

混合小波包与最佳基*

陈玉宇 张 钺

(清华大学计算机科学与技术系 北京 100084)

摘要 混合正交小波基是一和包含多个正交小波函数的正交基,本文在混合正交小波基的基础上构造出混合小波包.传统的小波包可以细化频谱窗口以解决正交小波基在高频区频谱局部性差的缺点,混合小波包不仅具有传统小波包的特点,而且可以在不失正交性的情况下改变小波包函数的形状,从而获得更好的细节匹配.小波包的分解可以在频域上进行,通过使用FFT而达到快速的目的.

关键词 多分辨率分析,混合正交小波基,小波包.

中图法分类号 TP301.6

小波变换作为一种强大的信号处理工具,已经广泛应用于语音编码、数据压缩、边缘检测和特征提取等方面.在许多应用中,小波变换的过程是一种将信号分解到一组基上的过程.由此可见,小波基的灵活性是十分重要的,传统的正交小波基是通过对一个母函数伸缩、平移得到的.它虽然形式简单,但缺乏灵活性.

为了提高小波基的灵活性,人们作了大量的工作.^[1~5]小波包(Wavelet Packets)^[2]的提出是为了改善小波基的频域局部性.多小波(Multiwavelets)由对多个函数平移伸缩而得到,通过对这些函数进行组合可以得到更好的性质.Wim Sweldens^[3]最近总结了这些工作,他在回答“*What Kind of Wavelets Do We Still Need*”时,指出“*Wavelets with custom-design properties, like wavelets on manifolds and wavelets adapted to irregular samples*”.本文作者曾提出了混合正交小波基^[1]的概念,并构造了这样的小波基.混合正交小波基是由多个具有相同空间结构的正交小波构成.它比传统小波具有更强的灵活性.本文在混合正交小波基的基础上构造出混合小波包.混合小波包中包含多个函数,与传统小波包相比,它不但能够获得更好的频域局部性,还能通过调整波形来取得更好的变换效果.

我们构造的混合正交小波基和混合小波包都是有限的,因此,在计算分解系数时,我们在频域上进行并应用了FFT,得到一种快速算法.

1 混合正交小波基

混合正交小波基的概念和构造在文献[1]中已有详细阐述,这里再简要介绍一下以保持本文的完整性.

1.1 混合正交小波基的概念

多分辨率分析MRA(multi-resolution analysis)的方法为构造正交小波基提供了一个统一的框架.一个MRA可以由一个空间序列 $\dots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \dots$ 和一个尺度函数 $\varphi(t)$ 所确定.^[6]

定义1. 如果两个MRA定义在相同的空间序列上,则称它们具有相同的空间结构.

定义2. 如果两个正交小波基满足生成它们的MRA具有相同的空间结构,则称这两个正交小波基具有相同的空间结构.

设 $MRA_1 = \{ \{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, \varphi^{[1]}(t) \}, \dots, MRA_K = \{ \{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, \varphi^{[K]}(t) \}$ 是K个具有相同空间结构的MRA.设 $\Psi^{[1]}(t), \dots, \Psi^{[K]}(t)$ 分别是由 MRA_1, \dots, MRA_K 产生的正交小波函数.令 W_j 是 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补空间,即 $W_j \oplus V_j = V_{j+1}$,则 $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$,令 $\Psi_{j,m}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j t - m)$,则 $\{ \Psi_{j,m}^{[k]} \}_{j,m \in \mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 空间的正交基而且 $\{ \Psi_{j,m}^{[k]} \}_{m \in \mathbb{Z}}$ 是空间 W_j 的正交基.同样, $\{ \Psi_{j,m}^{[k]} \}_{m \in \mathbb{Z}}, k \in \{2, 3, \dots, K\}$ 也是 W_j 的正交基.在 $L^2(\mathbb{R})$ 的正交基 $\{ \Psi_{j,m}^{[k]} \}_{j,m \in \mathbb{Z}}$ 中,将 $\{ \Psi_{j,m}^{[1]} \}_{m \in \mathbb{Z}}$ 换成 $\{ \Psi_{j,m}^{[2]} \}_{m \in \mathbb{Z}}, k \in \{2, 3, \dots, K\}$,则我们得到了一个有别于 $\{ \Psi_{j,m}^{[k]} \}_{j,m \in \mathbb{Z}}$ 的新的函数族,很显然,这一新的函数族仍然是 $L^2(\mathbb{R})$ 的正交基.混合后得到的函数族被称为混合小波正交基.

* 本文研究得到国家自然科学基金资助.作者陈玉宇,1969年生,博士生,主要研究领域为小波分析及应用,计算机视觉,图象处理.张钺,1935年生,教授,博士生导师,中国科学院院士,主要研究领域为计算机应用技术,人工智能.

