

椭圆定位的测距算法*

李申浩, 冯秀芳

(太原理工大学 计算机科学与技术学院, 山西 晋中 030600)

通讯作者: 李申浩, E-mail: 1345400048@qq.com



摘要: 针对无线传感器网络定位中传统的三边测距算法, 为了降低算法中每个已知节点均具有发射和接收信号能力而造成的高额成本, 提出了已知节点单发射多接收的定位模型, 并基于该模型提出了椭圆定位算法. 该算法通过刻画未知节点距已知节点可能的椭圆运动轨迹, 进而运用牛顿迭代法求解所构造的二次轨迹方程组, 实现对未知节点的定位. 同时, 对定位可能出现的错误进行了概率分析, 得出错误概率与锚点个数之间的函数关系. 实验定位与传统算法相比降低了实验成本, 证明了锚点的线性增加会使错误概率指数趋势减少的特征, 最后针对该定位错误问题提出了合理的解决方案.

关键词: RSSI; 定位模型; 测距算法; 椭圆定位算法; 锚点定位

中文引用格式: 李申浩, 冯秀芳. 椭圆定位的测距算法. 软件学报, 2016, 27(Suppl. (1)): 90–101. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/16010.htm>

英文引用格式: Li SH, Feng XF. Ranging algorithm based on ellipse localization. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2016, 27(Suppl. (1)): 90–101 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/16010.htm>

Ranging Algorithm Based on Ellipse Localization

LI Shen-Hao, FENG Xiu-Fang

(School of Computer Science and Technology, Taiyuan University of Technology, Jinzhong 030600, China)

Abstract: The high cost of wireless sensor network localization in the traditional triangular locating algorithm is due to the fact that each known nodes have the ability to transmit and receive signals. To address the issue, a location model is proposed to treat the known nodes as single-emitter and multi-receiver. Based on the model an ellipse localization algorithm is formulated. Localization of unknown nodes is achieved by characterization of the possible elliptical trajectory of unknown nodes from known nodes. Probabilistic analysis is also performed on positioning error. A proof is presented to show that linear increase in the number of anchors corresponds to exponential decrease of the error probability. Finally, a reasonable solution is provided to solve the positioning error issue.

Key words: RSSI; location model; location algorithm; ellipse localization algorithm; anchor positioning

无线传感器网络(wireless sensor network, 简称 WSN)作为一种定位工具, 在目标跟踪、入侵检测等领域倍受青睐^[1]. 对于无线传感器的定位研究, 一方面在于定位的精度, 从定位的质量角度分析; 另一方面在于定位综合性研究, 在保证精度条件下降低成本; 还有一方面在于定位技术的研究, 运用高新技术实验定位, 如超声波定位和红外定位技术等. 文献[2]对 WSN 的基本定位算法有了比较全面的总结和概括, 在基于测距算法中, 主要是以 RSSI 和 TOA 两种测距算法作为主流. 但是算法中的锚点对于整个系统起到了至关重要的作用且不允许有较大的错误和差错, 此外, 极大似然方法的引入又为距离相关算法优化, 使得算法精度逐步完善^[3–6]. 文献[3]中做了 20 个~140 个锚点对定位精度的实验研究, 验证了算法的定位精度受环境影响较小, 算法的成本却没有加以考虑. 物联网定位的原始模型最初运用于安全反恐、国防军事、环境监测的预报位置信息, 以其严格而较为精准的定位

* 基金项目: 国家自然科学基金(61472272)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (61472272)

收稿时间: 2016-05-31; 采用时间: 2016-09-29

信息而广泛发展起来^[7-11].但是在民事商业等非军事领域中,无需军事中的高精度要求,反而更在乎的是成本因素.因此,如果可以进一步优化一个锚点的造价,那么多锚点系统中会有较为显著的成本改变.

此外,文献[9-10]虽然提出了椭圆定位算法,在一定程度上降低了成本,但是对算法的基本步骤表述与实际问题的应用难以嵌套,算法由圆形改为椭圆形后,不能保证 3 个同焦点椭圆一定交于一点,即存在算法的定位错误问题,且在定位错误的问题上没有做出相应的说明.这使得椭圆定位算法的推广受到了阻碍.为了解决上述问题,推广低成本的定位算法,使得在非军事或非严格保证定位精度的领域降低成本,本文对算法坐标化,通过解析几何的知识给出了位置坐标的迭代公式,构造椭圆定位算法并清楚地给出了对于未知节点的计算方法,最后通过仿真实验证明了结果是可行的.此外,对于椭圆的定位错误现象予以了深入分析,进一步发现了错误概率只可以逐步降低而不可以消除,故受限应用于军事领域等不允许错误发生的系统之中.之后给出了相应的解决方案,使得成本线性增加的同时指数大幅度地降低错误发生的概率.通过函数关系表明该方案可行,同时也提供了相应的错误概率计算公式,并运用仿真实验加以证明,进而根据设备的条件充分而合理地布置锚点直至错误概率达到系统要求.

1 基本模型概述

1.1 RSSI的三边测量法算法

在物联网的定位研究领域,RSSI算法作为一个主流方向已经被广泛应用.RSSI通过接收到的信号强弱测定信号点与接收点的距离,进而根据相应数据进行定位计算的一种定位技术.此外,由于文献[5]证明其受环境影响较小,且可通过均值方法消除影响,故本文主要在 RSSI 算法的基础上予以改进,且无需考虑外界环境因素.下面简单阐述该算法:

- 1) 利用 RSSI 技术,通过建立好的信号传输模型计算未知节点与邻居节点间的距离.
- 2) 利用数学模型计算出未知节点的位置坐标.
- 3) 对估算出的未知节点的坐标进行修正,进一步提高算法的定位精度.

