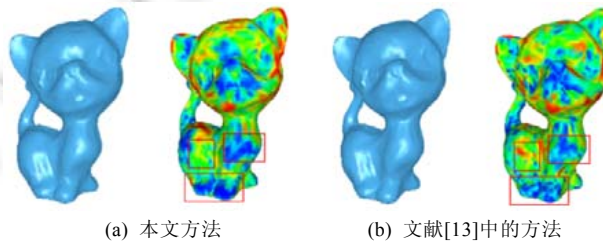


Fig. 12 Deformation and energy distribution for SVK on frame 50

图 12 对 SVK 材质变形 50 帧及能量分布

图 13 为不同体积、不同材质模型变形的帧 100 的体积比.图 13(a)~图 13(c)所示初始体积分别为 V_0 、 $V_0/4$ 、 $V_0/16$.每张图中均有 10 组柱图,每组柱图由 4 根直方图柱组成,其中前 3 根分别为本文方法模拟 Coro 材质、LE 材质、SVK 材质的体积比,第 4 根为文献[13]方法 SVK 材质的体积比.对比图 13(a)~图 13(c),显然,本文方法模拟不同材质模型变形过程中 3 种体积比相差甚微;而文献[13]方法变形 100 帧时模型体积与本文方法所得体积的差异随初始体积的减小而增大.说明文献[13]方法受初始体积影响较大,而本文方法较为稳定,受初始体积影响不大,故基于本文方法的不同材质收缩变形过程的稳定性更强,优于文献[13]方法.

基于位置动力学模拟物体变形过程中使用的约束函数通常是基于几何的,如距离约束函数^[7]等,本文使用能量约束,能够得到更真实的变形效果.如图 14 所示,图 14(a)左图为使用能量约束变形 50 帧效果图;图 14(a)右图为使用距离约束变形 50 帧效果图;图 14(b)左图为使用能量约束变形 100 帧效果图;图 14(b)右图为使用距离约束变形 100 帧效果图.显然,当模型变形 50 帧时,能量约束与距离约束的变形效果无明显差别;当模型变形 100 帧时,距离约束的变形效果产生过度拉伸,相比之下,能量约束变形效果较好,更具合理性.

一般的物理模拟变形可通过梯度下降法极小化能量函数来实现^[6],图 15 所示为本文方法与极小化能量法变形 30 帧效果图.对比图 15(a)和图 15(b),显然,二者形态结构相似.但图 15(b)所示模型表面较为粗糙,而使用本文方法的模型表面较光滑,说明本文方法较稳定,可控性较强.

本文针对不同模型,基于弹性变形能,与极小化能量法以及与基于距离约束的位置动力学方法对比了性能,3 种变形方法计算效率对比见表 1.显然,通过梯度下降法极小化能量函数需消耗大量时间,基于距离约束函数的位置动力学方法虽然耗时较少,但模型容易失真,不符合物理规律(如图 14 所示).本文方法耗时较少,且变形效

果比较符合物理规律,故本文方法优于另外两种方法.

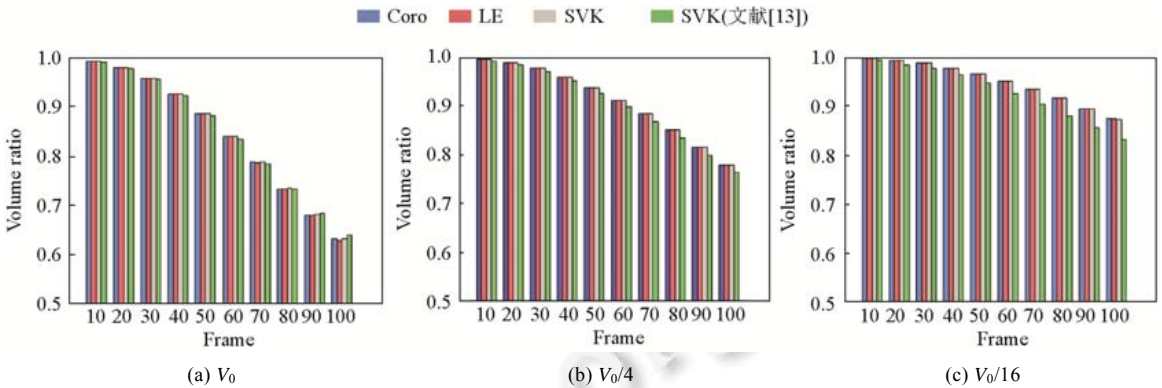


Fig.13 The volume ratio of models with different volumes and materials on the first 100 frames