本文通讯联系人:张钺,北京100084,清华大学计算机科学与技术系

本文1996-12-04收到原稿,1997-05-07收到修改稿

混合正交小波基与普通正交小波基相比有更大的灵活性,因为在不同的空间,我们可以选用不同的函数基.这种混合小波正交基是存在的,我们构造了带限的具有相同空间结构的小波正交基.

1.2 混合正交小波基的构造

只要找到具有相同空间结构的正交小波基,就可以构造混合正交小波基.首先,我们寻找与 Shannon 小波基具有相同空间结构的正交小波基. Shannon 小波基可以由下述 MRA 所确定:

$$\{\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, \varphi_0(t) \in L^2(\mathbb{R})\},$$

其中,空间序列为

$$V_j = \{f(t) \mid \hat{f}(\omega) = 0, \text{ when } |\omega| \geq 2^j \pi\}$$

尺度函数为

$$\varphi_0(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

在上述 MRA 中,函数序列 $\{\varphi_0(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 构成空间 V_0 的规范正交基. $\varphi_0(t)$ 的 Fourier 变换是:

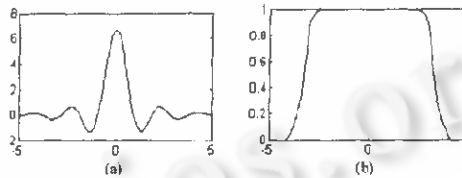
$$\hat{\varphi}_0(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

将 $\hat{\varphi}_0(\omega)$ 看作复变函数并把它写成极坐标形式: $\hat{\varphi}_0(\omega) = r_0(\omega)e^{i\theta_0(\omega)}$, 则 $r_0(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$, $\theta_0(\omega) = 0$. 将 $\theta_0(\omega) = 0$ 换成一个任意的实且奇的函数 $g(\omega), \mathbb{R} \rightarrow [-\pi, \pi]$, 则可以得到一个新的函数: $\hat{\varphi}_g(\omega) = r_0(\omega)e^{ig(\omega)}$.

设 $\varphi_g(t)$ 是满足其 Fourier 变换为 $\hat{\varphi}_g(\omega)$ 的函数,可以证明,同 $\{\varphi_0(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 一样, $\{\varphi_g(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 也是 V_0 空间的规范正交基.^[1] 于是空间序列 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 和尺度函数 $\varphi_g(t)$ 构成了一个新的 MRA, 这个 MRA 与产生 Shannon 小波基的 MRA 有着相同的空间结构. 由于在选择 $g(\omega)$ 时限制很小,所以事实上可以得到无穷多的具有相同空间结构的 MRA, 于是在组成混合正交小波基时,就有了很多种组合方式. 根据不同的需要,可以选用不同的组合方式来构造混合小波基.

Shannon 小波有其缺点,它正则性差,所以衰减慢. 对于那些要求空间局部性好的应用, Shannon 小波并不适合. Meyer^[2] 改进了 Shannon 小波,得到了高正则性的小波. 他通过定义尺度函数来获得小波函数,而他对尺度函数的定义是在频域进行的.

定义 3. 称 $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 是一个 Meyer 尺度函数,如果 $\varphi(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{\varphi}(\omega)$ 满足下述条件, $\hat{\varphi}(\omega)$ 是一个实且偶的函数; 当 $\omega \in [-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi]$ 时, $\hat{\varphi}(\omega) = 1$; 当 $|\omega| > \frac{4}{3}\pi$ 时, $\hat{\varphi}(\omega) = 0$; $\forall \omega \in \mathbb{R}, \hat{\varphi}(\omega) \in [0, 1]$; 当 $\omega \in [0, 2\pi]$ 时, $\hat{\varphi}^2(\omega) + \hat{\varphi}^2(2\pi - \omega) = 1$.



(a) 一个 Meyer 尺度函数 (b) 左图 Meyer 尺度函数的 Fourier 变换

图 1

仅有尺度函数是不足以定义 MRA 的,还需要有空间序列. Meyer 的空间序列要靠尺度函数来定义.

$$\dots V_0 = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \{\varphi(t-n); n \in \mathbb{Z}\} \dots V_j = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \{2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - n); n \in \mathbb{Z}\} \dots$$

其中 $\varphi(t)$ 是一个 Meyer 尺度函数. 可以证明 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 和 $\varphi(t)$ 构成一个 MRA, 由这样的 MRA 构造出的小波函数叫作 Meyer 小波.

在以下的讨论中,我们假设 $\varphi(t)$ 是一个 Meyer 尺度函数. 我们知道, $\varphi(t)$ 可以确定一个 MRA. 下面的命题 1 给出了任意一个 MRA 与 $\varphi(t)$ 所确定的 MRA 具有相同的空间结构的充分必要条件.

