第10卷第3期 1999年3月 | 软件学报 JOURNAL OF SOFTWARE | Vol. 10, No. 3 Mar. 1999

求解图的最大团的一种算法*

仲盛　谢立

(南京大学计算机科学与技术系　南京　210093)

摘要　图的最大团问题是一个著名的NP-完全问题.现有求解图的最大团的算法或者只适用于某些特殊的图,或者需要指数级时间代价,效率较低.以图的区间表示的概念为基础,提出了一种求解最大团的算法.该算法能够适用于任意的简单图,并且在一定的条件下,该算法只需要多项式时间就可以完成运行.

关键词　图论,图论算法,可计算性,NP问题,集团.

中图法分类号　O157

在图论中,团(或称集团)是指图的顶点集的一个子集,使得其导出子图为完全图.如果一个团不是任何其他团的子集,则称该团为极大团(maximal clique).一个图中含有顶点数最多的团称为该图的最大团(maximum clique).显然,图的最大团必然也是一个极大团,而极大团则未必是最大团[1].

如何求解图的最大团?这个问题是一个著名的NP-完全问题.与之相关的还有图的最大独立集问题,很容易证明这两个问题是等价的.最大团问题在多项式时间内可以转化为许多知名的难题,如最小顶覆盖问题、Hamilton圈问题、Hamilton轨问题、货郎担问题等,因而在理论和应用上都具有重大意义.多年以来,学术界对其求解算法进行了很多研究.但是,由于NP完全问题本身所固有的复杂性,现有的算法或者仅适用于某些特殊的图,或者具有指数时间复杂度,效率较低,因而缺乏实用性[2~4].本文试图以图的区间表示的概念为基础,提出一种求解最大团的算法.这种算法能够普遍适用于任意简单图,并且在一定的条件下只需要多项式时间就可以完成计算.

本文第1节给出了相关概念的定义,并讨论了3条基本定理及其证明;第2节给出了以这些定理为基础的算法,并简要地分析了其时间复杂度;第3节是一个简单的实例,通过该实例可以形象地说明算法运行的过程.

1　基本理论

1.1　关于区间图的分析

首先考虑一种简单的特殊情况——区间图.区间图是一类很早就得到研究的简单图,可以容易地在多项式时间内求出其全部极大团.而且,其极大团的数量是图的顶点数的线性函数,因而可以在多项式时间内进一步求出其最大团.下面是区间图的形式化定义.

定义1. 对于简单图$G(V,E)$,若$\exists$单射$I:V\to\{[l,r]\mid l<r,l,r\in R\}$,使得$\forall u,v\in V,u\neq v,(u,v)\in E$ iff $I(u)\cap I(v)\neq\varnothing$,则称$G$为区间图,称$I$为$G$的一个区间表示(interval representation).为了讨论方便,限制其中所有区间顶点两两不重合.

根据区间图的定义,不难得到如下定理.

定理1. 对于任意的区间图$G(V,E)$,设I是G的一个区间表示,则顶点集$K(K\subseteq V)$是一个极大团 iff $\exists l,r\in R,l<r$,使得:(1) $K=\{v\mid[l,r]\subseteq I(v)\}$;且(2) $\exists u_0,v_0\in K$,使得$l=left(I(u_0)),r=right(I(v_0))$;且(3) $\forall v$

* 本文研究得到国家攀登计划基金资助.作者仲盛,1974年生,硕士生,主要研究领域为分布式计算.谢立,1942年生,教授,博士生导师,主要研究领域为分布计算,并行处理,先进操作系统.

本文通讯联系人:仲盛,南京210093,南京大学计算机科学与技术系

本文1997-11-26收到原稿,1998-03-24收到修改稿

$\in V$,设 $e=left(v)$(或 $right(v)$),若 $v\in V-K$,则有 $e\notin[l,r]$;若 $v\in K$,则 $e\notin(l,r)$($left,right$ 分别表示取区间的左、右端点).

