

## 时变网络中国邮路问题的时间自动机模型<sup>\*</sup>

谭国真<sup>+</sup>, 孙景昊, 王宝财, 姚卫红

(大连理工大学 计算机科学与技术学院, 辽宁 大连 116023)

### Solving Chinese Postman Problem on Time Varying Network with Timed Automata

TAN Guo-Zhen<sup>+</sup>, SUN Jing-Hao, WANG Bao-Cai, YAO Wei-Hong

(School of Computer Science and Technology, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

+ Corresponding author: E-mail: gztan@dlut.edu.cn

**Tan GZ, Sun JH, Wang BC, Yao WH. Solving Chinese postman problem on time varying network with timed automata. Journal of Software, 2011, 22(6): 1267-1280. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4033.htm**

**Abstract:** This work presents timed automata as a natural tool for solving Chinese postman problems on time varying network. This study shows that the optimal Chinese tour can be equivalently casted as the shortest run in this automaton system, which can be obtained efficiently by solving a series of decision problems for reachability. A composition strategy is then proposed to adapt to the current model, such that the number of timed automaton is reduced from  $O(|A|+|A_R|+1)$  to  $O(1)$ . Computational results show that the improved model can solve small-sized instances optimally, and that it can obtain a better gap between the lower bound and upper bound than the ones obtained by the cutting plane and column generation algorithms.

**Key words:** time window; time dependent; Chinese postman problem; timed automata

**摘要:** 基于时间自动机理论,提出了时间窗、时间依赖服务代价以及时间依赖旅行时间这3类时变网络中国邮路问题的统一建模的语义模型和求解方法.首先,将中国邮路问题可行解条件和时变参数与时间自动机联系起来,建立了3类问题的统一时间自动机系统(timed automata system,简称TAS)模型;然后,将时变网络中国邮路问题归结为TAS模型上的一系列可达性判定问题,并利用形式化验证算法给出了有效的求解方法.由于TAS模型中存在 $O(|A|+|A_R|+1)$ 个时间自动机,限制了问题求解规模.为此,通过扩展时间自动机语义,提出了TAS模型中的时间自动机合并策略,进而将TAS模型转换为一个广义时间自动机(GTA)模型.基于GTA模型,利用UPPAAL工具对9组、共54个随机算例进行实验.实验结果表明,该方法在求解精度上明显优于运筹学领域的方法.

**关键词:** 时间窗;时间依赖;中国邮路问题;时间自动机

**中图法分类号:** TP301      **文献标识码:** A

中国邮路问题(Chinese postman problem,简称CPP)是1962年由管梅谷教授首次提出<sup>[1]</sup>,是运筹学领域的经典问题.该问题是在一个加权图 $G$ 中,从给定原点出发,遍历图 $G$ 中每条弧至少一次,并回到原点,使得总代价最小.CPP问题的应用最初来源于邮件投递:邮递员从邮局出发,要求对辖区内每条街道都至少通过一次,再回到邮局,在此条件下,怎样选择一条最短路线?随着CPP问题的广泛应用,网络的时变特性越来越引起关注<sup>[2-5]</sup>.例如:

\* 基金项目: 国家自然科学基金(60873256); 国家重点基础研究发展计划(973)(2005CB321904)

收稿时间: 2010-07-09; 修改时间: 2011-03-29; 定稿时间: 2011-04-11

在邮件投递问题中,要求邮递员在规定的时间内访问每条街道<sup>[6]</sup>;在扫雪车路线设计问题中,街道积雪的清扫代价是依赖于服务起始时刻的函数<sup>[7]</sup>;在实时系统测试领域中,状态迁移上的延迟是时间依赖的函数,如何给定一组测试序列,检验系统中的所有迁移,且总的延迟最短<sup>[8,9]</sup>.这些问题都可以归结为时变网络上的中国邮路问题求解.

目前,国际上主要存在 3 类时变网络 CPP 问题:时间窗 CPP 问题(CPP with time windows,简称 CPPTW)、时间依赖服务代价 CPP 问题(CPP with time dependent costs,简称 CPPTDC)<sup>[7]</sup>以及时间依赖旅行时间 CPP 问题(CPP with time dependent travel times,简称 CPPTDT)<sup>[8,9]</sup>(具体定义见本文第 1 节).尽管这些问题仅仅存在时变网络参数的差异,但是在运筹学领域中,人们必须针对上述问题建立不同的数学模型和求解算法.例如,CPPTW 问题(1996 年)<sup>[6]</sup>和 CPPTDC 问题(2007 年)<sup>[7]</sup>可以利用图转换的方法在多项式时间内归约为时变网络上的车路由问题,再应用已有的列生成方法求解.但是,对于 CPPTDT 问题,图转换方法变成了指数级的算法,无法在确定的多项式时间内将原问题转换为已有的点路由问题求解.因此,图转换方法不适用时间依赖旅行时间网络<sup>[8]</sup>.2010 年,我们通过构造复杂的时间约束不等式系统,首次为 CPPTDT 问题建立了整数规划模型,并设计了割平面算法和列生成算法<sup>[8,9]</sup>.以上方法仅仅关注求解问题的技术,忽略了对问题自然时间属性的刻画,当网络具有多种时变特征,或者时变性质发生改变时,这些方法往往变得不再适用,需要重新设计.因此,为 CPPTW,CPPTDC 以及 CPPTDT 这 3 类时变网络中国邮路问题建立一种统一的模型和求解方法具有重要意义.

显然,运筹学领域的方法很难建立一种统一的模型和求解方法.相比之下,时间自动机方法能够更直观地表达问题的各种时间属性,为当前各种与时间相关的复杂困难问题提供了统一的语义模型,开辟了求解优化问题的新途径.这方面的研究最早始于 2001 年法国国家研究中心 Maler 教授的工件调度问题时间自动机模型<sup>[11]</sup>.Maler 教授在该领域做出了一系列的工作<sup>[12-15]</sup>,最近的工作发表于《Theoretical Computer Science》<sup>[15]</sup>.Maler 教授认为,时间自动机方法求解工件调度问题的理论意义在于:调度问题若要成为一个更加成熟的学科,应该重点研究如何构造问题真实的语义模型,而不是具体的求解技术.时间自动机就是这样的语义模型.当然,时间自动机方法并不能改变问题固有的计算复杂性,但是它为调度问题提供了一个全新的理论模型,基于新模型就有可能设计出更高效的新算法.

据我们所查,在国际上尚未见到利用时间自动机方法求解中国邮路问题的报道.本文首次提出了时变网络中国邮路问题的时间自动机模型和求解方法.首先,从中国邮路问题中抽象出可行解条件和时变参数两类要素,将可行解条件和优化问题的时变参数与时间自动机内部拓扑、时间自动机之间通信机制、时间自动机的时钟变量、时钟约束及时钟重置操作联系起来,建立 3 类时变网络 CPP 问题的时间自动机系统(timed automata system,简称 TAS)模型;然后,将时变网络中国邮路问题归结为 TAS 模型中一系列可达性判定问题,并利用形式化验证算法给出有效的求解方法.由于 TAS 模型中存在  $O(|A|+|A_R|+1)$  个时间自动机( $|A|$  为网络中的弧数, $|A_R|$  为网络中的需求弧数),限制了问题求解规模.为此,我们通过扩展时间自动机语义,提出了时间自动机合并策略,进而将 TAS 模型转换成为一个广义时间自动机(generalized timed automata,简称 GTA)模型.为了验证 GTA 模型和求解方法的有效性,我们按照网络规模和旅行时间函数随机生成了 9 组时变网络的数据,并利用 UPPAAL 工具进行实验验证.实验表明,本文方法与割平面算法和列生成算法等运筹学方法相比,能够获得更优的问题下界和上界和更高的求解精度.

本文第 1 节简要介绍时变网络中国邮路问题.第 2 节提出时变网络中国邮路问题统一的时间自动机系统(TAS)模型.第 3 节提出时间自动机的合并策略,将 TAS 模型转换为一个广义时间自动机(GTA)模型.第 4 节是实验验证.最后是结束语.

## 1 时变网络中国邮路问题

给定一个强连通的有向图  $G=(V,A)$ ,其中, $V$  是图  $G$  的节点集合, $A$  是图  $G$  的弧集合, $A$  中的每条弧  $(v_i,v_j)$  均关联一个旅行时间  $D_{ij}$ .子弧集  $A_R \subseteq A$  表示需求弧集, $A_R$  中每条弧  $(v_i,v_j)$  除了关联旅行时间  $D_{ij}$  外,还关联有服务时间  $S_{ij}$  和服务代价  $C_{ij}$ .中国邮路问题是求一条从原点  $v_1$  出发、服务  $A_R$  中所有弧、最终回到原点,并且总的服务代

价最小的回路。

以上定义是管梅谷教授给出的 CPP 定义的一般化.对于  $(v_i, v_j) \in A_R$ , 令  $D_{ij} = C_{ij}, S_{ij} = 0, A_R = A$ , 则以上定义即为 CPP 的原始定义. CPP 问题本质上等价于构造最小代价欧拉图问题, 即在原图上添加最小代价的重复弧, 使得  $G$  中所有节点的度均为偶数, 得到欧拉图. Edmonds 和 Johnson 基于匹配理论建立了 CPP 问题的线性规划模型并给出了多项式算法<sup>[17]</sup>.