命题 1. 令 $\varphi(t)$ 为一个 Meyer 尺度函数,其 Fourier 变换为 $\hat{\varphi}(\omega)$. 称由 $\varphi(t)$ 所确定的 MRA 为 MRA_φ . 设 $\xi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 其 Fourier 变换为 $\hat{\xi}(\omega) = r_\xi(\omega)e^{ig_\xi(\omega)}$, 满足 $r_\xi(\omega)$ 是一个 Meyer 尺度函数, $g_\xi(\omega): \mathbb{R} \rightarrow [-\pi, \pi]$. 可以证明 $\xi(t)$ 能够确定一个 MRA (见文献[1]), 称 $\xi(t)$ 所确定的 MRA 为 MRA_ξ . 于是,我们有下面的结论:

MRA_φ 和 MRA_ξ 具有相同的空间结构,当且仅当

(1) $r_\xi(\omega) = \hat{\varphi}(\omega)$;

(2) 当 $\delta \in [0, \frac{1}{3}\pi]$ 时, $\theta_\varepsilon(\omega)$ 满足 $\theta_\varepsilon = (\pi + \delta) = -\theta_\varepsilon(\pi - \delta)$.

命题 1 的证明在文献[1]中有详细叙述.

根据命题 1, 可以构造与 Meyer 小波基具有相同空间结构的正交小波基. 尽管命题 1 中的限制比 Shannon 小波的情况多一些, 仍可以找到无穷多个与 Meyer 小波基具有相同空间结构的正交小波基, 图 2 给出一些满足命题 1 条件的尺度函数的例子, 其中 $\xi_k(t)$ ($k=1, 2, 3$) 是尺度函数, 其 Fourier 变换分别为 $\xi_k(\omega) = r_{\xi_k}(\omega)e^{i\theta_{\xi_k}(\omega)}$.

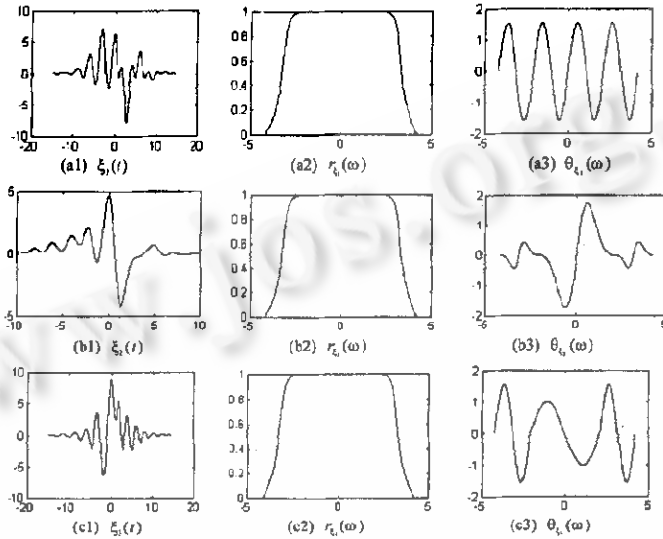


图 2

从图 2 可以看出, 具有相同空间结构的正交小波基的尺度函数和小波函数在形状上可以有很大的变化, 既能保持正交性, 又能有很多的变化是混合正交小波基的优点.

2 混合小波包

设有 K 个具有相同空间结构的 MRA: $\{\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, \varphi^{[1]}(t)\}, \dots, \{\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, \varphi^{[K]}(t)\}$. 设由这些 MRA 生成的正交小波函数分别为 $\Psi^{[1]}(t), \dots, \Psi^{[K]}(t)$, 由这 K 个小波函数可以构成一组混合正交小波基. 我们通过这组混合正交小波基来构造混合小波包.

因为这些 MRA 具有相同的空间结构, 所以 $\varphi^{[k]}(t) \in V_1 \subset V_1, \Psi^{[k]}(t) \in V_1, k=1, 2, \dots, K$. 而 $\{\varphi^{[1]}(2t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 是 V_1 空间的正交基, 所以存在 $\{p_n^{[k]} \in \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 和 $\{q_n^{[k]} \in \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, 使得

$$\varphi^{[k]}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n^{[k]} \varphi^{[1]}(2t-n), \quad k=1, 2, \dots, K. \tag{1}$$

$$\Psi^{[k]}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q_n^{[k]} \varphi^{[1]}(2t-n), \quad k=1, 2, \dots, K. \tag{2}$$

令
$$P_0^{[k]}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n^{[k]} e^{in\omega}, \quad k=1, 2, \dots, K, \quad P_1^{[k]}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q_n^{[k]} e^{in\omega}, \quad k=1, 2, \dots, K, \tag{3}$$