证明:先证充分性. $\forall\ u,v\in K,u\neq v$,由条件(1)知,$[l,r]\subseteq I(u)$且$[l,r]\subseteq I(v)$,所以,$I(u)\cap I(v)\neq\varnothing$,则$(u,v)\in E$. 可见,$K$ 是 G 的一个团. 而$\forall\ u\in V-K$,必有$[l,r]\not\subseteq I(u)$,考虑条件(3)知,$left(I(u))>r$ 或 $right(I(u))<l$. 下面讨论:〈a〉当 $left(I(u))>r$ 时,由条件(2)知,$\exists\ v_0\in K,r=right(I(v_0))$,所以,$left(I(u))>right(I(v_0))$,所以,$I(u)\cap I(v_0)=\varnothing$,则$(u,v_0)\notin E$. 〈b〉当 $right(I(u))<l$ 时,由条件(2)知,$\exists\ u_0\in K,l=left(I(u_0))$,所以,$right(I(u))<left(I(u_0))$,所以 $I(u)\cap I(u_0)=\varnothing$,则$(u,u_0)\notin E$. 综合〈a〉、〈b〉知,$K$ 是极大团.

再证必要性. 对极大团 K,设 $l=left(I(u_0))=\max\{left(I(v))\mid v\in K\}$,再设 $r=right(I(v_0))=\min\{right(I(v))\mid v\in K\}$,显然有 $l<r$ 且$[l,r]$不含任何其他区间顶点. $\forall\ v\in K$,必有 $left(I(v))\leqslant l$ 且 $right(I(v))\geqslant r$,所以$[l,r]\subseteq I(v)$,所以 $K\subseteq\{v\mid[l,r]\subseteq I(v)\}$. 另一方面,$\forall\ v$,若$[l,r]\subseteq I(v)$,则$\forall\ u\in K,u\neq v,I(u)\cap I(v)\neq\varnothing$,所以$(u,v)\in E$. 又因为 K 是极大团,应该包含同时与 K 中所有顶点相邻的顶点,所以 $v\in K$. 因此,$\{v\mid[l,r]\subseteq(I(v)\}\subseteq K$. 所以,$K=\{v\mid[l,r]\subseteq I(v)\}$. □

1.2 从区间图到任意简单图

利用定理1可以求解区间图的全部极大团,从而求出其最大团. 为了把这个结果推广到任意的简单图,可以考虑如下思路:先设法把任意简单图转化为某个相关的区间图,再设法利用区间图的求解结果推出原有的任意简单图的结果. 以下给出的"顶点合并"的定义和定理2、3,就完成了这一工作.

定义2. 设 $G_1(V_1,E_1)$,$G_2(V_2,E_2)$为简单图,若$\exists\ v_1,v_2\in V_1,v_1\neq v_2,v\in V_2,v\notin V_1$,使得:(1) $V_2=(V_1-\{v_1,v_2\})\cup\{v\}$;且(2) $\forall\ u_1,u_2\in V_2,u_1\neq u_2,(u_1,u_2)\in E_2$ iff 〈a〉 $u_1,u_2\neq v,(u_1,u_2)\in E_1$,〈b〉 $u_1=v$(或 $u_2=v$),$u_2\neq v(u_1\neq v)$,(v_1,u_2)或$(v_2,u_2)\in E_1$((u_1,v_1)或$(u_1,v_2)\in E_1$),则称 G_2 是由 G_1 通过合并顶点 v_1,v_2 为 v 得到的.

定理2. 对于任意的简单图$G(V,E)$,$\exists$ 区间图 $G_0(V_0,E_0)$,使得 G 可由 G_0 通过有限多次顶点合并而得到.

证明:早在1980年,Griggs 就已证明任意简单图 G 都有一个广义的区间表示,或称为多区间表示[5]. 可以形式化地定义如下:对于简单图 $G(V,E)$,若$\exists$ 单射 $MI:V\to\rho(\{[l,r]\mid l<r,l,r\in R\})$(这里 ρ 表示幂集),使得$\forall\ u,v\in V,(u,v)\in E$ iff $\exists\ [l_1,r_1]\in MI(u),[l_2,r_2]\in MI(v),[l_1,r_1]\cap[l_2,r_2]\neq\varnothing$,则称 MI 为 G 的一个多区间表示.