RSSI 算法中利用的 Shadowing 模型测距公式为

$$PL(d) = PL(d_0) - 10n \lg(d/d_0) + X_\sigma \quad (1)$$

其中, d 为接收端到信源的距离, X_σ 为误差.

1.2 TOA测距

TOA 技术通过测量信号的传播时间来计算距离,最典型的应用就是 GPS 定位系统.通常在节点上安装超声波收发器和射频收发器,测距时锚节点同时发送超声波和电磁波,接收节点通过两种信号到达时间差来计算两点之间的距离,其误差大小取决于信道状态.

2 椭圆定位算法的构造

2.1 三边测距模型

无论是基于 RSSI 的三边测量法测距还是 TOA 测距,都可以通过距离来对处于锚点之中的未知节点定位,且锚点越多,精度越好.

首先我们观察如图 1 所示的三边测量定位的示意图.其中, ABC 是 3 个锚点, D 为未知节点,如果我们假设其中的一个锚点因故障不能发射无线波信号,但是可以接收信号,那么,针对原有算法进行改进,使得这 3 个节点依然可以实现对未知节点的定位问题,假设 A 锚点的发射机制发生故障, D 为需要定位的位置节点,许多文献给出了相应的解决算法,算法步骤如下:

- 1) 根据完好的两个锚点可以定位计算得到两个可行解,其中一个未知节点所在位置.
- 2) 取较远处一个完好节点,分别对两个可能位置做出判断,计算置信度.

3) 取置信度较高的点作为所求未知节点.

但是,如果两个节点坏掉,这种算法就无能为力了,故对三边测距算法进行改进.

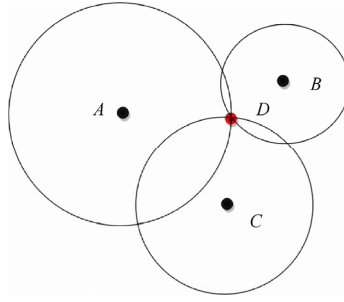


Fig.1 Ranging schematic trilateral approach

图 1 三边测距方法示意图

2.2 三边测距模型的改进

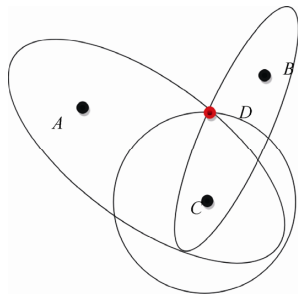


Fig.2 Improved trilateral preliminary schematic ranging algorithm

图 2 对三边测距算法的初步改进示意图

现在假设 AB 两个锚点发射机制发生故障,即只有 C 锚点完好,设计算法定位节点 D.在该条件下,只能利用 C 节点发射出来的信号在未知节点 D 处发生反射,其中的 3 条反射线被 ABC 所接收.显然,锚点必定在以 C 为圆心,测距为半径的圆上,而对于 AB 所接收到的信号强度,我们只能确定由 C 发射到 A 或 B 的距离 d_a 和 d_b ,那么可能点组成的集合将不再是圆,如图 2 所示.

根据数学知识可知,一个动点到两个定点的距离和恒定,那么该动点所构成的轨迹为椭圆,两定点为该椭圆的焦点.

于是,就以 AC 为焦点的椭圆而言,点 A 和 C 之间的距离 $|AC|$ 是该椭圆的焦距,而无线电波所传播过的路径 d_a 是该椭圆的长轴长度,该椭圆与方程

$$\frac{x^2}{d_a^2} + \frac{y^2}{d_a^2 - |AC|^2} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

形状相同.

原椭圆的中心是 AC 的中点,即 $\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right)$,且该坐标也可作为标准方程平移的向量坐标.

标准方程旋转 α 角度后得到:

$$\frac{(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2}{d_a^2} + \frac{(y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2}{d_a^2 - |AC|^2} = \frac{1}{4} \quad (3)$$

旋转加向量平移后就会得到方程:

$$\frac{\left((x - \frac{x_A + x_C}{2}) \cos \alpha + (y - \frac{y_A + y_C}{2}) \sin \alpha\right)^2}{d_a^2} + \frac{\left((y - \frac{y_A + y_C}{2}) \cos \alpha - (x - \frac{x_A + x_C}{2}) \sin \alpha\right)^2}{d_a^2 - |AC|^2} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

为了解该方程模型,将圆形方程与椭圆方程联立求解二元二次方程,而方程的根的个数至多为 4 个,可以依次带入 4 次来验证,从而可以计算得出这些解中符合题意的一个解,进而确定未知节点的位置.然而,锚点定位时本身存在不可避免的系统误差,而求解方程的精确解后与实际问题关联又需要精确到一定的有效数位,故可

以采用数值分析的方法求非线性齐次方程的近似解,近似解达到有效数位即可.

2.3 椭圆定位算法

通过上述分析可以发现,在两个锚点的发射机制发生故障的条件下,依然可以实现对未知节点的定位.但是如果这样,在 3 个锚点所构成的锚点组中,由于有的锚点具有发射机制,而有的却没有,就不能保证所有锚点都是一致的.那么,为了保证锚点组的一致性,下面将完好的锚点 C 的发射机制与接收机制分离为只具有接收功能的节点 C 和只具有发射功能的节点 E,可以得到如下算法:

A,B,C 这 3 个节点分别与 E 组合成 3 个椭圆,长轴分别为 ABC 接收信号后的测距 d_a, d_b 和 d_c ,焦距分别为 AE, BE 和 CE.由于该算法的图示由椭圆组成,故命名为椭圆定位算法,如图 3 所示.

因此,将 3 个方程联立即可,下面对联立方程求解.