则
$$\tilde{\varphi}^{[k]}(\omega) = P_0^{[k]}(\omega/2) \varphi^{[1]}(\omega/2), \quad k=1, 2, \dots, K, \tag{4}$$

$$\tilde{\Psi}^{[k]}(\omega) = P_1^{[k]}(\omega/2) \varphi^{[1]}(\omega/2), \quad k=1, 2, \dots, K. \tag{5}$$

首先, 由 MRA1 可以构造一个传统的小波包:

令
$$\mu_0^{[1]}(t) = \varphi^{[1]}(t), \mu_1^{[1]}(t) = \Psi^{[1]}(t),$$

则
$$\mu_0^{[1]}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n^{[1]} \mu_0^{[1]}(2t-n), \quad \mu_1^{[1]}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q_n^{[1]} \mu_0^{[1]}(2t-n),$$

传统的小波包由下述递推式生成:

$$\mu_{2l}^{[1]}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n^{[1]} \mu_{2l-1}^{[1]}(2t-n), \quad \mu_{2l+1}^{[1]}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q_n^{[1]} \mu_{2l-1}^{[1]}(2t-n),$$

在频域 $\hat{\mu}_{2l}^{[k]}(\omega) = P_0^{[k]}(\omega/2)\hat{\mu}_l^{[k]}(\omega/2), \quad \hat{\mu}_{2l+1}^{[k]}(\omega) = P_1^{[k]}(\omega/2)\hat{\mu}_l^{[k]}(\omega/2)$

称这个小波包为 CW1.

混合小波包是通过替换 CW1 中的某些函数形成的:

令 $\mu_{2l}^{[k]}(t) = \sum_{n \in Z} p_n^{[k]} \mu_l^{[k]}(2t-n) \quad \mu_{2l+1}^{[k]}(t) = \sum_{n \in Z} q_n^{[k]} \mu_l^{[k]}(2t-n),$

在频域 $\hat{\mu}_{2l}^{[k]}(\omega) = P_0^{[k]}(\omega/2)\hat{\mu}_l^{[k]}(\omega/2), \quad \hat{\mu}_{2l+1}^{[k]}(\omega) = P_1^{[k]}(\omega/2)\hat{\mu}_l^{[k]}(\omega/2)$

用 $\mu_{2l}^{[k]}(t)$ 替换 CW1 中的 $\mu_l^{[k]}(t)$ 或用 $\mu_{2l+1}^{[k]}(t)$ 替换 $\mu_{2l+1}^{[k]}(t)$, 可得到新的函数族, 称为混合小波包. 对于混合小波包, 我们有以下结论.

命题 2. $\langle \mu_{2l}^{[k]}(\cdot - m), \mu_{2l}^{[k]}(\cdot - n) \rangle = \delta_{m,n}, m, n \in Z$ 且 $\langle \mu_{2l+1}^{[k]}(\cdot - m), \mu_{2l+1}^{[k]}(\cdot - n) \rangle = \delta_{m,n}, m, n \in Z.$

命题 3. $close_{L^2(R)} \langle \mu_{2l}^{[k]}(t-n); n \in Z \rangle = close_{L^2(R)} \langle \mu_{2l+1}^{[k]}(t-n); n \in Z \rangle$ 且 $close_{L^2(R)} \langle \mu_{2l+1}^{[k]}(t-n); n \in Z \rangle = close_{L^2(R)} \langle \mu_{2l}^{[k]}(t-n); n \in Z \rangle.$

命题 2 表明新的函数族保持了平移正交性, 命题 3 表明新的函数族保持了 CW1 的空间结构.

为证明命题 2 与命题 3, 先给出两个引理.

引理 1. $\varphi(t) \in L^2(R)$, 其 Fourier 变换为 $\hat{\varphi}$, 则 $\{\varphi(t-n)\}_{n \in Z}$ 是标准正交系当且仅当 $\sum_{k \in Z} |\hat{\varphi}(\omega) + 2k\pi|^2 = 1.$

引理 2. $|P_0^{[k]}(\omega)|^2 + |P_0^{[k]}(\omega + \pi)|^2 = 1, |P_1^{[k]}(\omega)|^2 + |P_1^{[k]}(\omega + \pi)|^2 = 1, k = 1, 2, \dots, K.$

证明: $\hat{\varphi}^{[k]}(\omega) = P_0^{[k]}(\omega/2)\hat{\varphi}^{[k]}(\omega/2), k = 1, 2, \dots, K, \tag{6}$

也可写成 $\hat{\varphi}^{[k]}(2\omega) = P_0^{[k]}(\omega)\hat{\varphi}^{[k]}(\omega), k = 1, 2, \dots, K,$