时变网络上的 CPP 问题(CPP on time varying networks, 简称 CPPTVN)是在以上传统 CPP 问题定义的基础上, 为图  $G$  中的弧分配了一个时间约束或时变参数. 3 类时变网络 CPP 问题定义如下:

**定义 1(带时间窗的中国邮路问题(CPPTW)).** 在传统 CPP 问题定义基础上, 图  $G$  中每条需求弧  $(v_i, v_j) \in A_R$  均关联一个时间窗  $[E_{ij}, L_{ij}]$ . 对于给定的初始时刻  $t_1$ , CPPTW 的目标是在  $G$  中求一条在  $t_1$  时刻从原点  $v_1$  出发, 服务需求弧集  $A_R$  中的每条弧至少一次, 且服务代价总和最小的中国邮路  $P$ , 并使得每条需求弧  $(v_i, v_j) \in A_R$  的服务完成时间  $t_i + S_{ij} + D_{ij}$  落在时间窗区域  $[E_{ij}, L_{ij}]$  内, 其中,  $t_i$  为遍历弧  $(v_i, v_j)$  的起始时刻.

注意: 定义 1 中弧  $(v_i, v_j) \in A_R$  的服务完成时间为  $t_i + S_{ij} + D_{ij}$ . 这说明邮递员对弧  $(v_i, v_j)$  进行服务的过程是: 在  $t_i$  时刻从结点  $v_i$  进入弧  $(v_i, v_j)$ , 开始对弧服务, 并最终到达弧的终点  $v_j$ . 这个过程所花费的总时间为  $S_{ij} + D_{ij}$ .

**定义 2(时间依赖服务代价的中国邮路问题(CPPTDC)).** 在传统 CPP 问题定义基础上, 图  $G$  的每条需求弧  $(v_i, v_j) \in A_R$  的服务代价  $C_{ij}(t_i)$  是关于弧  $(v_i, v_j)$  的服务起始时刻  $t_i$  的函数. 对于给定的初始时刻  $t_1$  和最后期限  $T$ , CPPTDC 的目的是在  $G$  中求一条在  $t_1$  时刻从原点  $v_1$  出发, 服务需求弧集  $A_R$  中的每条弧至少一次, 服务代价总和最小的中国邮路  $P$ , 并使得邮路  $P$  的遍历结束时刻小于等于最后期限  $T$ .

**定义 3(时间依赖旅行时间的中国邮路问题(CPPTDT)).** 在传统 CPP 问题定义基础上, 图  $G$  的每条弧  $(v_i, v_j) \in A$  的旅行时间  $D_{ij}(t_i)$  是关于弧  $(v_i, v_j)$  的遍历起始时刻  $t_i$  的函数, 对于给定的初始时刻  $t_1$  和最后期限  $T$ , CPPTDT 的目的是在  $G$  中求一条在  $t_1$  时刻从原点  $v_1$  出发, 服务需求弧集  $A_R$  中的每条弧至少一次, 服务代价总和最小的中国邮路  $P$ , 并使得邮路  $P$  的遍历结束时刻小于等于最后期限  $T$ .

以上 3 类时变 CPP 问题的求解重点不再是如何确定原图  $G$  的最优欧拉图, 而是如何确定邮路中弧遍历的最优次序. 因为即使在  $G$  的同一个欧拉图中, 不同的弧遍历次序对应不同的遍历起始时刻, 这可能导致邮路变得不再满足时间约束, 或者邮路的总代价发生变化. 运筹学方法把问题规约为某种已有的优化问题或者一类复杂的不等式约束集合求解, 过分关注求解问题的技术, 很难刻画时变网络问题的时序性和动态性. 下一节基于时间自动机理论为以上 3 类时变网络 CPP 问题提供了全新的建模方法, 能够自然直观地刻画问题各种复杂的时变特征.

## 2 基于时间自动机理论的建模方法

时间自动机(timed automata, 简称 TA)<sup>[18-22]</sup>是扩充的有限状态自动机, 引入了时钟的概念. 时钟是一类连续非负变量. 时间自动机上的所有时钟在系统开始时从 0 计时, 并以同样的速度增加. 既可以随时地检测每个时钟值的大小, 也可以独立地使某些时钟复位为 0. 通过使用有限个时钟变量, 时间自动机可以提供一种简单又全面的方法来刻画时变网络的各种时间属性. 在本文中, 用于建立时变网络中国邮路问题形式化模型的是时间输入/输出自动机<sup>[19]</sup>, 其定义如下:

**定义 4(时间输入/输出自动机(TIOA)).**  $X$  是时钟的有穷集合.  $X$  上的时间约束集  $C(X)$  是由语法定义  $\phi := (x < c) \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \text{true}$  生成的所有公式集合, 其中,  $x \in X, < \in \{<, \leq, =, >, \geq\}, c \in \mathbb{N}^+, \mathbb{N}^+$  为非负整数集.  $X$  上的输入/输出时间自动机是一个八元组  $\mathcal{A} = \langle I, O, L, l_0, l_f, X, \Gamma, E \rangle$ , 其中:

- $I$  是输入动作的有限集合, 每个输入动作均以“?”开头;
- $O$  是输出动作的有限集合, 每个输出动作均以“!”开头;
- $L$  是状态的有限集,  $l_0$  是初始状态,  $l_f$  是接受状态;
- 映射  $\Gamma: L \rightarrow C(X)$  为每个状态  $l \in L$  赋以一个时间约束  $\phi_l$ , 这个约束称为状态  $l$  的不变式. 当时钟变量满足状态  $l$  的不变式时, 时间自动机可一直停留在该状态上;

- $E \subseteq L \times (I \cup O) \times C(X) \times 2^X \times L$  是迁移的集合. 对于一个迁移  $(l, \{?, !\} \sigma, \phi, Y, l')$ , 是指时间自动机从状态  $l$ , 经过输入或输出动作  $\sigma$ , 迁移到状态  $l'$ . 时间自动机假定迁移都是瞬间发生, 则迁移发生时的时钟值属于  $\Gamma(l)$ , 并满足约束条件  $\phi$ . 迁移发生后的时钟值满足  $\Gamma(l')$ .

时间自动机的时钟赋值为  $\mu: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ , 其中,  $\mathbb{R}^+$  为非负实数集. 时钟赋值  $\mu + \tau$  表示对于所有的时钟变量  $x \in X$ ,  $\mu(x + \tau) = \mu(x) + \tau$ ,  $\tau \in \mathbb{R}^+$ . 时钟赋值  $\mu$  满足时间约束  $\phi$  记为  $\mu \models \phi$ , 当且仅当在  $\mu$  的赋值下  $\phi$  为真. 对于  $Y \subseteq X$ ,  $\mu[Y := 0]$  表示对每个  $x \in Y$  的时钟赋值为 0,  $X$  中其余的时钟值保持不变.

## 2.1 传统中国邮路问题的时间自动机模型

本节建立传统中国邮路问题  $\pi$  的时间自动机系统(TAS)模型, 然后在第 2.2 节将问题  $\pi$  的 TAS 模型扩展到时变网络中国邮路问题  $\Pi$ . 一条合理的中国邮路应该满足如下条件: (1) 邮路中的弧要满足前驱后继关系. 也就是邮路中任意一条弧  $(v_i, v_j)$  的后继必须以  $v_j$  作为起始节点, 即邻接于弧  $(v_i, v_j)$ , 并且后继弧的起始时间必须大于等于前驱弧终点的到达时刻; (2) 邮递员必须服务完  $A_R$  中的所有弧; (3) 邮路需要从原点出发, 并最终回到原点. 接下来, 我们将给出 3 类时间自动机模型来分别刻画中国邮路的这 3 个条件.

首先, 针对  $A$  中的每条弧  $(v_i, v_j)$  建立一个时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}$  (见定义 5), 用来描述邮递员对弧的遍历和服务行为. 所有弧对应的的时间自动机  $\{\mathcal{A}_{ij} \mid (v_i, v_j) \in A\}$  的并行组合能够刻画中国邮路中弧的前驱后继关系.