考虑区间集合 $S=\bigcup_{v\in V}MI(v)$,构造区间图 $G_0(V_0,E_0)$和它的区间表示 I 如下:$V_0=(V-\{v\mid |MI(v)|\geqslant 2\})\cup U(U\cap V=\varnothing)$,$\{I(u)\mid u\in U\}=\bigcup_{|MI(v)|\geqslant 2}MI(v)$,且若$|MI(v)|=1$,则 $I(v)=MI(v)$中包含的那个唯一区间. 显然 I 的值域恰为 S. 下面证明可由 G_0 通过有限多次顶点合并而得到 G.

对于顶点 $v\in V$,设 $MI(v)=\{I(v_1),I(v_2),...,I(v_n)\},v_1,v_2,...,v_n\in U,n\geqslant 2$,则由 G_0 通过 $n-1$ 次顶点合并,将 $v_1,v_2,...,v_n$ 合并为 v 得到 $G_1(V_1,E_1)$. 显然有 $V_1=(V_0-\{v_1,v_2,...,v_n\})\cup\{v\}$,且$\forall\ u_1,u_2\in V_1,u_1\neq u_2$,则$(u_1,u_2)\in E_1$ iff 〈a〉 $u_1,u_2\neq v,(u_1,u_2)\in E_0$,〈b〉 $u_1=v$(或 $u_2=v$),$u_2\neq v(u_1\neq v)$,$\exists\ v_i(1\leqslant i\leqslant n)$使得$(v_i,u_2)\in E_0$($(u_1,v_i)\in E_0$).

对所有使$|MI(v)|\geqslant 2$ 的顶点 v 都执行类似操作,最终必将得到一个图 $G_m(V_m,E_m)$,$V_m=V$. $\forall\ u_1,u_2\in V_m,u_1\neq u_2$,可能有以下3种情况:

〈a〉 u_1,u_2 都未经合并,则$(u_1,u_2)\in E_m$ iff $(u_1,u_2)\in E_0$,此时,$MI(u_1)$和 $MI(u_2)$都是单元集,其中包含的唯一区间分别为 $I(u_1)$和 $I(u_2)$. 因此$(u_1,u_2)\in E_0$ 即 $I(u_1)\cap I(u_2)\neq\varnothing$,即$\exists\ [l_1,r_1]\in MI(u_1),[l_2,r_2]\in MI(u_2)$,$[l_1,r_1]\cap[l_2,r_2]\neq\varnothing$,亦即$(u_1,u_2)\in E$.

〈b〉 u_1,u_2 都是经合并得到的,则$(u_1,u_2)\in E_m$ iff $(u_{1i},u_{2j}\in U,I(u_{1i})\in MI(u_1),I(u_{2j})\in MI(u_2),(u_{1i},u_{2j})\in E_0$. 而$(u_{1i},u_{2j})\in E_0$ 即 $I(u_{1i})\cap I(u_{2j})\neq\varnothing$,所以,以上条件就等价于$(u_1,u_2)\in E$.

〈c〉 当 u_1,u_2 中有一个未经合并而另一个是经合并而得到的时候,对这两个顶点分别类似于〈a〉、〈b〉处理,最后同样可以得到$(u_1,u_2)\in E_m$ iff $(u_1,u_2)\in E$.

综合〈a〉~〈c〉,无论在哪种情况下,总有$(u_1,u_2)\in E_m$ iff $(u_1,u_2)\in E$,可见 G_m 与 G 同构,所以,由 G_0 通过有限多次顶点合并就可以得到 G.