由于 $\{\hat{\varphi}^{[k]}(t/2-n)\}_{n \in Z}$ 也是平移正交系, 可以证明

$$\sum_{n \in Z} |\hat{\varphi}^{[k]}(2\omega + 2n\pi)|^2 = 1 \tag{7}$$

将式(7)代入式(6)并拆分成奇偶项, 再考虑 $P_0^{[k]}$ 的 2π 周期性, 可以证明

$$|P_0^{[k]}(\omega)|^2 + |P_0^{[k]}(\omega + \pi)|^2 = 1, k = 1, 2, \dots, K$$

同理可证

$$|P_1^{[k]}(\omega)|^2 + |P_1^{[k]}(\omega + \pi)|^2 = 1, k = 1, 2, \dots, K \quad \square$$

命题 2 的证明:

$$\begin{aligned} \langle \mu_{2l}^{[k]}(\cdot - m), \mu_{2l}^{[k]}(\cdot - n) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mu_{2l}^{[k]}(\omega)|^2 \cdot e^{i(m-n)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |P_0^{[k]}(\omega/2)|^2 \cdot |\mu_l^{[k]}(\omega/2)|^2 \cdot e^{i(m-n)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{4\pi j}^{4\pi(j+1)} |P_0^{[k]}(\omega/2)|^2 \cdot |\mu_l^{[k]}(\omega/2)|^2 \cdot e^{i(m-n)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} e^{i(m-n)\omega} \cdot |P_0^{[k]}(\omega/2)|^2 \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\mu_l^{[k]}(\omega/2 + 2\pi j)|^2 \cdot d\omega \quad (P_0^{[k]}(\omega) \text{ 的 } 2\pi \text{ 周期性}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} e^{i(m-n)\omega} \cdot |P_0^{[k]}(\omega/2)|^2 d\omega \quad (\text{由引理 1}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\omega} \cdot (|P_0^{[k]}(\omega/2)|^2 + |P_0^{[k]}(\omega/2 + \pi)|^2) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\omega} d\omega \quad (\text{由引理 2}) \\ &= \delta_{m,n} \end{aligned}$$

同理可证

$$\langle \mu_{2l+1}^{[k]}(\cdot - m), \mu_{2l+1}^{[k]}(\cdot - n) \rangle = \delta_{m,n} \quad \square$$

命题 3 的证明:

因为 MRA1 与 MRAk 具有相同的空间结构, 所以 $close_{L^2(R)} \langle \varphi^{[k]}(t-n); n \in Z \rangle = close_{L^2(R)} \langle \varphi^{[1]}(t-n); n \in Z \rangle$, 于是存在 $\{m_i\}_{i \in Z}$, 使得

$$\varphi^{[k]}(t) = \sum_{i \in Z} m_i \cdot \varphi^{[1]}(t-i)$$

令

$$M(\omega) = \sum_{i \in Z} m_i \cdot e^{-i\omega}$$

则有

$$\hat{\varphi}^{[k]}(\omega) = M(\omega) \cdot \hat{\varphi}^{[1]}(\omega)$$

由式(4),可得

$$M(\omega) = P_0^{[1]}(\omega/2) / P_0^{[1]}(\omega/2)$$

而 $\hat{\mu}_0^{[1]}(\omega) = P_0^{[1]}(\omega/2) \hat{\mu}_0^{[1]}(\omega/2), \hat{\mu}_1^{[1]}(\omega) = P_0^{[1]}(\omega/2) \hat{\mu}_1^{[1]}(\omega/2)$

故 $\hat{\mu}_2^{[1]}(\omega) = M(\omega) \hat{\mu}_2^{[1]}(\omega) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} m_i \cdot e^{-i\omega} \hat{\mu}_2^{[1]}(\omega),$

等式两边同取 Fourier 反变换,得

$$\mu_2^{[1]}(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} m_i \cdot \mu_2^{[1]}(t-i)$$

故 $\mu_2^{[1]}(t) \in \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \mu_2^{[1]}(t-n), n \in \mathbb{Z} \rangle$

同样可证 $\mu_1^{[1]}(t) \in \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \mu_1^{[1]}(t-n), n \in \mathbb{Z} \rangle$

所以 $\text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \mu_0^{[1]}(t-n), n \in \mathbb{Z} \rangle = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \mu_2^{[1]}(t-n), n \in \mathbb{Z} \rangle$

同理, $\text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \mu_1^{[1]}(t-n), n \in \mathbb{Z} \rangle = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \mu_2^{[1]}(t-n), n \in \mathbb{Z} \rangle.$ □

表 1 说明了 WP1 与由它产生的混合小波包之间的空间结构关系。

表 1

(a) WP1 的空间结构

$W_0 = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \mu_0^{[1]}(t-n), n \in \mathbb{Z} \rangle$							
$\text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \mu_2^{[1]}(t-n), n \in \mathbb{Z} \rangle$				$\text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \mu_1^{[1]}(t-n), n \in \mathbb{Z} \rangle$			
$\text{clos} \langle \mu_0^{[1]}(t-n) \rangle$	$\text{clos} \langle \mu_1^{[1]}(t-n) \rangle$	$\text{clos} \langle \mu_2^{[1]}(t-n) \rangle$	$\text{clos} \langle \mu_3^{[1]}(t-n) \rangle$	$\text{clos} \langle \mu_4^{[1]}(t-n) \rangle$	$\text{clos} \langle \mu_5^{[1]}(t-n) \rangle$	$\text{clos} \langle \mu_6^{[1]}(t-n) \rangle$	$\text{clos} \langle \mu_7^{[1]}(t-n) \rangle$
...