以椭圆 AE 和 BE 为例,并记它们分别在原标准椭圆的基础上旋转角度分别为 α 和 β ,

$$\begin{cases} \left[\frac{(x - \frac{x_A + x_E}{2}) \cos \alpha + (y - \frac{y_A + y_E}{2}) \sin \alpha}{d_a^2} \right]^2 + \left[\frac{(y - \frac{y_A + y_E}{2}) \cos \alpha - (x - \frac{x_A + x_E}{2}) \sin \alpha}{d_a^2 - |AE|^2} \right]^2 = \frac{1}{4} \\ \left[\frac{(x - \frac{x_B + x_E}{2}) \cos \beta + (y - \frac{y_B + y_E}{2}) \sin \beta}{d_b^2} \right]^2 + \left[\frac{(y - \frac{y_B + y_E}{2}) \cos \beta - (x - \frac{x_B + x_E}{2}) \sin \beta}{d_b^2 - |BE|^2} \right]^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (5)$$

将 x 作为已知量, y 作为方程未知量对 3 个椭圆中的任意两个求解,解第 1 个方程并整理化简,得到:

$$y = \frac{y_A + y_E}{2} + \frac{x \sin \alpha \cos \alpha}{(d_a^2 - |AE|^2) \sin^2 \alpha + d_a^2 \cos^2 \alpha} \pm \frac{d_a \sqrt{d_a^2 - |AE|^2} \sqrt{(d_a^2 - |AE|^2) \sin^2 \alpha + d_a^2 \cos^2 \alpha} - 4x^2}{2(d_a^2 - |AE|^2) \sin^2 \alpha + d_a^2 \cos^2 \alpha} \quad (6)$$

但是对于三角函数值,我们初步只能通过坐标计算得到正切值,即 $\tan \alpha = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A}$,代入整理 y 得到:

$$y = \frac{x \tan \alpha}{(d_a^2 - |AE|^2) \tan^2 \alpha + d_a^2} + \frac{y_A + y_E}{2} \pm \frac{d_a \sqrt{d_a^2 - |AE|^2} \sqrt{(d_a^2 - |AE|^2) \tan^2 \alpha + d_a^2 - 4x^2(1 + \tan^2 \alpha)} \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{2(d_a^2 - |AE|^2) \tan^2 \alpha + d_a^2} \quad (7)$$

其中, $|AE|^2 = (x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2$.

记方程的两个根分别为 y_{A1} 和 y_{A2} ,同理,解另一个椭圆可以得到方程的两个根,分别为 y_{B1} 和 y_{B2} .

2.4 椭圆定位算法的模型求解

对于二元二次方程的求解,虽然有 MATLAB 提供的 solve 函数进行求解的方法,但是该函数计算量大,对计算机的处理器要求高,因此对于该工程问题可以求其近似解,近似精度在 10^{-7} 内的 float 型完全不影响实际问题的解决,下面用牛顿迭代法求解该二元二次方程问题.记

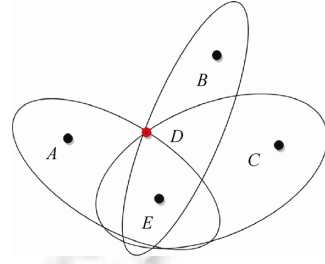


Fig.3 Ellipse localization algorithm schematic

图 3 椭圆定位算法示意图

$$\begin{cases} f_1 = \frac{\left(x - \frac{x_A + x_E}{2}\right)\cos\alpha + \left(y - \frac{y_A + y_E}{2}\right)\sin\alpha}{d_a^2} + \frac{\left(y - \frac{y_A + y_E}{2}\right)\cos\alpha - \left(x - \frac{x_A + x_E}{2}\right)\sin\alpha}{d_a^2 - |AE|^2} - \frac{1}{4} \\ f_2 = \frac{\left(x - \frac{x_B + x_E}{2}\right)\cos\beta + \left(y - \frac{y_B + y_E}{2}\right)\sin\beta}{d_b^2} + \frac{\left(y - \frac{y_B + y_E}{2}\right)\cos\beta - \left(x - \frac{x_B + x_E}{2}\right)\sin\beta}{d_b^2 - |BE|^2} - \frac{1}{4} \end{cases} \quad (8)$$

分别对其求偏导数,有:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{(2x - x_A - x_E)\cos^2\alpha + (2y - y_A - y_E)\sin\alpha\cos\alpha}{d_a^2} - \frac{(2y - y_A - y_E)\sin\alpha\cos\alpha - (2x - x_A - x_E)\sin^2\alpha}{d_a^2 - |AE|^2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{(2x - x_A - x_E)\sin\alpha\cos\alpha + (2y - y_A - y_E)\sin^2\alpha}{d_a^2} - \frac{(2y - y_A - y_E)\cos^2\alpha - (2x - x_A - x_E)\sin\alpha\cos\alpha}{d_a^2 - |AE|^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{(2x - x_B - x_E)\cos^2\beta + (2y - y_B - y_E)\sin\beta\cos\beta}{d_b^2} - \frac{(2y - y_B - y_E)\sin\beta\cos\beta - (2x - x_B - x_E)\sin^2\beta}{d_b^2 - |BE|^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{(2x - x_B - x_E)\sin\beta\cos\beta + (2y - y_B - y_E)\sin^2\beta}{d_b^2} + \frac{(2y - y_B - y_E)\cos^2\beta - (2x - x_B - x_E)\sin\beta\cos\beta}{d_b^2 - |BE|^2} \end{cases} \quad (9)$$

根据雅可比行列式内的矩阵 $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$, 易求得 $J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial y} & -\frac{\partial f_1}{\partial y} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \end{bmatrix}$.

