





















缩策略并结合局部搜索的粒子群(CA-PSLS)算法<sup>[29]</sup>、改进的遗传算法(IGA)<sup>[30]</sup>和模拟退火算法(SA)<sup>[29]</sup>的计算结果形成对比。

**Table 2** Comparison of computational results by 6 algorithms for the first set of 8 instances

表 2 6 种不同算法求解第 1 组 8 个算例的计算结果比较

算例	矩形数	GA			PSO			CA-PSLS		
		$R_0$	$J$	$T(s)$	$R_0$	$J$	$T(s)$	$R_0$	$J$	$T(s)$
1	5	11.801	<10	4 718	11.716	0	4.89	11.704	0	4.31
2	6	15.002	<10	5 229	15.349	0	8.28	15.590	0	7.76
3	9	<b>18.851</b>	<b>&lt;10</b>	<b>10 980</b>	19.205	0	22.84	19.797	0	21.07
4	20	-	-	-	34.426	0	138.00	33.129	0	125.52
5	40	-	-	-	276.939	0	197.03	253.627	0	219.84
6	60	-	-	-	317.739	0	451.72	288.642	0	579.31
7	80	-	-	-	490.862	0	813.59	544.421	0	1 016.70
8	100	-	-	-	688.785	0	1 277.4	880.537	0	1 611.52
算例	矩形数	IGA			SA			hWL		
		$R_0$	$J$	$T(s)$	$R_0$	$J$	$T(s)$	$R_0$	$J$	$T(s)$
1	5	<b>11.34</b>	<b>0.007</b>	<b>13</b>	13.693	-	0.82	11.463	$1.004E^{-14}$	1.399
2	6	14.62	0.002	18	17.377	-	1.66	<b>14.304</b>	<b><math>3.552E^{-14}</math></b>	<b>46.457</b>
3	9	-	-	-	22.328	-	6.84	19.469	$7.105E^{-14}$	32.464
4	20	-	-	-	31.680	-	92.01	<b>27.769</b>	<b><math>2.99E^{-13}</math></b>	<b>87.707</b>
5	40	-	-	-	174.586	-	263.24	<b>153.013</b>	<b><math>1.22E^{-12}</math></b>	<b>94.117</b>
6	60	-	-	-	187.312	-	905.75	<b>78.011</b>	<b><math>1.17E^{-12}</math></b>	<b>113.557</b>
7	80	-	-	-	281.087	-	2 178.3	<b>124.223</b>	<b><math>2.956E^{-12}</math></b>	<b>186.796</b>
8	100	-	-	-	423.087	-	4 260.5	<b>192.909</b>	<b><math>8.71E^{-12}</math></b>	<b>244.790</b>

从表 2 不难看出,由于任意矩形装填问题(不同于正交矩形装填问题)的复杂性,所以多年来的研究成果并不是很多.在已有的研究成果中,GA 和 IGA 只计算了较小规模的算例.文献中,研究者使用复杂的数学知识,通过推导、证明,然后判断两个矩形装填物之间是否干涉,并构造了相应的不干涉判别算法.这种方法在装填物个数较小的情况下能够适用,并且可以取得较好的解;但当装填物的个数逐渐增多时,由于计算的复杂性,整个装填过程一般要花费大量的时间,所以不适于大规模矩形装填物.PSO,CA-PSLS 和 SA 采用矩形装填物内切圆或外包络圆的方式进行干涉性判断和干涉量计算,当算例规模逐渐增大时,从表 2 可以看出,装填后得到的整个圆形容器的半径非常大,甚至有的比本文得到的结果大 4 倍多.本文采用的是改进的有限包络圆族的方式进行干涉性判断和干涉量计算,并结合 Wang-Landau 抽样算法进行全局搜索.在小规模算例上,hWL 算法所求得的外包络圆半径相对于 GA 和 IGA 优势并不是特别明显,比如对于算例 1 和算例 3,并没有得到最优结果,但是和最优结果相差不多.图 6 是本文算法得到的算例 1~算例 3 的一个典型最优装填图。

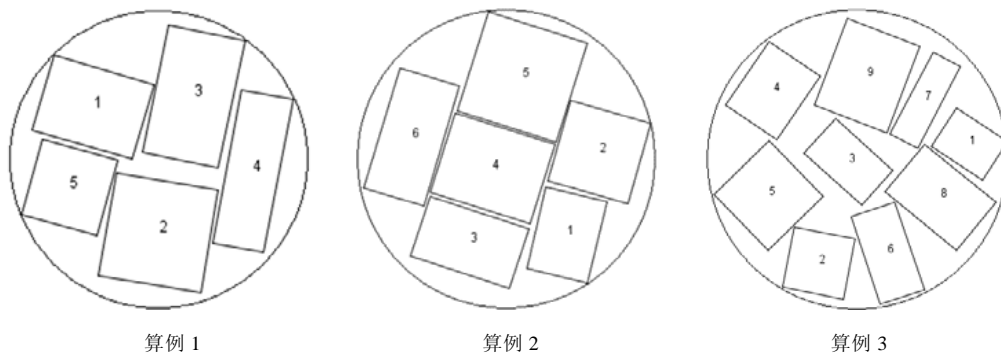


Fig.6 Diagrams of the typical optimal layouts for Instance 1~Instance 3

图 6 算例 1~算例 3 的一个典型最优装填示意图

随着问题规模的不断扩大,本文算法的优势就逐渐体现出来.对于算例 4,本文算法得到的平均圆形容器半径比当今文献中的最好结果减小了 $(31.680-27.769)/31.680 \times 100\% = 12.34\%$ ;对于算例 5,本文算法得到的平均圆