**定义 5 (弧的时间自动机).** 图  $G$  中的任意弧  $(v_i, v_j) \in A$  均关联一个时间自动机  $\mathcal{A}_{ij} = \langle I, O, L, l_0, l_1, X, \Gamma, E \rangle$ , 其中, 输入动作集合  $I = \{a_{ri} \mid (v_r, v_i) \in A\}$ , 输出动作集合  $O = \{a_{ij}\}$ , 状态集合  $L = \{l_0, l_1\}$ , 时钟集合  $X = \{x\}$ , 不变式  $\Gamma$  为空, 迁移集合  $E$  包括  $\{(l_0, ?, a_{ri}, \text{true}, \{x\}, l_1) \mid a_{ri} \in I\}$  和  $\{(l_1, !, a_{ij}, x \geq D_{ij}, \{x\}, l_0)\}$ . 若  $(v_i, v_j) \in A_R$ , 则  $E$  中还包括迁移  $(l_1, !, a_{ij}^{service}, x \geq S_{ij}, \{x\}, l_1)$ . 特殊地, 若  $i=1$ , 则  $\mathcal{A}_{ij}$  的输入动作集合  $I$  中需要加入  $a_{01}$ .

时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}$  刻画了邮递员遍历和服务弧  $(v_i, v_j)$  的 3 个阶段: 1) 等待邮递员到达  $v_i$  节点; 2) 邮递员到达  $v_i$  节点, 准备遍历  $(v_i, v_j)$ ; 3) 花费一定的时间遍历弧  $(v_i, v_j)$ , 最终到达弧的终点  $v_j$ , 这里所花费的时间包括旅行时间  $D_{ij}$  和在弧的起点  $v_i$  上等待的时间. 以上 3 个阶段分别对应时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}$  的初态  $l_0$ 、中间状态  $l_1$  和最终接受状态  $l_0$ , 如图 1 所示. 若  $(v_i, v_j)$  属于需求弧集  $A_R$ , 弧  $(v_i, v_j)$  的服务和遍历分别对应时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}$  上的两条迁移: 状态  $l_1$  上的自环迁移和从  $l_1$  到  $l_0$  的迁移. 特殊地, 由于邮路中的第 1 条弧没有前驱弧, 因此我们定义了  $a_{01}$  用于激励以原点为起点的弧  $(v_1, v_j)$  作为邮路中的第 1 条弧. 关于  $a_{01}$  的详细介绍见定义 7.

然后, 针对需求弧集  $A_R$  中的每条弧  $(v_i, v_j)$  建立一个服务检测时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$ , 用来检测弧  $(v_i, v_j)$  在邮路中是否被服务. 所有服务检测时间自动机  $\{\mathcal{A}_{ij}^{service} \mid (v_i, v_j) \in A_R\}$  并行工作, 能够验证中国邮路的条件(2).

**定义 6 (服务检验时间自动机).** 任意的弧  $(v_i, v_j) \in A_R$  均关联一个服务检验时间自动机:

$$\mathcal{A}_{ij}^{service} = \langle I, O, L, l_0, l_2, X, \Gamma, E \rangle,$$

其中: 输入动作集合  $I = \{a_{ij}^{service}\}$ , 输出动作集合为空, 状态集合  $L = \{l_0, l_1, l_2\}$ , 时钟集合  $X = \{x, y\}$ , 不变式  $\Gamma(l_1) = \{y \leq C_{ij}\}$ , 迁移状态集合  $E = \{(l_0, ?, a_{ij}^{service}, \text{true}, \{x, y\}, l_1), (l_1, -, y \geq C_{ij}, \{x\}, l_2)\}$ .

服务检验时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$  与弧的时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}$  协同工作.  $\mathcal{A}_{ij}$  输出  $a_{ij}^{service}$ , 表示邮递员正在对弧  $(v_i, v_j)$  进行服务.  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$  响应  $a_{ij}^{service}$  激励, 从初态  $l_0$  迁移到接受状态  $l_1$ , 表示检测到弧  $(v_i, v_j)$  已经被服务. 当需求弧集  $A_R$  中所有弧对应的服务检测时间自动机均到达各自的  $l_1$  状态时, 说明  $A_R$  中的所有弧均在邮路中被服务. 接下来通过时钟  $x, y$  计算弧  $(v_i, v_j)$  的服务代价. 如图 2 所示, 时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$  到达状态  $l_1$  时, 时钟  $x, y$  均被置 0. 设此时的时钟取值为  $\mu$ , 即有  $\mu(x) = \mu(y) = 0$ . 经过时间流逝  $\tau$  后, 若  $\tau$  等于弧的服务代价, 即  $y$  的时钟值同时满足  $l_1$  状态的不变式和  $l_1$  到  $l_2$  迁移上的时钟约束:  $\mu + \tau = (y \geq C_{ij} \wedge y \leq C_{ij})$ , 则时间自动机从状态  $l_1$  迁移到状态  $l_2$ , 时钟  $x$  被置 0. 此后,  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$  的时钟  $y$  和  $x$  的差值即等于弧  $(v_i, v_j)$  的服务代价, 记为  $\mathcal{A}_{ij}^{service} \cdot (y - x)$ . 因此, 当需求弧集  $A_R$  中的每条弧  $(v_i, v_j)$  对应的弧检验自动机均到达各自的接受状态  $\mathcal{A}_{ij}^{service} l_2$  时, 邮路总的服务代价可表示为  $\sum_{(v_i, v_j) \in A_R} \mathcal{A}_{ij}^{service} \cdot (y - x)$ .

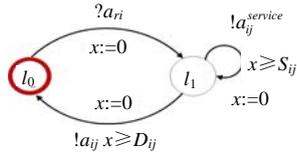


Fig.1 Timed automata  $\mathcal{A}_{ij}$  associated with arc  $(v_i, v_j)$  in  $G$

图 1 图  $G$  中弧  $(v_i, v_j)$  对应的时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}$

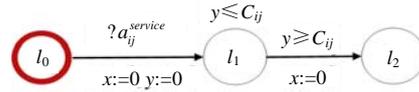


Fig.2 Timed automata  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$  checking whether the required arc  $(v_i, v_j)$  has been serviced

图 2 检验弧  $(v_i, v_j)$  是否被服务的时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$

最后,中国邮路的条件(3)将由如下时间自动机刻画:

定义 7. 原点时间自动机  $\mathcal{A}_{origin} = \langle I, O, L, l_0, l_2, X, \Gamma, E \rangle$ , 其中, 输入动作集合  $I = \{a_{ij} | (v_i, v_j) \in A\}$ , 输出动作集合  $O = \{a_{01}\}$ , 状态集合  $L = \{l_0, l_1, l_2\}$ , 时钟集合  $X = \{t\}$ , 不变式为空, 迁移集合:

$$E = \{(l_0, !, a_{01}, \text{true}, \{t\}, l_1)\} \cup \{(l_1, ?, a_{j1}, \text{true}, \emptyset, l_2) | (v_j, v_1) \in A\}.$$

如图 3 所示,  $\mathcal{A}_{origin}$  从初始状态  $l_0$  迁移到状态  $l_1$  输出激励  $a_{01}$ ;  $t$  置为 0, 表示邮递员在  $t=0$  时刻从原点  $v_1$  准备出发. 邮路中的第一条弧  $(v_1, v_i)$  对应的时间自动机  $\mathcal{A}_{i1}$  将会响应  $a_{01}$ , 表示邮递员开始遍历邮路中的第一条弧, 具体的遍历过程见定义 5 的描述. 另外, 邮递员在遍历邮路中的最后一条弧  $(v_j, v_1)$  时, 时间自动机  $\mathcal{A}_{j1}$  将输出  $a_{j1}$ .  $\mathcal{A}_{origin}$  将响应这个  $a_{j1}$  激励, 从状态  $l_1$  迁移到接受状态  $l_2$ , 标志整条中国邮路的结束. 此时,  $t$  的时钟值即为邮路总共花费的时间.

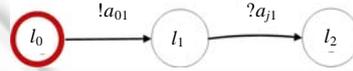


Fig.3 Timed automata  $\mathcal{A}_{origin}$  associated with origin describing the starting vertex and finishing vertex of CPP

图 3 刻画中国邮路的起点和终点均为原点的时自动机  $\mathcal{A}_{origin}$

综上, 弧的时间自动机  $\{\mathcal{A}_{ij} | (v_i, v_j) \in A\}$ 、服务检验时间自动机  $\{\mathcal{A}_{ij}^{service} | (v_i, v_j) \in A_R\}$  和原点时间自动机  $\mathcal{A}_{origin}$  等 3 类时间自动机的并行组合共同刻画出所有合理的中国邮路. 合理中国邮路在时间自动机模型中对应的验证条件为: 所有的服务检验时间自动机均到达各自的接受状态  $l_2$ , 且原点时间自动机  $\mathcal{A}_{origin}$  到达它的接受状态  $l_2$ , 也可以形式化表示为  $\bigwedge_{(v_i, v_j) \in A_R} \mathcal{A}_{ij}^{service} \cdot l_2$  且  $\mathcal{A}_{origin} \cdot l_2$ .