于是,迭代公式:

$$\begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix} - J^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(k)} + \frac{f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y}}{|J|} \\ y^{(k)} + \frac{f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x}}{|J|} \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中, $|J| = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial x}$.

为了保证方程的解的准确性,初始解选为四边形 $ABCE$ 的重心 $\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_E}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_E}{4}\right)$.

2.5 椭圆定位算法的实验仿真

将图形以点 E 为原点,放入坐标系,不难观看其大致坐标: $A(-3,2)$, $B(2,5)$ 和 $C(4,2)$,如图 4 所示.

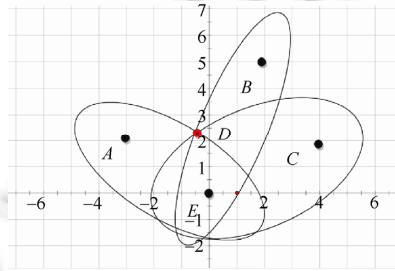


Fig.4 Graph of ellipse localization algorithm with coordinate

图 4 椭圆定位算法的坐标图

根据算法编程后,精度控制为 0.5,以上述坐标为例,C 程序运行定位为 $x=-0.577606, y=2.598803$,与图中坐标接近,算法迭代使用了 4 次.后面多次重复实验,对未知节点多次定位,详情如下.

2.5.1 仿真实验基本设置

实验环境:设置 $10\text{m} \times 10\text{m}$ 的非封闭理想环境,忽略无线波的衍射,且由信号发射机经信道传递后达到接收点.因为环境理想,故不再考虑卡尔曼滤波过程,但在实际操作中不可忽略.

实验测距模型:对数距离路径损耗模型,模型中用到了公式(1).环境理想,故忽略高斯衰减因素,在实际操作中还需根据实际环境计算高斯衰减,但针对本实验而言,仅仅发生对数型衰减.

基本元件:信号发射器 E ,信号接收器 ABC .

模型调整:每次实验中,除 ABC 重新分布以外,其余条件不变.对于信号接收器的分布,以点 A 为例,算法如下:

以点 D 为中心做二维正态随机分布,分布获得坐标后,为了保证 A 点距离 D 点不会太近影响实验,后按照向量 $\overrightarrow{DA}$ 方向平移一定的距离,距离为服从 $(0,1)$ 的均匀分布的数值与 $|DA|$ 的乘积. BC 点同理.

信号发射器配置:将信号发射配置于接收器可接收的频段.由于 IEEE802.11 规定了在无线局域网中,设备的最大发射功率为 $20\text{dBm}(100\text{mW})$,故初始信号节点功率大小 10dBm .

2.5.2 实验分析

实验中设置未知节点的位置为 $(-0.5, 2.5)$,对 A, B, C 这 3 个已知节点随机分配,精度控制为 0.5.首先对实验进行 50 次仿真,仿真结果如图 5 所示.下面对实验结果进行分析与处理.

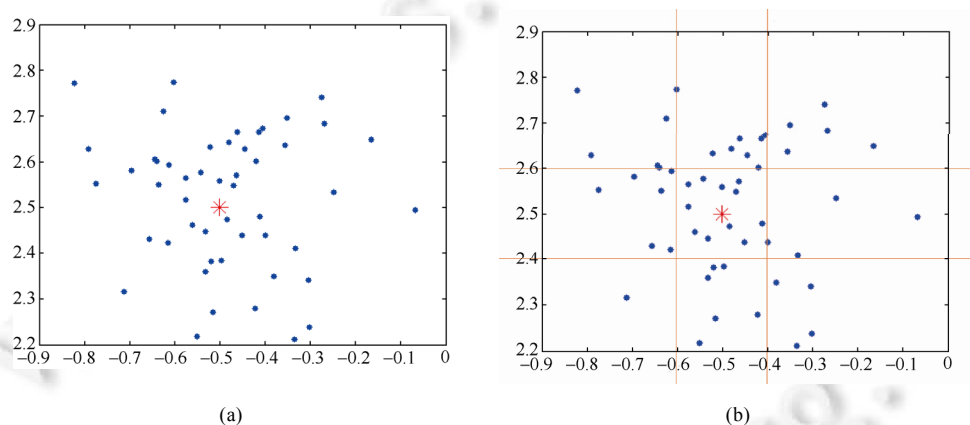


Fig.5 Graph of experimental simulation about algorithm with coordinate

图 5 算法的实验模拟坐标图

猜想这些定位节点服从二维高斯分(又称二维正态分布),参考文献[11]对二维高斯分布的假设检验给出了较为实用的一种方法,下面运用该方法对猜想做假设检验(证明).

将数据如图 5(b)分割为 9 个互不相交的矩形,对每个矩形格子内的数据进行统计,见表 1.

Table 1 Table of frequency simulation experiment

表 1 仿真实验频数统计表

	X1	X2	X3	Sum x
Y1	5	8	5	18
Y2	6	12	3	21
Y3	1	6	4	11
Sum y	12	28	12	50

表 1 中的 $X1$ 表示区间 $(-\infty, -0.6)$, $X2$ 表示区间 $(-0.6, -0.4)$, $X3$ 表示区间 $(-0.4, +\infty)$, $Y1$ 表示区间 $(-\infty, 2.4)$, $Y2$ 表示区间 $(2.4, 2.6)$, $Y3$ 表示区间 $(2.6, +\infty)$, $\text{Sum } x$ 表示行和, $\text{Sum } y$ 表示列和.依据文献[11]中检验统计量公式:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{(n_{ij} - n_i n_j / n)^2}{n_i n_j / n},$$

计算得到 $c^2=3.38$, 而通过查表得到 $\chi_{0.05}^2(4)=9.49$, $\chi_{0.10}^2(4)=7.78$, $\chi_{0.25}^2(4)=5.39$, 不难发现, 检验值 c^2 都比它们要小, 这意味着在不同水平 $\alpha=0.05, \alpha=0.25, \alpha=0.50$ 上都不能拒绝原假设, 故可验证样本服从二维高斯分布. 为了更加直观地发现该二维分布的分布情况, 下面做 1 000 次仿真实验以观察其二维分布的趋势(如图 6 所示).