形容器半径比当今文献中的最好结果减小了 $(174.586-153.013)/174.586 \times 100\% = 12.35\%$ 。图7是本文算法得到的算例4和算例5的一个典型最优装填图。

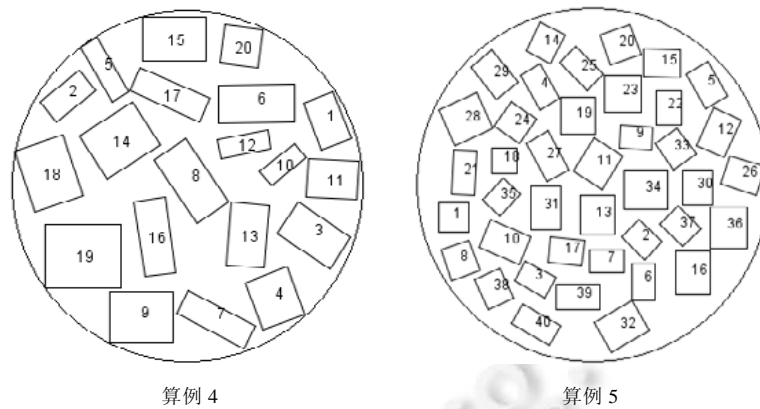


Fig.7 Diagrams of the typical optimal layouts for Instance 4 and Instance 5  
图7 算例4和算例5的一个典型最优装填示意图

对于算例6~算例8,本文所得到的平均圆形容器半径明显优于目前文献中的最优结果。以算例8为例,本文算法得到的平均圆形容器半径比当今文献中的最好结果减小了 $(423.087-192.909)/423.087 \times 100\% = 54.40\%$ ,即减少了一半还多,足以表明本文算法在解决大规模算例上的优势。图8列举了算例6~算例8的一个典型最优装填图。在静不平衡量方面,文献中部分算法没有明确给出计算结果,本文得到的静不平衡量基本接近于0,完全满足静不平衡约束的要求。

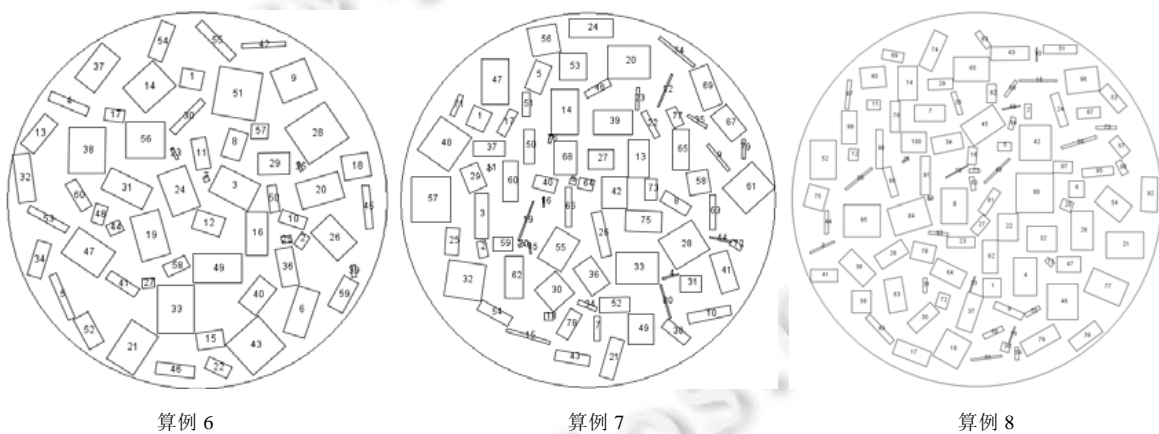


Fig.8 Diagrams of the typical optimal layouts for Instance 6~Instance 8  
图8 算例6~算例8的一个典型最优装填示意图

#### 4.2 任意矩形和圆形混合装填物布局的结果与分析

为了验证本文所提出的算法的有效性,我们又进一步计算了包含矩形和圆形混合装填物的两个算例——算例9和算例10。算例9包含10个装填物,该算例引自于文献[31],其中,装填物1~5为矩形,装填物6~10为圆形(其中,第10个圆不能移动)。表3详细列出了每个装填物的尺寸和质量。运用本文算法对算例9独立运行20次,并将获得的最小圆形容器半径 $R_0(\text{mm})$ 及其相对应的静不平衡量 $J(\text{g}\cdot\text{mm})$ 、运行时间 $t(\text{s})$ 列于表4中,并与文献中遗传算法(GA)<sup>[31]</sup>、人机交互遗传算法(HCIGA)<sup>[31]</sup>和基于案例推理的遗传算法(CBR-GA)<sup>[31]</sup>给出的结果进行