图 13 不同体积、不同材质模型变形的前 100 帧体积比

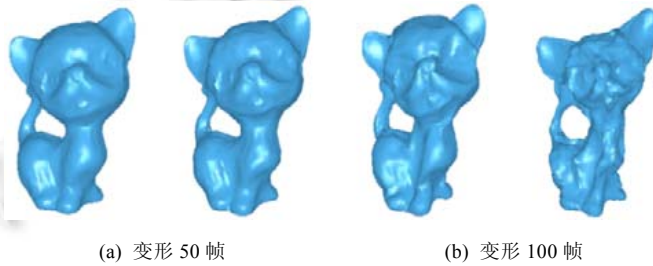


Fig.14 Deformation effects comparison of energy constraint and distance constraint

图 14 本文能量约束与距离约束变形效果对比

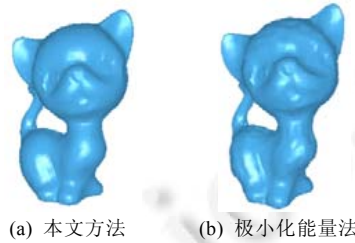


Fig.15 Deformation effects comparison of energy constraint and energy minimization

图 15 本文能量约束方法与极小化能量法变形效果对比

Table 1 The calculation efficiency comparison of different deforming methods

表 1 不同变形方法计算效率对比

	本文方法(s)	极小化能量法(s)	距离约束法(s)
Kitten	13.18	78.55	0.08
Hand	10.52	68.92	0.05
Eight	1.95	10.28	0.03

6.3 弯曲系数与抖动

本节基于 Bender 等离散等距弯曲模型^[13,24],定义了薄壳模型 M 变形过程中的弯曲变形能 E_B ,以阻止模型过度弯曲,驱动模型恢复初始状态.

图 16 所示为不同弯曲系数的变形效果,其中,图 16(a)所示为初始模型;图 16(b)~图 16(f)所示的弯曲系数 k_B

分别为 1、 10^{-1} 、 10^{-2} 、 10^{-3} 和 0。当 k_B 为 1 或 10^{-1} 时,模型变形细微;当 k_B 为 10^{-2} 或 10^{-3} 时,模型变形显著;当 k_B 为 0 时表示无弯曲变形能 E_B ,只有弹性变形能 E_S ,与图 16(d)相比,图 16(e)和图 16(f)红框所示局部区域的变形更为剧烈,更为粗糙。

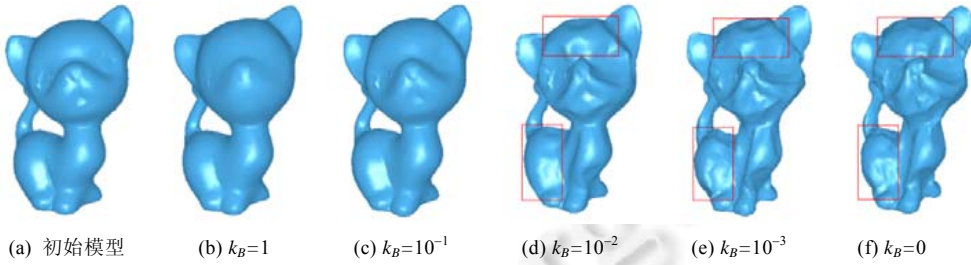


Fig.16 Deformation effects of different bending coefficients
图 16 不同弯曲系数的变形效果

图 17 所示为不同弯曲系数的模型变形前 100 帧体积比变化曲线。当 $k_B=1$ 或 10^{-1} 时,模型体积变化较小;当 $k_B=10^{-2}$ 时,模型体积比曲线较平滑且呈下降趋势,证明模型发生了收缩;当 $k_B=10^{-3}$ 时,模型体积比曲线呈下降趋势,模型发生收缩,但模型体积与 $k_B=0$ 时体积接近,证明弯曲变形能 E_B 所起作用不大。

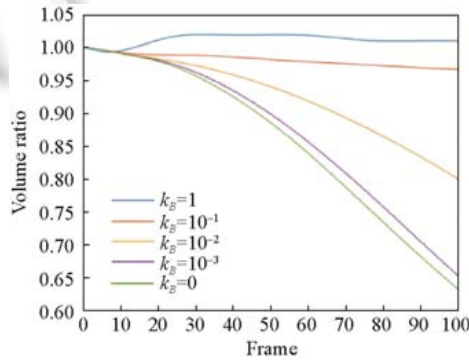


Fig.17 The volume ratio curves of different bending coefficients on the first 100 frames deformation
图 17 不同弯曲系数的变形前 100 帧体积比变化曲线图