## 2.2 时变网络中国邮路问题的时间自动机系统模型

通过扩展传统 CPP 问题的 TAS 模型, 我们即可对以下 3 类时变网络中国邮路问题进行形式化.

### 1) 带时间窗 CPP 问题

如果要刻画时间窗约束  $[E_{ij}, L_{ij}]$ , 只需在弧  $(v_i, v_j) \in A_R$  对应的服务检验时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$  中, 向  $l_0$  到  $l_1$  的迁移添加时间约束  $E_{ij} - D_{ij} \leq t \leq L_{ij} - D_{ij}$ , 修改后的  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$  如图 4 所示.

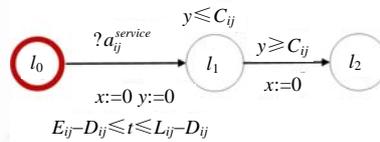


Fig.4 Modified version of service checking timed automata  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$

图 4 修改后的服务检验时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$

在时间自动机运行过程中,  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$  响应  $a_{ij}^{service}$  激励到达状态  $l_1$ , 表示弧  $(v_i, v_j)$  已被服务. 设  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$  到达状态  $l_1$

时的时钟值为 $\mu$ ,易知 $\mu(t)$ 等于弧 $(v_i, v_j)$ 的起始时刻  $t_i$  加上服务时间  $S_{ij}$ .根据中国邮路的定义,弧 $(v_i, v_j)$ 的服务完成时刻为  $t_i+S_{ij}+D_{ij}$ ,即  $\mu(t)+D_{ij}$ .因此,正如时间约束  $E_{ij}-D_{ij} \leq t \leq L_{ij}-D_{ij}$  所描述的, $\mu(t)+D_{ij}$  必须满足时间窗 $[E_{ij}, L_{ij}]$ ,  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$  才能迁移到状态  $l_1$ ,表示邮递员在时间窗内完成对弧 $(v_i, v_j)$ 的服务.

2) 时间依赖服务代价 CPP 问题

设  $A_R$  中任意弧 $(v_i, v_j)$ 关联的时间依赖服务代价函数为  $C_{ij}(t_i)$ ,其中, $t_i$  是弧 $(v_i, v_j)$ 的起始时刻.本文可以处理  $C_{ij}(t_i)$ 为阶梯函数的情况.若阶梯函数带有  $H$  个时间段,其中,第  $h$  个时间段表示为  $[T_{ij}^{h-1}, T_{ij}^h)$  ( $T_{ij}^{h-1}, T_{ij}^h \in \mathbb{R}^+$ ).当  $T_{ij}^{h-1} \leq t_i < T_{ij}^h$  时,弧 $(v_i, v_j)$ 的服务代价为  $C_{ij}^h$ ,带有 3 个时间段的阶梯函数如图 5 所示.定义 8 通过扩展服务检验自动机  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$  来刻画服务代价阶梯函数.

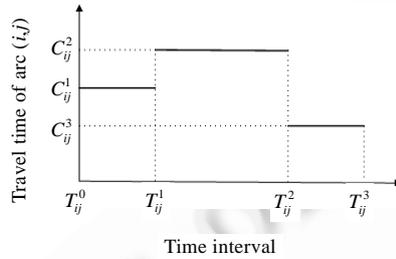


Fig.5 Service cost function of arc  $(v_i, v_j)$

图 5 弧 $(v_i, v_j)$ 的服务代价阶梯函数

**定义 8(时间依赖服务代价的服务检验时间自动机).** 任意的弧 $(v_i, v_j) \in A_R$  均关联一个服务检验时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}^{service} = \langle I, O, L, l_0, l_2, X, \Gamma, E \rangle$ ,其中,输入动作集合  $I = \{a_{ij}^{service}\}$ ,输出动作集合为空,状态集合  $L = \{l_0, l_1^1, \dots, l_1^H, l_2\}$ ,时钟集合  $X = \{x, y, t\}$ ,不变式  $\Gamma(l_1^h) = \{y \leq C_{ij}^h\}$  ( $h = 1, \dots, H$ ),迁移集合:

$$E = \{(l_0, ?a_{ij}^{service}, T_{ij}^{h-1} + S_{ij} \leq t < T_{ij}^h + S_{ij}, \{x, y\}, l_1^h), (l_1^h, -, y \geq C_{ij}^h, \{x\}, l_2) \mid h = 1, \dots, H\}.$$

扩展后的服务检验时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$  能够在不同的时间段  $[T_{ij}^{h-1}, T_{ij}^h)$  迁移到相应的状态  $l_1^h$ .设从  $l_0$  到  $l_1^h$  的迁移发生时,状态  $l_0$  上的时钟取值为 $\mu$ ,易知 $\mu(t)-S_{ij}$ 为弧 $(v_i, v_j)$ 的起始时刻.

因此,正如时钟约束  $T_{ij}^{h-1} + S_{ij} \leq t < T_{ij}^h + S_{ij}$  所描述的, $\mu(t)$ 只有落在  $[T_{ij}^{h-1}, T_{ij}^h)$  区域内, $l_0$  到  $l_1^h$  的迁移才能发生.根据  $l_1^h$  上的不变式可知,当  $l_1^h$  到  $l_2$  的迁移发生后,时钟值  $y-x$  即对应弧 $(v_i, v_j)$ 在第  $h$  时间段的服务代价  $C_{ij}^h$ .

3) 时间依赖旅行时间 CPP 问题

只需对定义 5 中的弧时间自动机进行扩展,就能够求解时间依赖旅行时间的中国邮路问题.

**定义 9(时间依赖旅行时间的弧时间自动机).** 图  $G$  中的任意弧 $(v_i, v_j) \in A$  的旅行时间为阶梯函数  $D_{ij}(t_i)$ ,设  $D_{ij}(t_i)$ 带有  $H$  个时间段,其中,第  $h$  个时间段表示为  $[T_{ij}^{h-1}, T_{ij}^h)$  ( $T_{ij}^{h-1}, T_{ij}^h \in \mathbb{R}^+$ ).当  $T_{ij}^{h-1} \leq t_i < T_{ij}^h$  时,弧 $(v_i, v_j)$ 的旅行时间为  $D_{ij}^h$ .弧 $(v_i, v_j)$ 关联的时间自动机为  $\mathcal{A}_{ij} = \langle I, O, L, l_0, l_2, X, \Gamma, E \rangle$ ,其中,输入动作集合  $I = \{a_{ri}(v_r, v_i) \in A\}$ ,输出动作集合  $O = \{a_{ij}\}$ ,状态集合  $L = \{l_0, l_1^1, \dots, l_1^H\}$ ,时钟集合  $X = \{x, t\}$ ,不变式为空,迁移集合  $E$  包括:

$$\{(l_0, ?a_{ri}, T_{ij}^{h-1} \leq t < T_{ij}^h, \{x\}, l_1^h) \mid a_{ri} \in I, h = 1, \dots, H\},$$

$$\{(l_1^h, !a_{ij}, x \geq D_{ij}^h, \{x\}, l_2) \mid h = 1, \dots, H\}.$$

如图 7 所示,若  $\mathcal{A}_{ij}$  响应  $a_{ri}$  的时钟值  $t$  落在第  $h$  时间段内,则从  $l_0$  迁移到  $l_1^h$ .经过时间流逝 $\tau$ , $\mathcal{A}_{ij}$  从  $l_1^h$  迁移到  $l_2$ .根据弧时间自动机的定义, $\tau$ 大于等于第  $h$  时间段的旅行时间  $D_{ij}^h$ ,这表示邮递员在第  $h$  时间段遍历弧 $(v_i, v_j)$ .