定理3. 设简单图 $G_2(V_2,E_2)$是由简单图 $G_1(V_1,E_1)$通过合并顶点 v_1,v_2 为 v 得到的,则顶点集 $K(K\subseteq V_2)$

是 G_2 的极大团 iff (1) K 也是 G_1 的极大团，$v_1,v_2 \notin K$，$\exists\, u\in K$，$(u,v_1),(u,v_2)\notin E_1$；或(2) K_0 是 G_1 的极大团，v_1(或 v_2)$\in K_0$，$K=(K_0-\{v_1,v_2\})\cup\{v\}$，且 $\forall\, u\in V_1-K_0-\{v_2\}(V_1-K_0-\{v_1\})$，若 $(u,v_2)\in E_1((u,v_1)\in E_1)$，则 $(K_0-\{v_1,v_2\})\cup\{u\}$ 不是 G_1 的团；或(3) 令 $K_0=(K_1-\{v_1\})\cup(K_2-\{v_2\})\cap K_3$(其中 K_1,K_2,K_3 是 G_1 的极大团，$v_1\in K_1,v_1\notin K_2,v_2\in K_2,v_2\notin K_1$)，则 $K=K_0\cup\{v\}$，且 $\forall\, u_1\in V_1-K_0-\{v_1,v_2\}$，必有 $(u_1,v_1),(u_1,v_2)\notin E_1$，或 $\exists\, u_2\in K_0$，使得 $(u_1,u_2)\notin E_1$.

证明：先证充分性.

对于情况(1)，由 K 是 G_1 的极大团和 $v_1,v_2\notin K$ 知，K 是 G_2 的团，并且 $\forall\, w_1\in V_2-K-\{v\}$，$\exists\, w_2\in K$，使得 $(w_1,w_2)\notin E_2$. 再由 $\exists\, u\in K$ 使得 $(u,v_1),(u,v_2)\notin E_1$，知，$(u,v)\notin E_2$. 所以，必有 K 是 G_2 的极大团.

情况(2)的条件事实上又包含着两种情形，由于对称性，只需证明第1种. 由 K_0 是 G_1 的团知，K 是 G_2 的团. $\forall\, u\in V_2-K$，下面只需证 $K\cup\{u\}$ 不是 G_2 的团. 可知 $u\in V_1-K_0-\{v_2\}$. 当 $(u,v_2)\notin E_1$ 时，$K\cup\{u\}$ 是 G_2 的团 iff $K_0\cup\{u\}$ 是 G_1 的团. 而 K_0 是 G_1 的极大团说明 $K_0\cup\{u\}$ 不是 G_1 的团，所以 $K\cup\{u\}$ 也不是 G_2 的团. 当 $(u,v_2)\in E_1$ 时，必有 $(K_0-\{v_1,v_2\})\cup\{u\}$ 不是 G_1 的团，所以 $(K-\{v\})\cup\{u\}$ 也不是 G_2 的团，当然，$K\cup\{u\}$ 更不是 G_2 的团.

对于情况(3)，由 $K_0\subseteq K_3$ 知，K_0 是 G_1 的团. 再考虑 $v_1,v_2\notin K_0$，可知 K_0 是 G_2 的团. 因为 $K_0\subseteq K_1\cup K_2$，所以在 G_2 中，K_0 内的顶点都与 v 相邻，进一步可得 $K=K_0\cup\{v\}$ 是 G_2 的团. $\forall\, u_1\in V_2-K_0-\{v\}$，必有 $u_1\in V_1-K_0-\{v_1,v_2\}$. 此时，如果 $(u_1,v_1),(u_1,v_2)\notin E_1$，则 $(u_1,v)\notin E_2$；否则，$\exists\, u_2\in K_0$ 使得 $(u_1,u_2)\notin E_1$，所以 $(u_1,u_2)\notin E_2$. 总之，总有 $K\cup\{u_1\}$ 不是 G_2 的团，因而 K 是 G_2 的极大团.