在没有人干预的情况下, 运用仿真传统的三边定位算法和本文所述算法定位, 分别用圆形和三角形绘制散点并连接, 对比的误差累计分布结果如图 7 所示, 经分析, 本文所述算法在定位精度方面不具有明显的优势.

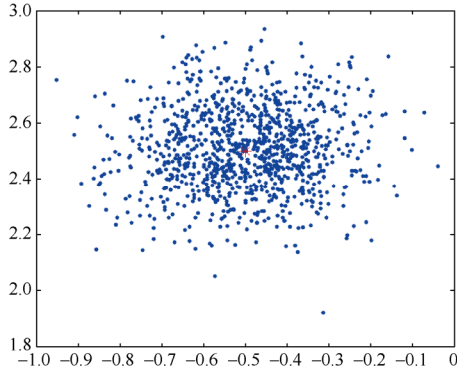


Fig.6 Plot targeting multiple simulations
图 6 多次模拟定位坐标

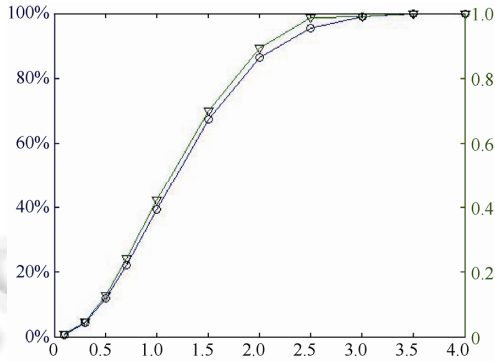


Fig.7 Figure error accumulation function
图 7 与传统算法对比的误差累计函数

2.5.3 实验结论

在精度控制的范围内可以实现包含允许误差的定位. 通过 1 000 次仿真的实验分布图表明, 当实验次数较多时, 会有极少数的点超出实验预设精度, 但误差不会太大. 绝大多数点在公式(14)所表示的曲线周围. 根据切比雪夫大数定律, 该实验有着较高的准确性. 测量点所构成的样本服从二维正态分布. 在实际测距中, 受环境因素的影响, 误差累计分布函数在公式(12)所述函数周围浮动, 函数大致趋势不变. 如果人为地舍弃或筛选相关性较高的定位点, 会在一定程度上提高定位精度. 通过对比传统算法可以发现, 该算法在精度方面没有较为明显的改观.

3 关于信号发射器的错误定位分析

3.1 错误定位的不可避免性

由图 4(改进算法的坐标图)可以看出, 在坐标负半轴的 $-1.5 \sim -2$ 区域内, 有三椭圆交于一点的趋势, 当传感器的精度有所偏差时, 会产生错误定位. 文献[5]中证明得出了在 RSSI 定位算法中, 信标节点越多, 误差越小的结论, 而对于本文涉及的算法, 该结论同样适用. 为了避免此类问题的发生, 引入其他锚点再定义第 4 个锚点的相关函数:

$$f_4 = \frac{\left(\left(x - \frac{x_D + x_E}{2} \right) \cos \delta + \left(y - \frac{y_D + y_E}{2} \right) \sin \delta \right)^2}{d_D^2} + \frac{\left(\left(y - \frac{y_D + y_E}{2} \right) \cos \delta - \left(x - \frac{x_D + x_E}{2} \right) \sin \delta \right)^2}{d_D^2 - |DE|^2} - \frac{1}{4} \quad (11)$$

取函数的绝对值最小的点为最优解. 且不难发现, 锚点个数与算法的时间复杂度呈线性相关. 再次观察锚点定位, 两个锚点引入时会生成至多 4 个可行解, 当引入第 3 个锚点时会有至多 2 个可行解, 再引入第 4 个锚点可概率性将其区分开来. 当第 4 个椭圆所探测的全部可能点的位置集合为椭圆时, 如果椭圆恰好贯穿两个可行解位置节点, 则难以区分两个可行解. 可见, 该定位错误具有不可避免的性质.

3.2 基本情况分析与定位错误概率的计算

下面对引入一个新锚点后依然不能实现精确定位的情况的充要条件求解.为描述方便,记两个可行解的节点分别为 X 和 Y .

3.2.1 直线轨迹情况的结论与证明

情况 1:点 E (信号发射器节点)恰好在两个可行解的节点所构成线段的中垂线上.

结论:在这种情况下,如果构造一个椭圆依然难以区分可行解,那么所构造的这个椭圆的另一个焦点也在这条中垂线上.

证明:根据中垂线定理,易知 $|XE|=|YE|$.

设所构造的椭圆的另一个焦点为 F ,则有 $|XE|+|XF|=|YE|+|YF|=2 \times a$ (a 为椭圆的长半轴长度).

故 $|XF|=|YF|$,根据中垂线定理的逆定理, Y 点也在该中垂线上. $\square$

3.2.2 直线轨迹情况的概率计算

情况 1 发生的概率 $P_1 = \frac{w_d}{|XY|}$,其中, w_d 表示因精度原因所形成的中垂线带宽(理想状态下,中垂线为直线,带宽为 0).

在情况 1 发生的条件下, F 点落在中垂线带上,无法形成定位的条件概率为 $P(\text{Error1} | P_1) = \frac{w_d}{w_s}$,其中, w_s 表示线段 XY 方向的系统宽度.