(b) 混合小波包的空间结构

$W_n = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \mu_0^{[1]}(t-n), n \in \mathbb{Z} \rangle$							
$\text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \mu_2^{[k]}(t-n), n \in \mathbb{Z}, k \in \{1, \dots, K\} \rangle$				$\text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \mu_1^{[k]}(t-n), n \in \mathbb{Z}, k \in \{1, \dots, K\} \rangle$			
$\text{clos} \langle \mu_0^{[k]}(t-n) \rangle,$ $k \in \{1, \dots, K\}$	$\text{clos} \langle \mu_1^{[k]}(t-n) \rangle,$ $k \in \{1, \dots, K\}$	$\text{clos} \langle \mu_2^{[k]}(t-n) \rangle,$ $k \in \{1, \dots, K\}$	$\text{clos} \langle \mu_3^{[k]}(t-n) \rangle,$ $k \in \{1, \dots, K\}$	$\text{clos} \langle \mu_4^{[k]}(t-n) \rangle,$ $k \in \{1, \dots, K\}$	$\text{clos} \langle \mu_5^{[k]}(t-n) \rangle,$ $k \in \{1, \dots, K\}$	$\text{clos} \langle \mu_6^{[k]}(t-n) \rangle,$ $k \in \{1, \dots, K\}$	$\text{clos} \langle \mu_7^{[k]}(t-n) \rangle,$ $k \in \{1, \dots, K\}$
...

表 1 表明 WP1 与混合小波包具有相同的空间结构. 在每个子空间中, 混合小波包有 K 种选择来构成其正交基. 混合小波包为我们提供了更多的选择, 从而可以构造性质更好的正交基.

3. 最佳基

有了混合小波包, 我们就有了很多选择来构造正交基. 如果给出一定的评价条件, 我们可以从中选择一组基, 使得它对给定的评价条件最优, 这就是最佳基的概念. 对于传统小波包, 我们只能通过调整频域的分辨率来获得最佳基, 而对于混合小波包, 我们还可以调整波形, 因此由混合小波包得到的最佳基比由传统小波包得到的最佳基更优. 我们给出一例来说明混合小波包的优点.

设有一带限信号 $f(t)$, 我们要将它分解到一组正交基上. 在这里, 我们不考虑如何获得最佳的频域局部性, 因为已经有文献[2]详细地讨论了此问题. 为了不失一般性, 我们只考虑在给定频段内的情况. 我们使用的混合小波包是由 Shannon 小波得来的.^[1]我们将分解到具有相同空间结构的 $\{\varphi_1(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{\varphi_2(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 及 $\{\varphi_3(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 上, 其中 $\varphi_k(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ 是产生 Shannon 小波的尺度函数. $f(t), \varphi_k(t) (k=1, 2, 3)$ 的 Fourier 变换分别为 $\hat{f}(\omega) = r_f(\omega) e^{i\theta_f(\omega)}, \hat{\varphi}_k(\omega) = r_k(\omega) e^{i\theta_k(\omega)}$, 见图 3. 分解的结果如图 4 所示.

图 5 显示了重构的波形. 如果以分解系数能量集中为评价条件, 则显然 $\{\varphi_2(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 是三组基中最佳的.

4 分解算法

当我们作小波分解时, 计算小波系数的算法是十分重要的. Mallat^[8]的金字塔算法是一种快速算法, 但是对于我们构造的混合正交小波基和混合小波包来说, 它并不适合, 因为我们构造的正交小波所对应的滤波器参数的个数有可能是无穷的. 由于我们构造的混合小波是带限的, 所以在频域上的算法更为有效. DeStefano^[9]提出的算法可以满足我们的要求. 这是一种针对带限信号在频域上计算小波系数的算法, 它使用了 FFT, 是一种快速算法. 在实际信号处理中, 我们接触到的往往是信号的离散采样值, 所以针对离散信号快速分解算法更为实用, 然而 DeStefano 算法并没

有很好地解决这个问题. 下面, 我们给出一种简单的针对离散信号的快速分解算法, 与 DeStefano 算法一样, 它在频域上计算并且使用 FFT.