再证必要性. 对于 G_2 的极大团 K，可分3种情况讨论：

(1) $v\notin K$. 此时显然有 K 是 G_1 的团且 $v_1,v_2\notin K$. $\forall\, w\in V_1-K$，若 $w=v_1$ 或 v_2，由 $K\cup\{v\}$ 不是 G_2 的团知，$K\cup\{w\}$ 不是 G_1 的团；若 $w\neq v_1,v_2$，则必有 $w\in V_2-K-\{v\}$，$K\cup\{w\}$ 不是 G_2 的团，也不是 G_1 的团. 所以，K 是 G_1 的极大团. 假设 $\forall\, u\in K$，都有 (u,v_1) 或 $(u,v_2)\in E_1$，则有 $(u,v)\in E_2$. 可见 $K\cup\{v\}$ 是 G_2 的团，矛盾. 所以，$\exists\, u\in K$，使得 $(u,v_1),(u,v_2)\notin E_1$.

(2) $v\in K$，且在 G_1 中 v_1 或 v_2 与 $K-\{v\}$ 内所有顶点相邻. 不妨设 v_1 在 G_1 中与 $K-\{v\}$ 内所有顶点相邻，可再分两种情形讨论.

(a) 如果 $(K-\{v\})\cup\{v_1,v_2\}$ 是 G_1 的团，则令 $K_0=(K-\{v\})\cup\{v_1,v_2\}$. 显然 $K=(K_0-\{v_1,v_2\})\cup\{v\}$ 且 $v_1\in K_0$. $\forall\, w\in V_1-K_0$，必有 $w\in V_2-K$，由 $K\cup\{w\}$ 不是 G_2 的团知，$K_0\cup\{w\}$ 不是 G_1 的团. 所以，K_0 是 G_1 的极大团. 假设 $\exists\, u\in V_1-K_0-\{v_2\}=V_1-K_0$，使得 $(u,v_2)\in E_1$ 且 $(K_0-\{v_1,v_2\})\cup\{u\}$ 是 G_1 的团，即 $(u,v)\in E_2$ 且 $(K-\{v\})\cup\{u\}$ 是 G_2 的团，因而 $K\cup\{u\}$ 是 G_2 的团，与 K 是 G_2 的极大团矛盾.

(b) 如果 $(K-\{v\})\cup\{v_1,v_2\}$ 不是 G_1 的团，则令 $K_0=(K-\{v\})\cup\{v_1\}$. 显然，同样有 $K=(K_0-\{v_1,v_2\})\cup\{v\}$ 且 $v_1\in K_0$，并且易证 K_0 是 G_1 的团. $\forall\, w\in V_1-K_0$，当 $w\neq v_2$ 时，类似于(a)可证 $K_0\cup\{w\}$ 不是 G_1 的团；当 $w=v_2$ 时，$K_0\cup\{w\}=(K-\{v\})\cup\{v_1,v_2\}$，当然不是 G_1 的团. 所以，K_0 是 G_1 的极大团. 假设 $\exists\, u\in V_1-K_0-\{v_2\}$，使得 $(u,v_2)\in E_1$ 且 $(K_0-\{v_1,v_2\})\cup\{u\}$ 是 G_1 的团，即 $u\in V_2-K$，$(u,v)\in E_2$ 且 $(K-\{v\})\cup\{u\}$ 是 G_2 的团，因而 $K\cup\{u\}$ 是 G_2 的团，与 K 是 G_2 的极大团矛盾.