综上,错误定位 1 发生的概率为

$$P(\text{Error1}) = P_1 \times P(\text{Error1} | P_1) = \frac{w_d^2}{w_s \times |XY|} \quad (12)$$

3.2.3 曲线轨迹情况的结论与证明

情况 2:点 E (信号发射器节点)不在两个可行解的节点所构成线段的中垂线上.

结论:在这种情况下,如果构造一个椭圆依然难以区分可行解,那么所构造的这个椭圆的另一个焦点的轨迹为以两个可行解为焦点,且过信号发射器的单支双曲线上.

证明:此时,有 $|XE| \neq |YE|$,为描述方便,假设 $|XE| > |YE|$.另设所构造的椭圆的另一个焦点为 F ,则有 $|XE|+|XF|=|YE|+|YF|=2 \times a$ (a 为构造的椭圆的长半轴长度).

整理变形得 $|XF|-|YF|=|YE|-|XE|$ (定值,且为双曲线实轴长度),故根据圆锥曲线定义可知,点 F 是以 X 和 Y 为焦点,过点 E 的一支双曲线,点 E 不一定在 XY 线段上.

同理, $|XE| < |YE|$ 的情况也成立,轨迹为另一支单支曲线. $\square$

3.2.4 曲线轨迹情况的小系统概率计算

情况 2 发生的概率为双曲线带宽面积与系统面积的比值,下面对双曲线带宽面积求解.根据双曲线定义得到双曲线的焦距为 $|XY|$,双曲线的实轴长度 $|YE|-|XE|$,如图 8 所示.

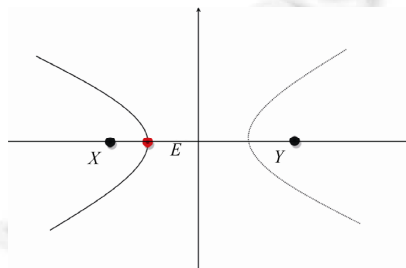


Fig.8 Anchor track positioning error occurred schematic

图 8 发生定位错误的锚点轨迹

当该系统跨度较小时,可以通过双曲线带面积微元为曲线的弧长微元乘以带宽来计算,其中带宽为常数,从而双曲线带宽面积可用曲线的弧长乘以带宽计算.根据弧长计算公式,有:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (13)$$

假设该系统为矩形,中心在图 6 所示的原点,则矩形的 4 个顶点坐标假设为 $(\pm m, \pm n)$.

将 $x=m$ 带入双曲线方程中,得到 $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{m^2 - a^2}$, 则顶点 $\left(\pm m, \pm \frac{b}{a} \sqrt{m^2 - a^2}\right)$, $\left(\pm \frac{a}{b} \sqrt{1 + \frac{n^2}{b^2}}, \pm n\right)$ 所构成的矩形均为系统矩形的一部分,可以用于计算得到概率上界,由于原理相同,下面以 $\left(\pm m, \pm \frac{b}{a} \sqrt{m^2 - a^2}\right)$ 部分为例予以说明.

针对双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 可以构造参数方程 $x = a \sec \theta$, $y = b \tan \theta$, 且参数在一个周期内的取值范围 $\left(-\arctan \frac{b}{a}, \arctan \frac{b}{a}\right) \cup \left(\pi - \arctan \frac{b}{a}, \pi + \arctan \frac{b}{a}\right)$. 顶点与原点连线与横轴正方向夹角的正切值为 $\frac{b \sqrt{m^2 - a^2}}{am}$. 此外, $\frac{dy}{d\theta} = b \sec^2 \theta$, $\frac{dx}{d\theta} = a \tan \theta \sec \theta$, 从而带入弧长计算公式整理化简后得到系统内双曲线弧长 $\int_0^{\arctan \frac{b \sqrt{m^2 - a^2}}{am}} \sec^2 \theta \sqrt{b^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta$.

于是,情况 2 的概率:

$$P_2 \leq \frac{4 \int_0^{\arctan \frac{b \sqrt{m^2 - a^2}}{am}} \sec^2 \theta \sqrt{b^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta \times w_d}{4m \cdot \frac{b}{a} \sqrt{m^2 - a^2}} = \frac{aw_d \int_0^{\arctan \frac{b \sqrt{m^2 - a^2}}{am}} \sec^2 \theta \sqrt{b^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta}{bm \sqrt{m^2 - a^2}} \quad (14)$$

由于该公式中的定积分部分不可积,故联系实际后可采用积分的数值方法求解.

3.2.5 曲线轨迹情况的大系统概率计算

如果定位系统跨度较大,上述对于概率的计算方法可能会造成较大的误差,需要根据双曲线带的两个边界的双曲线方程,计算二重积分从而求解出双曲线带面积.为方便计算,可将单支双曲线对称或旋转至一、四象限求解.由于曲线的对称性,下面仅对第一象限做分析.

如图 9 所示,将面积分割为 D1 和 D2 两个部分分别积分,即面积 $S = \iint_{D1} dS + \iint_{D2} dS$.

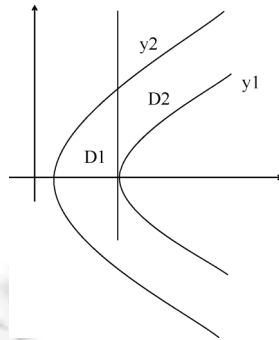


Fig.9 Double integral schematic hyperbolic band

图 9 双曲线带的二重积分

规定两个双曲线方程分别是 $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1$ 和 $\frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y_2^2}{b_2^2} = 1$, 其中, $a_1 < a_2$. 在第一象限内, 函数分别为 $y_1 = \frac{b_1}{a_1} \sqrt{x^2 - a_1^2}$ 和 $y_2 = \frac{b_2}{a_2} \sqrt{x^2 - a_2^2}$.