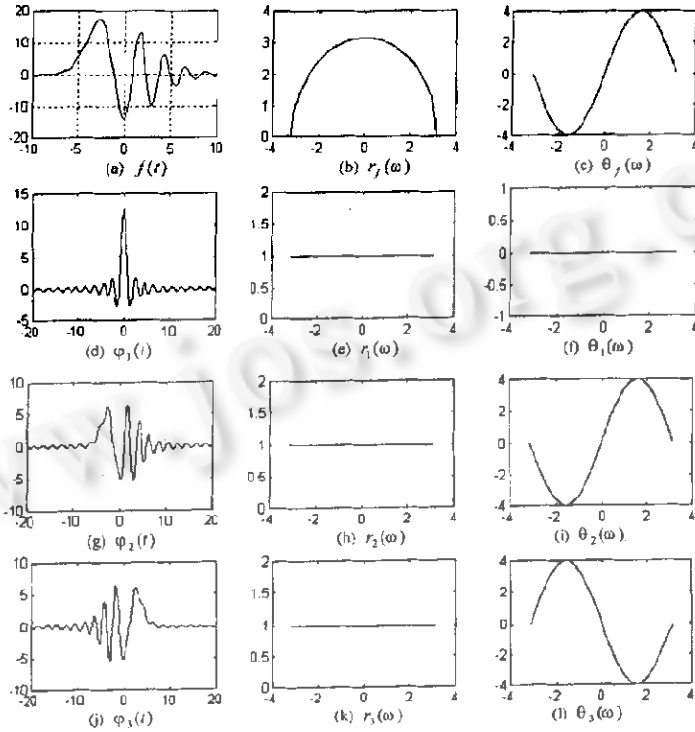


图 3

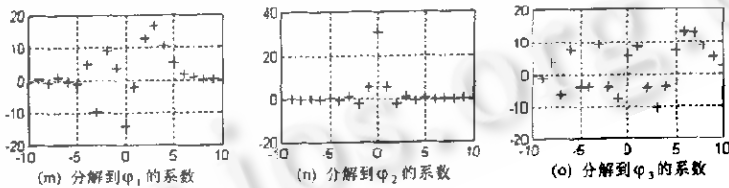


图 4 小波分解得到的小波系数

给定信号 $f(t)$ 的离散采样值 $f(0), f(1), \dots, f(N-1)$ 之后, 我们可以通过离散 Fourier 变换, 得到 $f(t)$ 的离散频谱值 $F(0), F(1), \dots, F(N-1)$. 我们知道, $f(0), f(1), \dots, f(N-1)$ 与 $F(0), F(1), \dots, F(N-1)$ 之间满足下述关系:

$$F(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(l) e^{-i(2\pi kl)/N} \quad (8)$$

$$f(l) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{i(2\pi kl)/N} \quad (9)$$

如果时域采样间隔为 Δt , 则频域采样间隔为 $\frac{2\pi}{N\Delta t}$. 为了讨论方便, 我们做归一化处理, 即假设 $\Delta t = 1$, 则 $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$.

令
$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{i\frac{2\pi k}{N}t}$$

则 $\tilde{f}(t)$ 是一个周期函数, 其周期为 N . $\tilde{f}(t)$ 的一个周期 $\tilde{f}|_{t \in [0, N)}$ 又可以视为 $f(t)$ 在 $[0, N)$ 上的一个近似, 这是因为

$$\tilde{f}(0) = f(0), \tilde{f}(1) = f(1), \dots, \tilde{f}(N-1) = f(N-1)$$

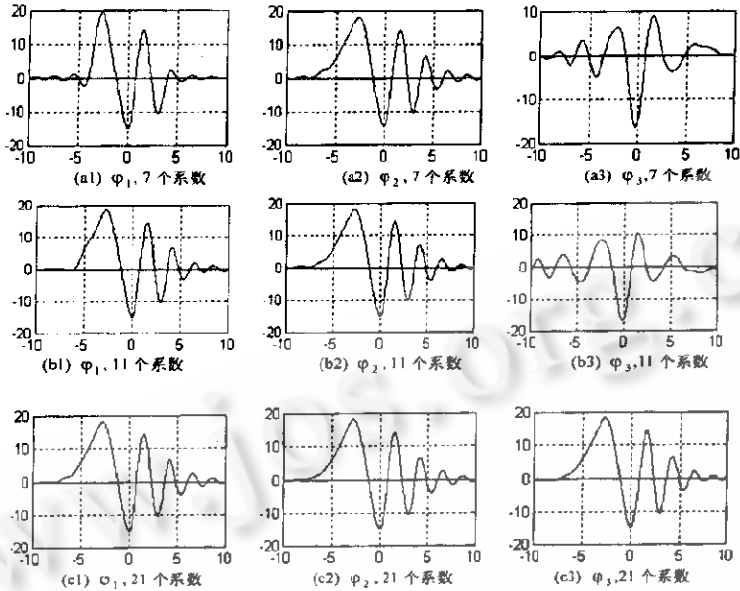


图5 由不同的基重构原函数

我们得到的采样值是在 $t \in [0, N)$ 内的, 所以我们只关心 $t \in [0, N)$ 时 $f(t)$ 与小波 $\Psi(t)$ 进行变换得到的系数, 我们将

$$c(k) = \int f(t) \cdot \Psi(t-k) dt$$

$$c(k) = \int \tilde{f}(t) \cdot \Psi(t-k) dt \tag{10}$$

用 $\tilde{f}(t)$ 来代替, 于是, 求小波系数的方法如下.