(3) $v\in K$，且在 G_1 中，v_1,v_2 与 $K-\{v\}$ 内所有顶点都不相邻. 令 $SK_1=\{u\mid(u,v_1)\in E_1$ 且 $u\in K-\{v\}\}\cup\{v_1\}$，$SK_2=\{u\mid(u,v_2)\in E_1$ 且 $u\in K-\{v\}\}\cup\{v_2\}$，$SK_3=K-\{v\}$. 易证 SK_1,SK_2,SK_3 都是 G_1 的团. 设 K_1,K_2,K_3 分别是 G_1 中包含 SK_1,SK_2,SK_3 的极大团，显然有 $v_1\in K_1,v_2\in K_2,v_1\notin K_2,v_2\notin K_1$(否则在 G_1 中 v_1 或 v_2 将与 $K-\{v\}$ 内所有顶点相邻). 令 $K_0=((K_1-\{v_1\})\cup(K_2-\{v_2\}))\cap K_3$，又显然有 $K=(((SK_1-\{v_1\})\cup(SK_2-\{v_2\}))\cap SK_3)\cup\{v\}\subseteq K_0\cup\{v\}$. $\forall\, u\in K_0$，必有 $u\in K_3$ 及 $u\in(K_1-\{v_1\})\cup(K_2-\{v_2\})$. 由 $u\in K_3$ 知，u 在 G_1 中与 SK_3 内所有不等于 u 的顶点相邻；由 $u\in(K_1-\{v_1\})\cup(K_2-\{v_2\})$ 知，u 在 G_1 中与 v_1 或 v_2 相邻；综合以上两点得到，u 在 G_2 中与 K 内所有不等于 u 的顶点相邻，但是 K 是 G_2 的极大团，所以，必有 $u\in K$. 因此，得到 $K_0\subseteq K$，再由已知 $v\in K$，有 $K_0\cup\{v\}\subseteq K$，然后得出结论：$K_0\cup\{v\}=K$. $\forall\, u_1\in V_1-K_0-\{v_1,v_2\}$，由以上结论知 $u_1\in V_2-K$. 根据 K 是 G_2 的极大团，得 $(u_1,v)\notin E_2$ 或者 $\exists\, u_2\in K-\{v\}=K_0$ 使得 $(u_1,u_2)\notin E_2$. 而这就等价于 $(u_1,v_1),(u_1,v_2)\notin E_1$ 或者 $\exists\, u_2\in K_0$ 使得 $(u_1,u_2)\notin E_1$. □

2 算法及其分析

利用上述思路和3个定理，可以得到一个求解任意简单图的最大团的算法.

算法.

(1) 求解 G 的多区间表示 MI；

(2) 按照定理2的方法，根据 MI 求解出区间图 G_0 和 G_0 的区间表示 I，使 G 可由 G_0 通过有限多次顶点合并得到；

(3) 按照定理1，计算 G_0 的全部极大团；

(4) 对 G_0 反复进行顶点合并，最终得到 $G_m=G$；在合并的每一步按定理3计算当前图中的极大团；

(5) 比较各极大团，找出最大团.

用类C语言可写出程序实现框架如下：

```
/* Framework for implementation */
for (i=0;i<|G|;i++)
    MI(v_i)=multi_inter_rep(G,i);
V_0=(V-{v||MI(v)|≥2})∪{new(v)||MI(v)|≥2};
for (v;v∈V_0)
    if (v∈V)
      I(v)=member(MI(v));
    else
      I(v)=next_member(MI(old(v)));
E_0={(u,v)|I(u)∩I(v)≠∅};
G_0=(V_0,E_0);
KS=maximal_cls(G_0);
while(|G_i|>|G|)
    {G_{i+1}=merge_vertex(G_i);
    KS=maximal_cls(G_{i+1});
    i++;
    }
K=maximum_cls(KS);
/* End of the program */
```

说明：事实上，这里并没有规定步骤1具体必须如何完成. 一个简单图可能有很多个多区间表示，至于求解多区间表示的方法就更多了. 考虑到本算法的效率，多区间表示中每个顶点对应的区间的数量不能太多. 定义一个简单图 G 的区间数(interval number)$=\min\{\max\{|MI(v)|\,|v\in G\}|MI$ 是 G 的多区间表示$\}$，已经有众多的文献(例如文献[5～9])对区间数进行了广泛而深入的研究. 应根据应用领域的实际情况，选择其中一种代价较小而每个顶点对应的区间的数量的最大值又较接近区间数的方法.

容易证明，对任何简单图 G，都可以找到 G_0，使得 $|G_0|<O(|G|^2)$，从而本算法的第1～3步可以在多项式时间内完成. 而且，当 $\sum_{|MI(v)|\geq 2}(|MI(v)|-1)$ 远小于 $|V|$ 时，算法的第4～5步也可以在多项式时间内完成. 考虑到在很多实际情况下图中含有的极大团并不太多，本算法对一般应用都是有效的.