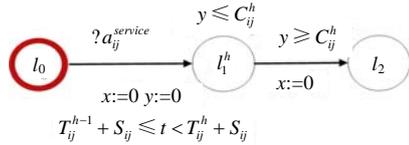


Fig.6 Modified version of timed automata  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$  corresponding to the CPPTDC

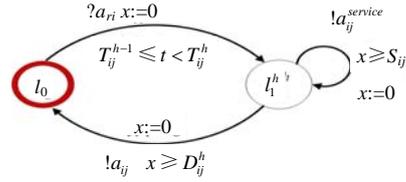


Fig.7 Modified version of timed automata  $\mathcal{A}_{ij}$  corresponding to the CPPTDT

图 6 时间依赖服务代价的服务检验时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$  图 7 时间依赖旅行时间的弧时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}$

2.3 基于时间自动机系统模型的时变网络CPP问题的求解方法

第 2.2 节建立了 3 类时变网络 CPP 问题的 TAS 模型.任意一个时变网络 CPP 问题实例均对应一个由 3 类时间自动机构成的动态系统  $TAS = \{\{\mathcal{A}_{ij} \mid (v_i, v_j) \in A\}, \{\mathcal{A}_{ij}^{service} \mid (v_i, v_j) \in A_R\}, \mathcal{A}_{origin}\}$ .TAS 中的一个最优运行即对应问题实例的一个最优解.本节介绍如何应用可达性验证方法获得 TAS 中最优运行.可达性验证问题是回答“是”和“否”的判定问题,而最优运行问题属于最优化问题,所以,可达性验证算法并不能直接求得时间自动机系统的最优运行.但是,任意一个最优化问题都可以转述为相应的判定问题.因此,我们把最优运行问题归结为时间自动机系统中一系列可达性判定问题求解.具体求解过程见算法 1.

算法 1. TAS 上最优运行的求解过程.

1. 通过启发式算法估计时变网络中国邮路问题的下界  $LB$  和上界  $UB$ ;
2. 设置中值  $MB = \lfloor (UB+LB)/2 \rfloor$ ;
3. 应用形式化验证方法求解可达性判定问题:系统中是否存在一条可行的时间自动机运行能够到达接受状态  $\wedge_{(v_i, v_j) \in A_R} \mathcal{A}_{ij}^{service}.l_2$  和  $\mathcal{A}_{origin}.l_2$ ,且满足  $LB \leq \sum_{(v_i, v_j) \in A_R} \mathcal{A}_{ij}^{service}.(y-x) \leq MB$ ;
4. 若判定问题回答为“是”则:
5. 令  $UB=MB$ ;
6. 若判定问题回答为“否”,则:
7. 令  $LB=MB$ ;
8. 转第 2 步,直到  $LB \geq MB$ ,算法停止.TAS 的当前运行即对应原问题中一条最优中国邮路.

下面通过具体的问题实例来说明本文方法的建模和求解过程.一个同时具有时间窗约束、时间依赖服务代价以及时间依赖旅行时间等 3 类时变特征的问题实例描述如下:

如图 8 所示,给定时变网络  $G(V,A)$ ,节点集合为  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ,弧集  $A = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_1, v_5), (v_5, v_4), (v_4, v_1)\}$ ,需求弧集为  $A_R = \{(v_2, v_3), (v_5, v_4)\}$ ,最后的时间期限为 20,A 中所有弧的旅行时间函数为

$$D_{12}(t) = \begin{cases} 2: 0 \leq t < 5 \\ 7: t \geq 5 \end{cases}, D_{23}(t) = \begin{cases} 3: 0 \leq t < 3 \\ 10: t \geq 3 \end{cases}, D_{34}(t) = \begin{cases} 12: 0 \leq t < 6 \\ 2: t \geq 6 \end{cases},$$

$$D_{15}(t) = \begin{cases} 10: 0 \leq t < 7 \\ 2: t \geq 7 \end{cases}, D_{54}(t) = \begin{cases} 15: 0 \leq t < 10 \\ 3: t \geq 10 \end{cases}, D_{41}(t) = 1, D_{35}(t) = 6.$$

需求弧集  $A_R$  中每条弧的服务时间和时间窗分别为  $S_{23}=1, S_{54}=2$  和  $[e_{23}, l_{23}] = [1, 7], [e_{54}, l_{54}] = [9, 20]$ ,这两条需求弧的服务代价函数分别为

$$C_{23}(t) = \begin{cases} 2: 0 \leq t < 3 \\ 7: t \geq 3 \end{cases}, C_{54}(t) = \begin{cases} 10: 0 \leq t < 9 \\ 2: t \geq 9 \end{cases}.$$

显然,该实例具有时变网络中国邮路问题的所有时间特征,既带有时间窗,又包含时间依赖的旅行时间和服务代价.目前,这类问题国际上尚未给出求解方法.本文基于时间自动机理论,结合 UPPAAL 中的形式化验证方法,为该类问题提供统一的求解模型和框架.具体步骤如下:

第 1 步,为  $A$  中的每条弧  $(v_i, v_j)$  建立相应的时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}$ . 图 9 给出了所有弧对应的时间自动机的 UPPAAL

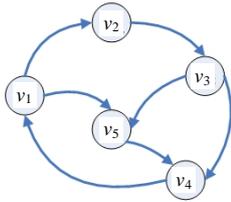


Fig.8 Time varying network  $G$  with origin  $v_1$   
图 8 以  $v_1$  为原点的时变网络  $G$

实现(在 UPPAAL 中,双圆圈表示初始状态),弧  $(v_i, v_j)$  对应的时间自动机记为  $arc_{ij}$ . 其中,弧  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_1, v_5)$  和  $(v_3, v_4)$  各自对应的时间自动机如图 9(a)~图 9(c)所示,这些弧均带有二阶段的旅行时间函数,因此它们所对应的时间自动机包含  $T_1$  和  $T_2$  两个状态,用来区分旅行时间阶梯函数的两个时间段.  $A_R$  中的弧  $(v_5, v_4)$  和  $(v_2, v_3)$  是需求弧,所以它们各自对应的时间自动机均带有一条自环迁移,分别用来发出服务弧的信号:  $s_{54}$  和  $s_{23}$ , 如图 9(f)、图 9(g)所示. 在弧  $(v_4, v_1)$  和  $(v_5, v_4)$  对应的时间自动机中,均包含并行迁移(如图 9(e)、图 9(f)所示),这是因为以上两条弧的前驱弧不止一条(如图 8 所示).

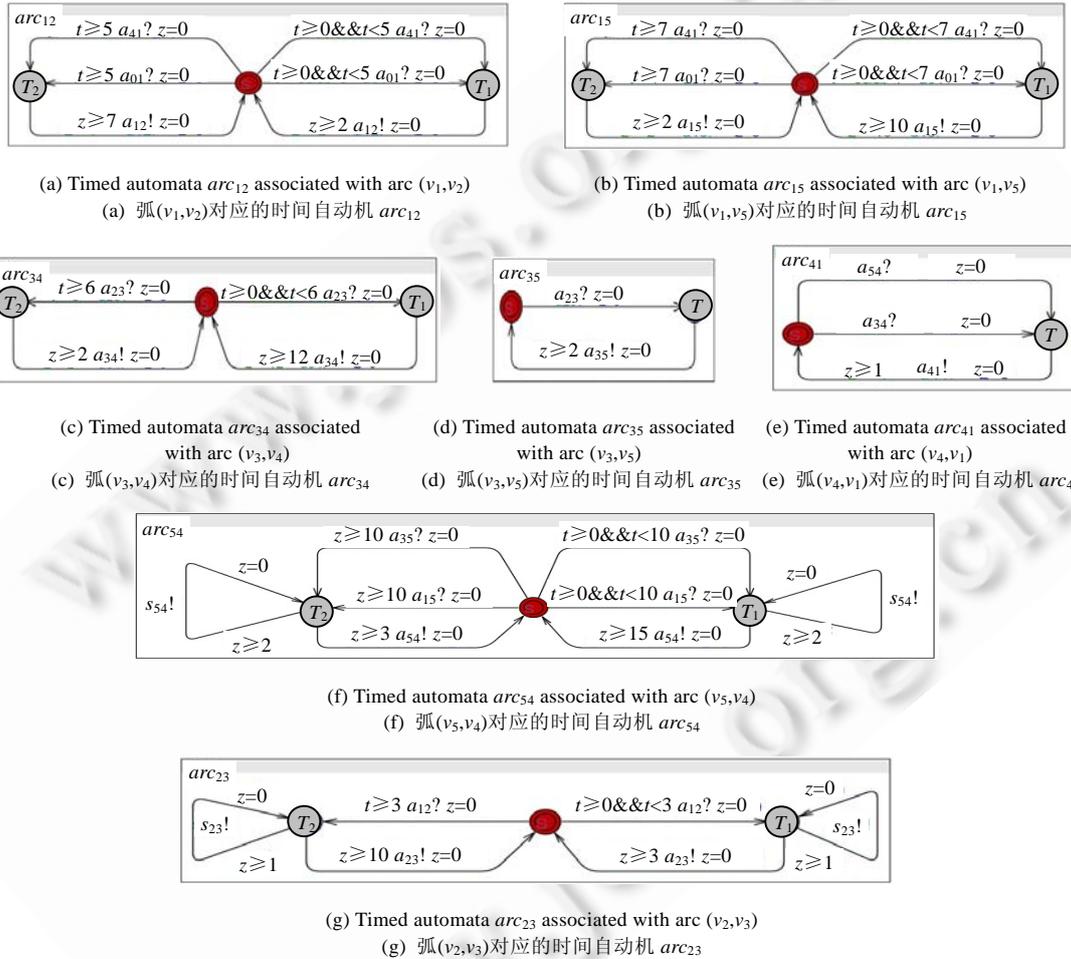
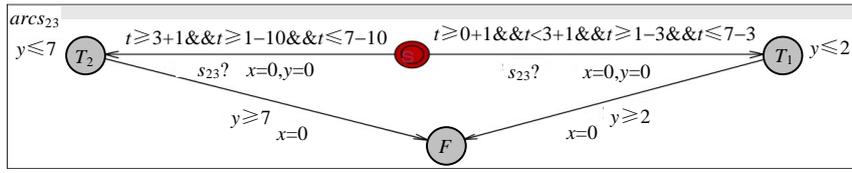