其中,

$$\iint_{D_1} dS = \int_{a_1}^{a_2} \int_0^{\frac{b_1}{a_1} \sqrt{x^2 - a_1^2}} dy dx = \int_{a_1}^{a_2} \frac{b_1}{a_1} \sqrt{x^2 - a_1^2} dx.$$

为求解方便, 在此引入一个积分公式:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \quad (15)$$

则

$$\iint_{D_1} dS = \frac{b_1}{a_1} \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{x^2 - a_1^2} dx = \frac{b_1}{2a_1} \left(x \sqrt{x^2 - a_1^2} - a_1^2 \ln |x + \sqrt{x^2 - a_1^2}| \right) \Big|_{a_1}^{a_2}.$$

最终求得:

$$\iint_{D_1} dS = \frac{a_2 b_1 \sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{2a_1} + \frac{a_1 b_1}{2} \ln \left| \frac{a_1}{a_2 + \sqrt{a_2^2 - a_1^2}} \right| \quad (16)$$

同理,

$$\iint_{D_2} dS = \int_{a_2}^m \int_{\frac{b_1}{a_1} \sqrt{x^2 - a_1^2}}^{\frac{b_2}{a_2} \sqrt{x^2 - a_2^2}} dy dx = \frac{b_2}{a_2} \int_{a_2}^m \sqrt{x^2 - a_2^2} dx - \frac{b_1}{a_1} \int_{a_2}^m \sqrt{x^2 - a_1^2} dx \quad (17)$$

其中,

$$\int_{a_2}^m \sqrt{x^2 - a_1^2} dx = \frac{m \sqrt{m^2 - a_1^2} - a_2 \sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{2} + \frac{a_1^2}{2} \ln \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{m + \sqrt{m^2 - a_1^2}},$$

$$\int_{a_2}^m \sqrt{x^2 - a_2^2} dx = \frac{m \sqrt{m^2 - a_2^2} + a_2^2 \ln \frac{m^2 - \sqrt{m^2 - a_2^2}}{a_2}}{2}.$$

公式中变量 b 为虚轴长度, 双曲线中可以通过公式计算得到.

于是, 情况 2 的概率:

$$P'_2 = \frac{\iint_{D_1} dS + \iint_{D_2} dS}{mn} \quad (18)$$

结果带入即可求得. 情况 2 发生后, 信号发射器只会落在双曲线的一支上, 故在情况 2 条件下, 实现错误定位的条件概率是情况 2 发生概率的一半. 故有 $P(\text{Error } 2) = \frac{1}{2} P'_2$.

3.3 定位错误的解决方案

综上所述, 经第 3.2 节的证明与计算, 增加一个锚点后, 定位错误的概率减少为原来的 $P(\text{Error})$ 倍. 定位错误发生后, 锚节点 $n=3$, 错误率 100%. 加入 x 个锚点后, 错误率因变量 y 与添加锚点个数的自变量 x 的函数关系式为

$$y = \prod_{i=1}^x P(\text{Error}_i) \quad (19)$$

其中, $j=1, 2$. 此时, 锚点个数 $n=3+x$, 那么错误率在 $P^x(\text{Error}_1)$ 和 $P^x(\text{Error}_2)$ 之间, 根据夹逼定理可知, 函数被两个指数函数所夹逼, 当自变量趋向无穷大时, 函数极限为 0, 函数形状近似于指数函数. 由于指数函数对数据的变动幅度较大, 故此方法可极大地降低定位错误的发生情况, 且定位错误的情况属于小概率事件. 因此, 可以通过调节锚点的个数进而确定成功率和置信度, 错误发生时仅需增加少量锚点即可高概率地消除错误定位.

3.4 定位错误的仿真模拟

为了探究定位错误问题,将第 2.5 节仿真实验予以修改.原实验所用定位方法为,如 ABC 不能实现定位,再添加与信号发射器 ABC 配置相同的锚节点,直至定位成功.现改为,若所添加的 3 个节点能够实现定位,则跳出添加节点的程序循环,省略该定位节点,若不能实现定位,则记录添加新的锚节点个数,并做 ABC 不能定位的实验 1 000 次.其余条件和实验配置与第 2.5 节相同,实验结果统计见表 2.

Table 2 Table for number and frequency of error in positioning

表 2 错误定位频数和概率统计表

插入节点数	Y	错误率 (%)
0	1 000	100
1	356	35.6
2	148	14.8
3	45	4.5
4	18	1.8
5	8	0.8
6	3	0.3
7	1	0.1

在表 1 中,Y 表示剩余为定位节点数.将数据散点依据最小二乘法原理拟合函数,如图 10 所示.

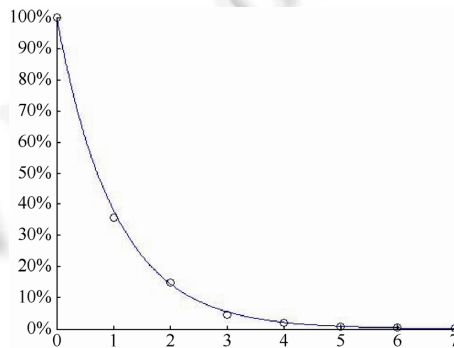


Fig.10 Positioning error probability chart

图 10 错误定位概率统计图

实验进一步证明了理论分析的正确性,错误率呈指数趋势递减,增加少量锚点即可大幅度消除错误定位.