与现有的求简单图的最大团的算法相比，本算法效率较高，实用性较强. 例如文献[2,3]只能适用于个别特殊的图，对于绝大多数简单图都无法使用. 再如文献[7]中的最大独立集算法也可改为用于求最大团，但其时间复杂度总是指数级的.

3 计算过程示例

图1给出了一个图 $G(V,E)$，下面计算其最大团.

步骤1：求出多区间表示 MI，如图2所示；

步骤2：求出区间图 G_0，如图3所示，其区间表示 I 如图4所示；

步骤3：按定理1，在$(l,r)=(2,3),(4,5),(8,9),(10,11)$时，分别求出极大团{1,5,7}，{1,3,5}，{2,3,6}，{2,6,8}；

步骤4：把顶点7和8合并为4，得到$G_1=G$；按照定理3的情况1，求出G_1的极大团{1,3,5}，{2,3,6}，按情况2求出极大团{1,4,5}，{2,4,6}；按情况3未求得极大团；

步骤5：前面步骤4求得的4个极大团均为最大团.

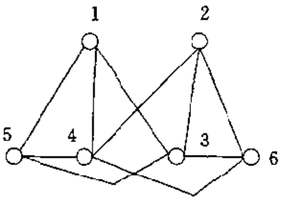

图1

v	$MI(v)$
1	{[1,6]}
2	{[8,12]}
3	{[4,9]}
4	{[0,3],[10,13]}
5	{[2,5]}
6	{[7,11]}

图2

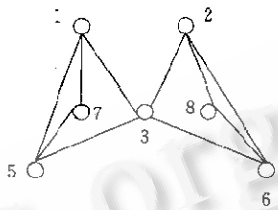

图3

v	$I(v)$
1	[1,6]
2	[8,12]
3	[4,9]
5	{[2,5]}
6	{[7,11]}
7	{[0,3]}
8	{[10,3]}

图4

4 结束语

本算法已经在 IBM RS/6000工作站上用 C 语言实现.实验测试的结果与理论预计相符合.

参考文献

1 王树禾.图论及其算法.合肥：中国科技大学出版社，1990

(Wang Shu-he. Graph Theory with Algorithms. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 1990)

2 Aposlico A *et al*. New clique and independent set algorithms for circle graphs. Discrete Applied Mathematics, 1992, 36(1):1～24

3 Liu J. Maximal independent sets in bipartite graphs. Journal of Graph Theory, 1993, 17(4):495～508

4 李兢，刘长林，申石虎.关于图的极大独立集的理论及生成算法.电子学报，1995，23(8)：78～79

(Li Jing, Liu Chang-lin, Shen Shi-hu. On the theory and algorithm of the maximal independent sets in a graph. Acta Electronics Sinica, 1995, 23(8):78～79)

5 Griggs J R *et al*. Extremal values of the interval number of a graph. SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods, 1980, 1(1):1～7

6 Scheinerman. On the interval number of random graphs. Discrete Mathematics, 1990, 82(1):105～109

7 Eckhoff J. Extermal interval graphs. Journal of Graph Theory, 1993, 17(1):117～127

8 Spinrad J R *et al*. An improved edge bound on the interval number of a graph. Journal of Graph Theory, 1987, 11(3):447～449

9 Erdos P *et al*. A note on the interval number of a graph. Discrete Mathematics, 1985, 55(2):129～133

An Algorithm Computing the Maximum Clique in a Graph

ZHONG Sheng　XIE Li

(*Department of Computer Science and Technology　Nanjing University　Nanjing*　210093)

Abstract　The maximum clique problem is a well-known NP-complete problem. Previous algorithms are either applicable only to some particular graphs or in need of exponential time cost. In this paper, an algorithm is presented, which computes the maximum clique(s) based on the notion of "interval representation" of a graph. It can be applied to any simple graph and only needs polynomial time under the certain conditions.

Key words　Graph theory, graph theory algorithms, computability, NP-problem, clique.