Fig.9 Timed automaton associated with the varying network  $G$

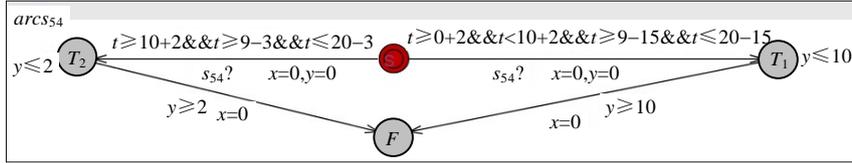
图 9 时变网络  $G$  中所有弧对应的时间自动机

第 2 步,对于需求弧集  $A_R$  中的每条弧  $(v_i, v_j)$ , 建立相应的服务检测时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$ . 图 10 给出了实例中需求弧  $(v_2, v_3)$  和  $(v_5, v_4)$  对应的服务检验时间自动机在 UPPAAL 中的实现, 分别记为  $arc_{s_{23}}$  和  $arc_{s_{54}}$ . 这两条需求弧均带有二阶段的服务代价阶梯函数, 因此, 它们对应的服务检测时间自动机也包含有  $T_1$  和  $T_2$  两个状态, 区分两个时

间阶段.



(a) Service checking timed automata  $arcs_{s_{23}}$  associated with required arc  $(v_2, v_3)$   
(a) 弧  $(v_2, v_3)$  对应的服务检测时间自动机  $arcs_{s_{23}}$



(b) Service checking timed automata  $arcs_{s_{54}}$  associated with required arc  $(v_5, v_4)$   
(b) 弧  $(v_5, v_4)$  对应的服务检测时间自动机  $arcs_{s_{54}}$

Fig.10 Service checking timed automaton associated with the required arcs in time varying networks  $G$   
图 10 时变网络中需求弧集对应的服务检测时间自动机

第 3 步,建立实例的起点时间自动机  $\mathcal{A}_{origin}$ ,如图 11 所示,记为  $start$ .由于算例中原点  $v_1$  的入度为 1,因此在原点时间自动机  $start$  中,从中间状态  $T$  到接收状态  $F$  的迁移也只有一条.以上 3 步构建了一个时间自动机系统:

$$TAS = \{ start, \{ arcs_{ij} | (v_i, v_j) \in A \}, \{ arcs_{ij} | (v_i, v_j) \in A_R \} \}.$$

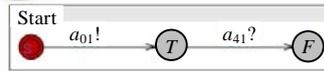


Fig.11 Timed automata associated with origin  
图 11 原点时间自动机

第 4 步,按照本节的算法 1,最终确定  $TAS$  中最优运行对应的代价为 4.最后,我们用 UPPAAL 模拟器给出了最优运行的消息序列,如图 12 所示,消息序列对应的最优邮路  $P$  为  $v_1-v_2-v_3-v_4-v_1-v_5-v_4-v_1$ .其中,  $A_R$  中的弧  $(v_2, v_3)$  和  $(v_5, v_4)$  均被服务了一次,邮路  $P$  花费的总时间为 17,小于规定的最后期限 20,且  $P$  总的服务代价为 4,因此该实例的最优值即为 4.

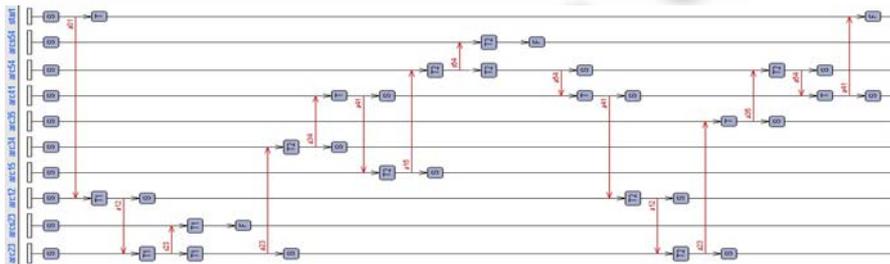


Fig.12 Message sequence diagram of the optimal Chinese postman tour based on timed automata  
图 12 最优邮路对应的时间自动机系统消息序列图

### 3 TAS 模型中的时间自动机合并策略

第 2 节的 TAS 模型要求为时变网络中的每条弧和每条需求弧均建立一个时间自动机,另外再加上原点对应的的时间自动机,TAS 模型中时间自动机的个数为  $O(|A|+|A_R|+1)$ .易知,即使规模很小的时变网络,CPP 问题对应的 TAS 模型都会包含数目较多的时间自动机.例如,第 2.3 节只有 5 个节点 7 条弧的问题实例对应的 TAS 模型中就含有 10 个时间自动机.我们知道,时间自动机个数对验证效率有重要影响,许多验证工具(比如 UPPAAL)一般很难验证具有 20 个以上时间自动机的验证问题.也就是说,TAS 模型最多只能求解网络弧数与需求弧数之和小于 20 的问题实例.因此,TAS 模型很难求解大规模的实例.为了降低 TAS 模型中自动机的数量,使得本文方法能够求解较大规模的问题实例,本节通过扩展时间自动机的语义,提出了 TAS 模型中的时间自动机合并策略,将 TAS 模型转换为一个广义时间自动机(GTA)模型.下面从两个方面介绍 TAS 模型中时间自动机的合并过程.

第一,将需求弧对应的弧时间自动机和服务检验时间自动机合并为一类时间自动机在 TAS 模型中,建立服务检验时间自动机是很有必要的,其作用有以下两点:1) 弧时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}$  和相应的服务检验时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$  之间,通过信号  $a_{ij}^{service}$  通信来记录需求弧  $(v_i, v_j)$  被服务的情况;2) 在服务检验时间自动机上,通过迁移上的时钟约束、时钟重置以及计算状态  $l_2$  上的时钟差  $y-x$  来记录服务需求弧的服务时间.我们可以通过设置新的一般值变量(一般值变量是 UPPAAL 中时间自动机的扩展语义):局部布尔变量  $s$  和全局整形变量  $c$ ,向弧时间自动机中添加数值约束同样实现服务检验时间自动机以上的两点作用,进而将服务检验时间自动机合并到弧时间自动机中.具体合并过程见算法 2.

**算法 2.** 弧时间自动机与服务检验时间自动机的合并策略.

输入:弧时间自动机集合  $\{\mathcal{A}_{ij} | (v_i, v_j) \in A\}$ ,服务检验时间自动机集合  $\{\mathcal{A}_{ij}^{service} | (v_i, v_j) \in A_R\}$ ;

输出:改进后的弧时间自动机集合  $\{\mathcal{A}'_{ij} | (v_i, v_j) \in A\}$ .

开始

1. 设置全局整形变量  $c$  表示邮路的总代价,并设置初值  $c:=0$ ;
2. 对于  $\forall a_{ij} \in A_R$ :
3. 先对弧时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}$  进行改进:
4. 在  $\mathcal{A}_{ij}$  中删除激励信号  $a_{ij}^{service}$ ;
5. 向  $\mathcal{A}_{ij}$  中添加一个局部布尔变量  $s$  标识弧  $(v_i, v_j)$  是否被服务,初值设为  $s:=false$ ;
6. 若  $(v_i, v_j)$  具有时间依赖的服务代价,则:
7. 将状态  $\mathcal{A}_{ij}.l_1$  扩展为  $H$  个状态  $\mathcal{A}_{ij}.l_1^h (h=1, \dots, H)$ ;
8. 对于  $\forall h=1, \dots, H$ :
9. 添加从状态  $\mathcal{A}_{ij}.l_0$  到状态  $\mathcal{A}_{ij}.l_1^h$  的迁移,
10. 迁移上加入时钟约束  $T^{h-1} \leq t \leq T^h$ ,并设置时钟重置  $x:=0$ ;
11. 否则,若  $\mathcal{A}_{ij}$  中包含状态  $l_1$ ,则将状态  $l_1$  改记为状态  $l_1^1$ ,规定  $H=1$ ;
12. 对于  $\forall h=1, \dots, H$ :
13. 在  $\mathcal{A}_{ij}$  状态  $l_1^h$  的闭环迁移上加入变量重置操作  $s:=true$  和  $c := c + C_{ij}^h$ ;
14. 若  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$  中从状态  $l_0$  到状态  $l_1^h$  的迁移上存在形如  $E_{ij} - D_{ij}^h \leq t \leq L_{ij} - D_{ij}^h$  的时钟约束,
15. 将此类时钟约束加入到  $A_{ij}$  中状态  $l_1^h$  的闭环迁移上;
16. 改进后的弧时间自动机记为  $\mathcal{A}'_{ij}$ ;
17. 最后删去服务检验时间自动机  $\mathcal{A}_{ij}^{service}$ .