不同模型收缩变形前 100 帧体积比变化趋势如图 18 所示, $k_B=1$ 时模型体积比曲线变化幅度较小且上下波动,说明模型收缩变形较为细微,且存在抖动;而 $k_B=10^{-2}$ 时体积比呈显著单调下降趋势,说明收缩变形显著且稳定,显然, $k_B=10^{-2}$ 时更为有效地克服了收缩变形过程中的抖动问题.本文选取 $k_B=10^{-2}$ 作为弯曲系数。

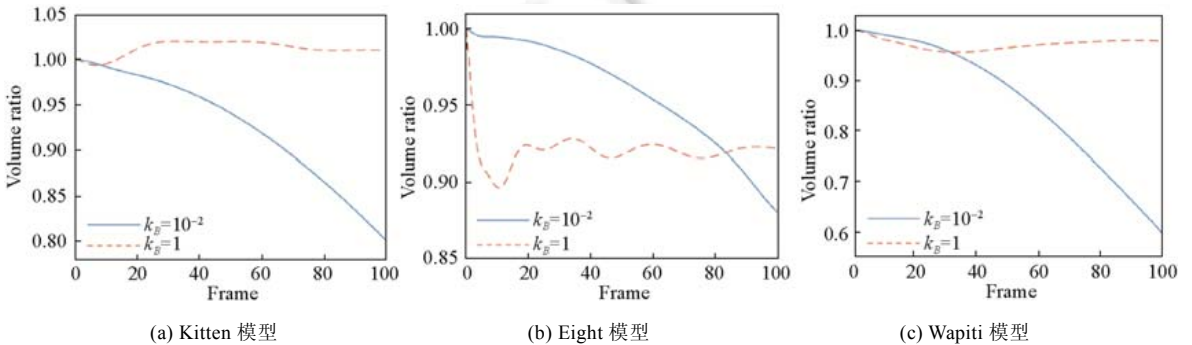


Fig.18 The volume ratio tendency of different thin shells on the first 100 frames deformation
图 18 不同薄壳模型收缩变形前 100 帧体积比变化趋势

6.4 多种局部各向异性能

图 19 所示为模型局部区域添加各向异性 ARAP 能、各向异性 Sqrt 能和各向异性 StVK 能这三种各向异性能量前后的变形对比.图 19(a)所示为初始模型,图 19(b)所示仅添加了弹性变形能.在此基础上,图 19(c)~图 19(e)中第 1 行在模型胸前分别添加了各向异性 ARAP 能、各向异性 Sqrt 能和各向异性 StVK 能这三种各向异性能量,图 19(c)~图 19(e)中第 2 行在模型脑后分别添加了各向异性 ARAP 能、各向异性 Sqrt 能和各向异性 StVK 能这三种各向异性能量.对比图 19(b)和图 19(c)~图 19(e),显然,在无局部各向异性能量时,模型胸前和脑后收缩变形较细微,而 3 种各向异性能量均能产生显著的收缩凹陷变形.显然,本文收缩变形算法不仅适用于局部各向异性 ARAP 能,同样也适用于局部各向异性 StVK 能和局部各向异性 Sqrt 能^[18].

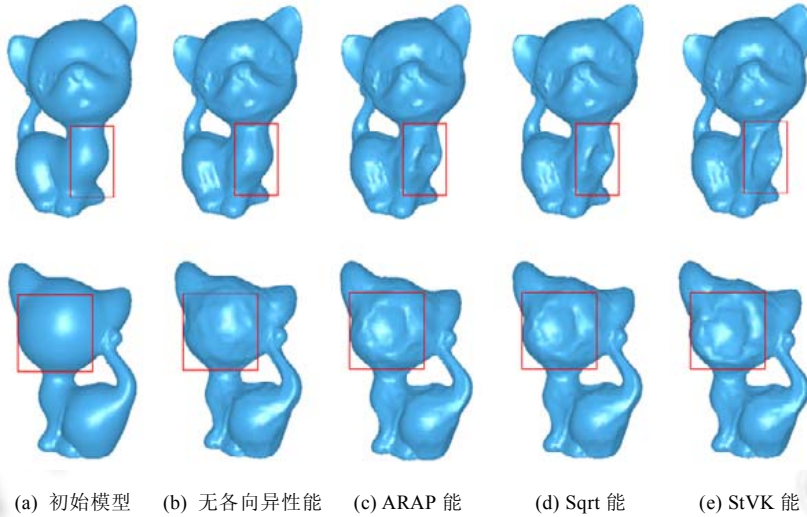


Fig.19 The suitability of various local anisotropic energies

图 19 多种局部各向异性能的实用性

图 20 所示为不同模型局部添加 E_A 前后收缩变形 100 帧的体积比趋势对比,在局部添加 E_A 之前,模型收缩变形的体积比变化较为缓慢;在局部添加 E_A 之后,模型收缩变形的体积比变化较快,且收缩变形后体积更小.