$$c(k) = \int \tilde{f}(t) \cdot \Psi(t-k) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} \tilde{f}(\omega) \cdot \tilde{\Psi}(\omega) e^{-ik\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} \tilde{f}(\omega) \cdot \tilde{\Psi}(\omega) e^{-ik\omega} d\omega \tag{11}$$

在式(11)中, 因为小波函数 $\Psi(t)$ 是带限的, 所以我们设 $\tilde{\Psi}(\omega)$ 的频带宽度不超过 Δ .

对式(11)求值时, 需要知道 $\tilde{f}(\omega)$ 的表达式. 我们知道

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{i\frac{2\pi k}{N}t} \tag{12}$$

其 Fourier 变换是一些 δ -函数的和.

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}) \tag{13}$$

δ -函数是一个广义函数, 其定义如下:

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } \delta(x) = 0, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{14}$$

综上可得

$$c(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} \tilde{f}(\omega) \cdot \tilde{\Psi}(\omega) e^{-ik\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}) \cdot \tilde{\Psi}(\omega) e^{-ik\omega} d\omega$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \int_{\Delta} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}) \cdot \Psi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \Psi(\frac{2\pi k}{N}) e^{-i(\frac{2\pi k}{N})t}
 \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)具有离散 Fourier 变换的形式,而且满足 $\delta\omega\delta t = \frac{2\pi}{N}$,可以采用 FFT 来计算,一次可以计算出 N 个数,所用时间为 $O(N\log N)$ 。更为重要的是,如果我们对 $f(t)$ 的采样满足采样定理的要求,则 $\tilde{f}(t)$ 能够完全代替 $f(t)$,这时用该算法求出的小波系数是没有误差的;若对 $f(t)$ 的采样不满足采样定理的要求,则利用 $\tilde{f}(t)$ 代替 $f(t)$ 带来的误差仅是采样时带来的,不是用带限小波分析时带来的。

5 结 论

本文在混合正交小波基的基础上构造了混合小波包。混合小波包不仅可以调整频域的分辨率,还可以在不失正交性的条件下调整函数波形,它比传统小波包具有更强的灵活性。通过实验我们发现这种灵活性能够带来很多好处,例如减少分解系数等。我们采用了在频域上计算的快速算法来计算小波系数,快速算法的存在增强了混合小波基与混合小波包的应用前景。

参考文献

- 1 Chen Yu-yu, Zhang Bo. Band-limited combined orthonormal wavelet bases. Australia; IEEE TENCON'96, 1996
- 2 Coifman R R, Wickerhauser M V. Entropy-based algorithms for best basis selection. IEEE Transactions Information on Theory, May 1992, 38(2), 713~718
- 3 Sweldens Wim. Wavelets, what next? In: Proceedings of the IEEE. Apr. 1996, 84(4): 680~685
- 4 Young R K. Wavelet theory and its applications. Kluwer Academic Publishers, 1993
- 5 Zou Feng, Gallagher Richard R. Maximum energy principle of multiple transforms in data compression. IEEE Transactions on Signal Processing, Dec. 1995, 43(12), 3036~3042
- 6 Mallat S. Multiresolution representation and wavelets [Ph. D. Thesis]. Pennsylvania University, 1988
- 7 Meyer Y. Ondelettes et operateurs, Hermann, 1988
- 8 Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. IEEE Transactions on PAMI, Jul. 1989, 11(7): 674~693
- 9 DeStefano Joseph J. Computing wavelet coefficients of band-limited functions. In: Proceedings of the International Conference on Wavelets and Applications. Toulouse. 1992. 199~202

Combined Wavelet Packets and Best Bases

CHEN Yu-yu ZHANG Bo

(Department of Computer Science and Technology Tsinghua University Beijing 100084)

Abstract In this paper, the concept of CWP (combined wavelet packets) is proposed. CWP can be obtained from COWB (combined orthonormal wavelet bases) which is composed of several orthonormal wavelet bases having the same space structure in a multiresolution analysis view. Compared with traditional wavelet packets, CWP have not only better frequency localization, but also waveshape variation. The wavelet coefficients can be computed by a fast algorithm which computes in the frequency domain and uses FFT.

Key words Multiresolution analysis, combined orthonormal wavelet basis, wavelet packets.

Class number TP301.6