结束.

经过以上操作,本文方法中时间自动机的个数降为  $O(|A|+1)$ .改进后模型相应的判定问题为:改进的弧时间

自动机系统中是否存在一条可行运行能够到达接受状态  $\mathcal{A}_{origin} \cdot l_2$ ,且满足  $LB \leq c \leq UB$  和  $\sum_{(v_i, v_j) \in A_R} \mathcal{A}'_{ij} \cdot s = true$  .

第二,将所有弧时间自动机以及原点时间自动机合并为一个时间自动机.注意到 TAS 模型中,弧时间自动机之间的通信刻画了时变网络中弧与弧之间的前驱后继关系,因此,我们可以将每个弧时间自动机看成一个广义的状态节点,用广义状态节点之间的迁移来替代弧时间自动机之间的相互通信,这样最终得到一个具有明显分层结构的时间自动机,称为广义时间自动机(generalized timed automata,简称 GTA),其构造步骤见算法 3.

**算法 3.** 弧时间自动机合并为广义时间自动机的策略.

输入:改进后的弧时间自动机集合  $\{\mathcal{A}'_{ij} | (v_i, v_j) \in A\}$  和原点 TA  $\mathcal{A}_{origin}$ ;

输出:广义时间自动机  $\mathcal{A}$ .

开始

1. 设置全局时钟变量  $x:=0, t:=0$ ;
2. 给定初始状态  $\mathcal{A} \cdot l_0$ ,并规定  $\mathcal{A}$  的终止状态也为  $\mathcal{A} \cdot l_0$ ;
3. 对于  $\forall (v_i, v_j) \in A$ :
4. 在  $\mathcal{A}'_{ij}$  中删除激励信号变量  $a_{ij}$  和响应变量集合  $\{a_{r_i} | (v_r, v_i) \in A\}$ ;
5. 在  $\mathcal{A}'_{ij}$  中删除从状态  $\mathcal{A}'_{ij} \cdot l_1^h$  到状态  $\mathcal{A}'_{ij} \cdot l_0$  的迁移;
6. 对于  $\forall (v_j, v_i) \in A, h=1, \dots, H$ :
7. 添加从状态  $\mathcal{A}'_{ij} \cdot l_1^h$  到状态  $\mathcal{A}'_{ij} \cdot l_0$  的迁移,并设置时钟重置  $x:=0$  和时钟约束  $x \geq D_{ij}^h$ ;
8. 如果  $v_i$  为原点  $v_1$ :
9. 添加从初始状态  $\mathcal{A} \cdot l_0$  到状态  $\mathcal{A}'_{ij} \cdot l_0$  的迁移;
10. 如果  $v_j$  为原点  $v_1$ ,对于  $\forall h=1, \dots, H$ :
11. 添加从状态  $\mathcal{A}'_{ij} \cdot l_1^h$  到初始状态  $\mathcal{A} \cdot l_0$  的迁移;

结束.

至此,我们将第 2 节的 TAS 模型转换为 GTA 模型,GTA 模型中仅包含的时间自动机个数为  $O(1)$ .广义时间自动机  $\mathcal{A}$  对应的判定问题为: $\mathcal{A}$  中是否存在一条可行运行能够到达接受状态  $\mathcal{A} \cdot l_0$ ,且满足  $LB \leq c \leq UB$  和

$$\sum_{(v_i, v_j) \in A_R} \mathcal{A}'_{ij} \cdot s = true.$$

### 4 实验结果

本节应用 UPPAAL 实现了第 3 节的广义时间自动机  $\mathcal{A}$ ,并针对时间依赖旅行时间中国邮路问题(见定义 3)的随机算例进行了实验,随机算例的生成程序见文献[9].我们共随机生成了 9 组共 54 个算例,算例网络  $(V,A)$  的规模分别为  $(10,20)$ ,  $(15,25)$  和  $(20,30)$ \*\* ,旅行时间函数的时间段数是 2~4.实验结果见表 1,其中:  $V$  为网络  $G$  的节点个数,  $A$  为网络  $G$  的弧数,  $TI$  为弧上时间依赖旅行时间关联的时间阶段数;  $LB$  为本文方法最终确定的算例最优解下界,  $UB$  为本文方法最终确定的算例最优解上界.根据第 2.3 节的算法 1 描述,最优运行的求解程序结束时,下界  $LB$  和上界  $UB$  在理论上应当相等,即得到问题最优解.由于 CPPTDT 问题是 NP 困难的<sup>[8]</sup>,对于较大规模的算例,优化方法往往更关注问题的上下界的范围  $[LB, UB]$ <sup>[23]</sup>,因此在实验中,我们修改第 2.3 节的程序,使其尽可能地给出问题的最优运行.如果问题规模超出了 UPPAAL 的计算能力,则尽量给出问题上下界范围  $[LB, UB]$ .

我们针对每一组随机生成的 6 个相同规模的算例进行实验,计算了每个算例对应的上下界百分差  $Gap = (UB-LB)/LB \times 100\%$ ,并将每组 6 个算例中  $Gap$  的最小值和最大值记录下来,在表 1 中分别用 Worst case 和 Best case 标识.表 1 的结果表明,GTA 模型能够求得 Inst-1,Inst-2,Inst-3 中所有 18 个算例的最优解;对于较大规模的

\*\* 由 UPPAAL 对时间自动机个数的限制易知,TAS 模型最多能求解弧数小于 19 的 CPPTDT 问题实例.显然,本节中的所有算例均超出了 TAS 模型的求解能力.

算例,本文方法界定的问题上下界非常接近.表 1 所示最好和最坏的上下界百分差分别为 0.95%和 5.94%.

**Table 1** Upper bound and lower bound of the CPTDT obtained by the timed automata method

表 1 时间自动机方法给出时间依赖旅行时间中国邮路问题的上界和下界

Instance	V	A	TI	Worst case			Best case		
				LB	UB	Gap (%)	LB	UB	Gap (%)
Inst-1	10	20	2	864	864	0.00	638	638	0.00
Inst-2	10	20	3	982	982	0.00	678	678	0.00
Inst-3	10	20	4	1 251	1 251	0.00	1 848	1 848	0.00
Inst-4	15	25	2	942	965	2.44	810	823	1.60
Inst-5	15	25	3	1 315	1 367	3.95	1 682	1 698	0.95
Inst-6	15	25	4	1 619	1 668	3.03	1 832	1 859	1.47
Inst-7	20	30	2	1 892	1 975	4.39	1 040	1 076	3.46
Inst-8	20	30	3	1 381	1 463	5.94	1 168	1 204	3.08
Inst-9	20	30	4	1 619	1 677	3.58	1 824	1 872	2.63

另外,本节还将时间自动机方法与传统运筹学方法在求解精度方面进行了比较.我们在之前的工作中,分别给出了时间依赖旅行时间中国邮路问题的割平面算法<sup>[8]</sup>和列生成算法<sup>[9]</sup>(割平面算法和列生成算法是目前运筹学领域求解 NP 困难问题最有效的方法<sup>[10]</sup>).本文分别应用割平面算法和列生成算法求解了表中的所有算例,3类算法的求解精度如图 13 所示.其中,横坐标为算例标号,纵坐标为问题上下界百分差.百分差越小,算法的求解精度越高.可以看出,时间自动机方法和列生成算法的求解精度明显高于割平面算法,而且时间自动机方法的求解精度是三者中最优的.