4 算法的优势分析

4.1 成本优势

通过以上算法的改进,锚节点已经完全改进为已知节点,与以前的锚点相比,已经没有必要再在每一个锚点上添加信号发射器,这样,对于所需多锚点的物联网模型来说,无疑降低了很大一笔成本.

4.2 精度可控

由于采用的算法不断逼近真值,那么在程序之前加入宏定义就实现了程序的精度可控性.精度越高,计算机或者服务器所需内存和计算时间也会随之越增、越多,所以根据不同的需求定义不同的精度,可以在尽可能短的时间内达到定位目的.但是,受算法本身的限制,无法实现高精度的定位,根据参考文献[3]所述,可以分解为正方形区域,利用最大似然法等方法或者通过筛选横纵坐标具有相关性的一系列点来提高精度.

4.3 复杂度优势

在椭圆定位算法中,将对高次方程的求解问题优化为 10^{-7} 精度内的近似计算,降低了对 CPU 的配置要求.

算法虽然会存在定位错误的情况发生,但是随着锚点个数增加错误概率呈指数趋势减少,且算法的时间复杂度与锚点个数线性相关,空间复杂度不变.这样,算法的成功率只需少量时间即可大幅度提升.

5 结束语

通过对椭圆定位模型设计算法,建立坐标并给出未知节点的坐标计算公式从而实现定位.对于算法的定位分布问题,通过分析仿真实验的数据结果证明了定位服从二维正态分布,进而求解了理想条件下的误差累计分布函数.另一方面,将本算法与传统算法的定位精度进行了比较,从而说明了本算法的定位精度与传统定位算法相仿.针对模型发生的错误定位情况,本文根据两种情况分类讨论,最终提供了概率与锚点个数的函数关系和其他必要公式计算,给出了解决方法,并最终从理论和仿真实验两个方面证明了定位错误属于小概率事件,且随着锚点的线性增加,错误概率呈指数趋势减少.另外,为了更好地与实际运用系统相匹配,本文还提供了定位错误概率的解决方法,从而根据概率需求对系统的影响程度决定是否运用该算法模型.

References:

- [1] 彭宇,王丹.无线传感器网络定位技术综述.电子测量与仪器学报,2011,25(5):389-399. [doi: 10.3724/SP.J.1187.2011.000389]
- [2] 蔡晓宇,张爱清,叶新荣.基于 RSSI 的无线传感器网络节点定位算法研究.通信技术,2014,47(6):634-641. [doi:10.3969/j.issn.1002-0802.2014.06.011]
- [3] 杨文铂,邢鹏康,刘彦华.一种基于自适应测距模型的无线传感器网络定位方法.传感技术学报,2015,28(1):137-141.
- [4] 李银,汪洋,陈冬明.基于的无线传感器网络定位系统设计与实现.计算机测量与控制,2015,23(3):1061-1064.
- [5] 柳飞,鄧广增.基于 RSSI 和反馈机制的无线传感器网络定位优化算法.南京邮电大学学报(自然科学版),2015,35(2):108-113. [doi: 10.14132/j.cnki.1673-5439.2015.02.017]
- [6] Sun HQ, Zheng W, Cao Y, Wang ZF. A strategy for heterogeneous multi-robot self-localization system. In: Proc. of the 2011 Chinese Control and Decision Conf. (CCDC). 2011. 4206-4211.
- [7] Li B, Wang WJ, Yin QY, Li HX, Yang R. An energy-efficient geographic routing based on cooperative transmission in wireless sensor networks. Science China (Information Sciences), 2013,56(7). [doi: 10.1007/s11432-012-4757-6]
- [8] 方震,赵湛,郭鹏,张玉国.基于 RSSI 测距分析.传感技术学报,2007,20(11):2526-2530.
- [9] 徐会彬,施星君,薛小平.基于超宽带信号测距的室内异步椭圆定位算法.系统仿真学报,2013,25(6):1420-1424. [doi: 10.16182/j.cnki.joss.2013.06.032]
- [10] 宋国平,张家晨,邱阳,于雷.面向室内的基于异步 UWB 测距的椭圆位置估计算法.激光杂志,2014,35(11):63-67.
- [11] 朱湘赣.二维正态分布的假设检验.大学数学,2013,29(1):82-85.
- [12] Binder P, Muma M, Zoubir AM. Robust and adaptive diffusion-based classification in distributed networks. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2016,2016(1):1-13.
- [13] 邹东尧,李晨,刘碧微.基于垂直平分线的非测距定位算法.计算机测量与控制,2016,24(2):202-208. [doi: 10.16526/j.cnki.11-4762/tp.2016.02.056]
- [14] Abdulhalim MF, Attea BA. Multi-Layer genetic algorithm for maximum disjoint reliable set covers problem in wireless sensor networks. Wireless Personal Communications, 2015,80(1):203-227.
- [15] Meng XB, Liu Y, Gao XZ, Zhang HZ. A new bio-inspired algorithm: chicken swarm optimization. In: Proc. of the Int'l Conf. on Swarm Intelligence. 2014. 86-94.
- [16] 史跃飞,冯秀芳,高昊.一种基于动态锚节点的改进加权定位算法.计算机应用与软件,2013,30(10):151-154.
- [17] Chen YF, Shu L, Ortiz AM, Crespi N, Lv L. Locating in crowdsourcing-based dataspace: Wireless indoor localization without special devices. Mobile Networks and Applications, 2014,19(4):534-542.
- [18] 万瑞杰,雍俊海,施佩乐.实系数二元二次方程组分类求解方法.计算机辅助设计与图形学学报,2014,26(5):725-730.



李申浩(1992—),男,河北省冀州人,硕士生,主要研究领域为无线传感器网络.



冯秀芳(1966—),女,博士,教授,CCF 高级会员,主要研究领域为无线传感器网络,人工智能.