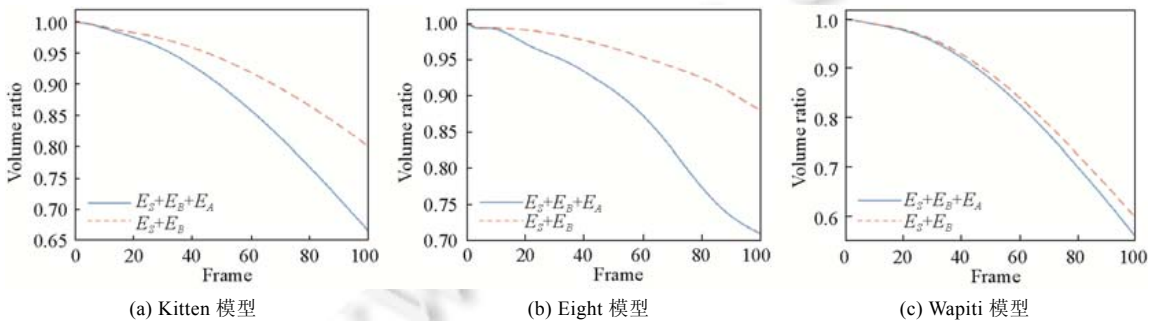


Fig.20 The volume ratio tendency comparison of different models before and after adding E_A on the first 100 frames deformation

图 20 不同模型添加 E_A 前后收缩变形的帧体积比趋势对比

6.5 连续碰撞检测

本文首先采用轴向平行包围盒^[20]与非渗透滤波器^[21]作为预处理,剔除不可能发生碰撞的图元对,降低误报率,大幅度提高了碰撞检测计算效率,然后采用 Bridson 方法^[22]检测碰撞.如表 2 所示,表格第 2 列为无碰撞剔除

时 Bridson 方法每帧变形需求解 3 次多项式的数量,第 3 列为求解 3 次多项式所消耗的时间,第 4 列为本文碰撞检测所消耗的时间,显然,基于本文预处理之后,碰撞检测的计算效率显著提高。

Table 2 The calculation efficiency comparison of collision detection

表 2 碰撞检测计算效率对比

	求解 3 次多项式数量 ^[22]	求解 3 次多项式耗时 ^[22] (s)	本文方法碰撞检测耗时(s)
Wapiti	2.69×10^9	10 256.66	20.88
Bear	1.70×10^9	6 772.54	5.66
Kitten	7.49×10^8	2 911.07	4.63
Hand	5.78×10^8	2 187.18	3.51
Eight	1.76×10^7	67.71	0.48

7 结 语

基于位置动力学的薄壳收缩变形存在材质局限性,且仅仅基于弹性变形能和弯曲变形能难以处理局部类球面结构收缩变形缓慢且细微的问题.本文提出薄壳收缩变形的弹性变形能,有效改进了材质局限性,能够真实、高效地模拟多种材质的薄壳收缩变形过程,通过适当选择弯曲系数,解决了收缩变形过程中的抖动问题;在弹性变形能和弯曲变形能基础上定义局部各向异性变形能,实现了局部类球结构的快速、显著、稳定的收缩变形,且适用于多种各向异性能量.另外,本文以轴向平行包围盒与非渗透滤波器作为预处理,提高碰撞检测效率。

本文算法存在如下几个方面的不足:首先薄壳收缩变形幅度有限,如何自适应地选择最优弯曲系数,并细分重构薄壳模型的局部网格,以进一步降低收缩比,是算法优化的方向之一.其次,本文算法如何推广到膨胀变形也需要考虑.第三,动画设计虚拟场景中有些变形是大幅度的,甚至是夸张的,不合常理的,本文算法基于能量实现,难以应用于此类大幅度变形。

References:

- [1] Huang J, Chen J, Xu WW, Bao HJ. A survey on fast simulation of elastic objects. *Frontiers of Computer Science*, 2019,13(3): 443–459.
- [2] Ma LK, Zhang YZ, Liu Y, Zhou K, Tong X. Computational design and fabrication of soft pneumatic objects with desired deformations. *ACM Trans. on Graphics (TOG)*, 2017,36(6):239:1–239:12.
- [3] Ly M, Casati R, Bertails-Descoubes F, Skouras M, Boissieux L. Inverse elastic shell design with contact and friction. *ACM Trans. on Graphics (TOG)*, 2018,37(6):1–16.
- [4] Grinspun E, Hirani AN, Desbrun M, Schröder P. Discrete shells. In: *Proc. of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation*. 2003. 62–67.
- [5] Bender J, Müller M, Macklin M. A survey on position based dynamics, 2017. In: *Proc. of the European Association for Computer Graphics: Tutorials*. 2017. 1–31.
- [6] Liu TT. Towards real-time simulation of hyperelastic materials [Ph.D. Thesis]. Philadelphia: University of Pennsylvania, 2018.
- [7] Müller M, Heidelberger B, Hennix M, Ratcliff J. Position based dynamics. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2007,18(2):109–118.
- [8] Dinev D, Liu TT, Kavan L. Stabilizing integrators for real-time physics. *ACM Trans. on Graphics (TOG)*, 2018,37(1):1–19.
- [9] Sifakis E, Barbič J. FEM simulation of 3D deformable solids: A practitioner's guide to theory, discretization and model reduction. In: *Proc. of the ACM SIGGRAPH 2012 Courses*. 2012. 1–50.
- [10] Tang PB, Huang DJ, Wang Y, Gong RB, Tang W, Ding YD. Position based balloon angioplasty. In: *Proc. of the 15th ACM SIGGRAPH Conf. on Virtual-reality Continuum and Its Applications in Industry*. 2016. 391–400.
- [11] Bender J, Weber D, Diziol R. Fast and stable cloth simulation based on multi-resolution shape matching. *Computers & Graphics*, 2013,37(8):945–954.
- [12] Deul C, Kugelstadt T, Weiler M, Bender J. Direct position-based solver for stiff rods. *Computer Graphics Forum*, 2018,37(6): 313–324.

- [13] Bender J, Koschier D, Charrier P, Weber D. Position-based simulation of continuous materials. *Computers & Graphics*, 2014,44: 1–10.
- [14] Macklin M, Müller M. Position based fluids. *ACM Trans. on Graphics (TOG)*, 2013,32(4):1–12.
- [15] Diziol R, Bender J, Bayer D. Robust real-time deformation of incompressible surface meshes. In: *Proc. of the 2011 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation*. 2011. 237–246.
- [16] Smith B, De Goes F, Kim T. Analytic eigensystems for isotropic distortion energies. *ACM Trans. on Graphics (TOG)*, 2019,38(1): 1–15.
- [17] Smith B, De Goes F, Kim T. Stable neo-hookean flesh simulation. *ACM Trans. on Graphics (TOG)*, 2018,37(2):1–15.
- [18] Kim T, De Goes F, Iben H. Anisotropic elasticity for inversion-safety and element rehabilitation. *ACM Trans. on Graphics (TOG)*, 2019,38(4):1–15.
- [19] Verschoor M, Jalba AC. Efficient and accurate collision response for elastically deformable models. *ACM Trans. on Graphics (TOG)*, 2019,38(2):1–20.
- [20] Wang HY, Liu SG. A collision detection algorithm using AABB and octree space division. *Advanced Materials Research*, 2014, 989-994:2389–2392.
- [21] Tang M, Manocha D, Tong RF. Fast continuous collision detection using deforming non-penetration filters. In: *Proc. of the ACM Symp. on Interactive 3D Graphics and Games*. 2010. 7–13.
- [22] Bridson R, Fedkiw R, Anderson J. Robust treatment of collisions, contact and friction for cloth animation. *ACM Trans. on Graphics (TOG)*, 2002,21(3):594–603.
- [23] Piddington K. Eulerian on lagrangian cloth simulation [MS. Thesis]. San Luis Obispo: California Polytechnic State University, 2017.
- [24] Bergou M, Wardetzky M, Harmon D, Zorin D, Grinspun E. A quadratic bending model for inextensible surfaces. In: *Proc. of the Fourth Eurographics Symp. on Geometry Processing*. 2006. 227–230.



孙晓鹏(1968—),男,博士,教授,CCF 高级会员,主要研究领域为计算机图形学.



李娇娇(1997—),女,硕士生,主要研究领域为计算机图形学.



何鑫(1994—),女,硕士,主要研究领域为计算机图形学.



陈腾(1998—),男,学士,主要研究领域为计算机图形学.



王振燕(1996—),女,硕士生,主要研究领域为计算机图形学.



董雨(1998—),男,学士,主要研究领域为计算机图形学.