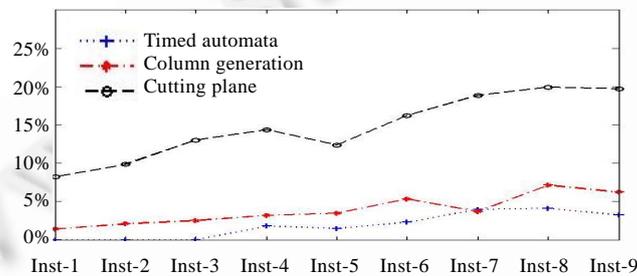


Fig.13 Gaps obtained by the timed automata method, the cutting plane algorithm and column generation algorithm

图 13 时间自动机方法与割平面算法、列生成算法的求解精度比较

## 5 结束语

本文给出了中国邮路问题及其时变网络变体问题的时间自动机解法,基于时间自动机理论,为此类问题建立了统一的语义模型——TAS 模型.任何类型的时变网络中国邮路问题均可归结为 TAS 模型中的一系列可达性判定问题,然后通过形式化验证算法统一求解.相对于运筹学领域采用的将中国邮路问题转换为点路由问题的方法,本文方法具有更广泛的适用性,TAS 模型不但能够求解当前已有的 3 类时变网络中国邮路问题,还可以求解更多时变网络中国邮路问题新的变体.然而,TAS 模型中存在  $O(|A|+|A_R|+1)$  个时间自动机,限制了问题求解的规模.为此,我们通过扩展时间自动机语义,提出了 TAS 模型中的时间自动机合并策略,进而将 TAS 模型转换成仅包含一个时间自动机的 GTA 模型.实验结果表明,本文的方法在求解精度上明显高于运筹学领域的方法.

时变网络中国邮路问题是一类数学问题,本文给出了能够正确刻画该问题的时间自动机模型,但并未在理论上给出严格的数学证明.今后的工作中,我们将从理论上证明时间自动机模型能够正确刻画时变网络中国邮路问题,并对更多的时变网络优化问题开展研究,建立更加通用的时间自动机模型.

**致谢** 感谢在 NASAC2010 会议上,北京航空航天大学刘超教授等出席了本文的报告,并提出了宝贵意见;感谢匿名审稿专家提出的建设性修改建议.

**References:**

- [1] Guan MG. Graphic programming using odd or even points. *Chinese Mathematics*, 1960,10(3):263–266 (in Chinese with English abstract).
- [2] Tan GZ, Gao W. Shortest path algorithm in time-dependent networks. *Chinese Journal of Computers*, 2002,25(2):165–172. (in Chinese with English abstract)
- [3] Tan GZ, Liu YL, Gao W.  $K$  expected shortest path in stochastic and time-dependent network. *Chinese Journal of Computers*, 2003,26(3):323–331 (in Chinese with English abstract).
- [4] Tan GZ, Li D, Qu XG, Gao W. A distributed routing protocol for heterogeneous time dependent networks. *Journal of China Institute of Communications*, 2004,25(10):117–126 (in Chinese with English abstract).
- [5] Lin L, Yan CG, Jiang CJ, Zhou XD. Complexity and approximate algorithm of shortest paths in dynamic networks. *Chinese Journal of Computers*, 2007,30(4):608–614 (in Chinese with English abstract).
- [6] Aminu UF, Eglese RW. A constraint programming approach to the Chinese postman problem with time windows. *Computers and Operations Research*, 2006,33(12):3423–3431. [doi: org/10.1016/j.cor.2005.02.012]
- [7] Tagmouti M, Gendreau M, Potvin JY. Arc routing problems with time-dependent service costs. *European Journal of Operational Research*, 2007,181(1):30–39. [doi: org/10.1016/j.ejor.2006.06.028]
- [8] Tan GZ, Sun JH. Time dependent Chinese postman problem: Theory, formulation and algorithm. Technical Report, Dalian: Dalian University of Technology, 2010. 1–16.
- [9] Sun JH, Tan GZ, Hou GJ, Wang BC. Column generation algorithm for time dependent Chinese postman problem. In: Yu L, Wang S, Lai KK, eds. *Proc. of the 4th Int'l Conf. on Computational Sciences and Optimization*. Kunming: IEEE Computer Society Publications, 2011. 450–454.
- [10] Dror M. *Arc Routing: Theory, Solutions and Applications*. Boston: Kluwer Academic, 2000.
- [11] Abdeddaïm Y, Maler O. Job-Shop scheduling using timed automata. In: Berry G, Comon H, Finkel A, eds. *Lecture Notes in Computer Science*. Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 2001. 478–492. [doi: 10.1007/3-540-44585-4\_46]
- [12] Abdeddaïm Y, Asarin E, Maler O. On optimal scheduling under uncertainty. In: *Lecture Notes in Computer Science*. Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 2003. 240–253. [doi: 10.1007/3-540-36577-X\_17]
- [13] Abdeddaïm Y, Kerbaa A, Maler O. Task graph scheduling using timed automata. In: *Proc. of the FMPPTA 2003*. Los Alamitos: IEEE Computer Society, 2003.
- [14] Abdeddaïm Y, Maler O. Preemptive job-shop scheduling using stopwatch automata. In: *Proc. of the TACAS 2002*. London: Springer-Verlag, 2002. 113–126. [doi: 10.1007/3-540-46002-0\_9]
- [15] Abdeddaïm Y, Asarin E, Maler O. Scheduling with timed automata. *Theoretical Computer Science*, 2006,354(2):272–300. [doi: org/10.1016/j.tcs.2005.11.018]
- [16] Edmonds J, Johnson EL. Matching, euler tours and the Chinese postman. *Mathematical Programming*, 1973,5(1):88–124. [doi: org/10.1007/BF01580113]
- [17] Alur R, Dill DL. A theory of timed automata. *Theoretical Computer Science*, 1994,126(2):183–235. [doi: org/10.1016/0304-3975(94)90010-8]
- [18] Kaynar DK, Lynch N, Segala R, Vaandrager F. Timed I/O automata: A mathematical framework for modeling and analyzing real-time systems. In: *Proc. of the 24th IEEE Int'l Real-Time Systems Symp.* Washington: IEEE Computer Society, 2003. 166–177. [doi: 10.1109/REAL.2003.1253264]
- [19] Henzinger TA, Nicollin X, Sifakis J, Yovine S. Symbolic model checking for real-time systems. *Information and Computation*, 1994,111:193–244. [doi: org/10.1006/inco.1994.1045]
- [20] Chen W, Xue YZ, Zhao C, Li MS. A method for testing real-time system based on timed automata. *Journal of Software*, 2007,18(1):62–73 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/62.htm> [doi: 10.1360/jos180062]
- [21] Yan RJ, Li GY, Xu YB, Liu CM, Tang ZS. Reachability checking of finite precision timed automata. *Journal of Software*, 2006,17(1):1–10 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/1.htm> [doi: 10.1360/jos170001]
- [22] Larsen KG, Pettersson P, Yi W. Uppaal in a nutshell. *Int'l Journal on Software Tools for Technology Transfer*, 1997,1:134–152. [doi: org/10.1007/s100090050010]

- [23] Ecoll PE, Ribeiro CC, de Souza CC. Multiprocessor scheduling under precedence constraints: Polyhedral results. *Discrete Applied Mathematics*, 2006,154(5):770–801. [doi: org/10.1016/j.dam.2004.07.009]

#### 附中文参考文献:

- [1] 管梅谷. 奇偶点图上作业法. *数学学报*, 1960,10(3):263–266.
- [2] 谭国真, 高文. 时间依赖的网络中最小时间路径算法. *计算机学报*, 2002,25(2):165–172.
- [3] 谭国真, 柳亚玲, 高文. 随机时间依赖网络的  $K$  期望最短路径. *计算机学报*, 2003,26(3):323–331.
- [4] 谭国真, 李栋, 瞿晓高, 高文. 时间依赖的混合型网络的分布式路由协议. *通信学报*, 2004,25(10):117–126.
- [5] 林澜, 闫春钢, 蒋昌俊, 周向东. 动态网络最短路问题的复杂性与近似算法. *计算机学报*, 2007,30(4):608–614.
- [20] 陈伟, 薛云志, 赵琛, 李明树. 一种基于时间自动机的实时系统测试方法. *软件学报*, 2007,18(1):62–73. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/62.htm> [doi: 10.1360/jos180062]
- [21] 晏荣杰, 李广元, 徐雨波, 刘春明, 唐稚松. 有限精度时间自动机的可达性检测. *软件学报*, 2006,17(1):1–10. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/1.htm> [doi: 10.1360/jos170001]



谭国真(1960—),男,辽宁本溪人,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为时变随机网络优化,智能交通控制,信息物理系统.



王宝财(1988—),男,硕士生,主要研究领域为时变网络优化,自动机理论.



孙景昊(1985—),男,博士生,主要研究领域为时变网络优化,自动机理论.



姚卫红(1968—),女,副教授,主要研究领域为自动机理论,软件工程.