比较.从表 4 可以看出,本文方法在解决算例 9 上具有非常好的效果.对于最小圆形容器的半径  $R_0$ ,本文得到的结果比目前文献中的最好结果减小了  $(741.09-727.59)/741.09=1.8\%$ .在静不平衡量  $J$  上,本文得到的结果基本接近于 0,明显优于文献给出的结果.另外,在表 4 中,我们也给出了本文 hWL 算法获得的平均静不平衡量  $(\text{avg.})J(\text{g}\cdot\text{mm})$  和平均运行时间  $(\text{avg.})t(\text{s})$ .表 5 列出了本文算法得到的算例 9 的一个最优格局的数据.图 9 是本文 hWL 算法得到的算例 9 的最优布局图.

**Table 3** Dimensions and masses of the 10 mixed objects in Instance 9

表 3 算例 9 中 10 个混合装填物的尺寸和质量

装填物	长	宽	半径	质量	装填物	长	宽	半径	质量
1	365	365	-	4.0	6	-	-	225	4.0
2	425	300	-	4.5	7	-	-	200	2.0
3	250	225	-	3.6	8	-	-	170	2.6
4	380	280	-	3.9	9	-	-	75	1.4
5	250	175	-	1.8	10	-	-	200	2.5

**Table 4** Comparison of the computational results by 4 algorithms for Instance 9

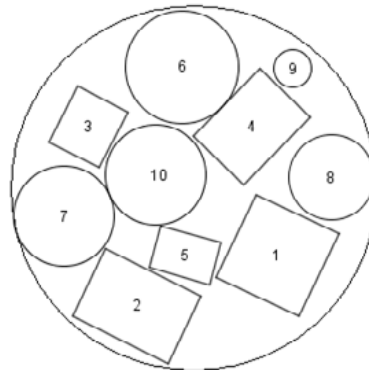
表 4 对于算例 9 的 4 种不同算法的计算结果比较

算法	半径(mm)	静不平衡量(g·mm)	$(\text{avg.})J(\text{g}\cdot\text{mm})$	时间(s)	$(\text{avg.})t(\text{s})$
GA	749.99	0.295 3	-	313.0	-
HCIGA	746.36	0.004 3	-	217.5	-
CBR-GA	741.09	0.003 9	-	180.3	-
<b>hWL</b>	<b>727.59</b>	<b>5.39E<sup>-13</sup></b>	<b>4.98E<sup>-13</sup></b>	<b>84.679</b>	<b>53.554</b>

**Table 5** Data of optimal layout by hWL algorithm for Instance 9

表 5 本文 hWL 算法得到的算例 9 的最优格局数据

序号	x 坐标(mm)	y 坐标(mm)	夹角	序号	x 坐标(mm)	y 坐标(mm)	夹角
1	334.233	-271.522	-0.445	6	-44.014	482.096	-
2	-224.712	-474.253	-0.459	7	-514.682	-116.017	-
3	-418.155	241.189	1.09	8	548.300	39.369	-
4	233.388	243.666	0.797	9	395.538	474.219	-
5	-32.561	-270.342	-0.267	10	-150.0	50.0	-



**Fig.9** Diagrams of the typical optimal layout for Instance 9

图 9 算例 9 的一个典型最优布局图

算例 10 包含 20 个装填物,该算例引自于文献[32],其中,装填物 1~9 为矩形;装填物 10~17 为圆形;装填物 18~20 也是矩形,但是这 3 个矩形装填物不能移动.表 6 详细列出了每个装填物的尺寸和质量.运用本文所提出的算法对算例 10 独立运行 20 次,并将计算结果与文献中并行遗传算法(PGA)<sup>[32]</sup>、带免疫的粒子群算法(PSO-IA)<sup>[32]</sup>和基于免疫的人机交互粒子群算法(HCPSO-IO)<sup>[32]</sup>给出的结果进行比较.

从表 7 可以看出,本文方法在解决算例 10 上同样达到了较好的效果.对于最小圆形容器的半径  $R_0(\text{mm})$ ,本文

得到的结果比目前文献中的最好结果减小了 $(1587.58-1577.94)/1587.58=0.6\%$ .在静不平衡量  $J$  上,无论是最优格局的静不平衡量  $J(\text{kg}\cdot\text{mm})$ ,还是平均静不平衡量 $(\text{avg.})J(\text{kg}\cdot\text{mm})$ ,本文的优势都很明显.图 10 给出了本文算法得到的算例 10 的最优布局图.表 8 给出了算例 10 的最优格局数据.

**Table 6** Dimensions and masses of the 20 mixed objects in Instance 10

**表 6** 算例 10 中 20 个混合装填物尺寸和质量

装填物	长	宽	半径	质量	装填物	长	宽	半径	质量
1	730	730	-	4.0	11	-	-	250	3.2
2	850	600	-	4.5	12	-	-	340	2.6
3	500	450	-	3.6	13	-	-	130	1.5
4	580	430	-	3.0	14	-	-	90	0.7
5	350	350	-	2.1	15	-	-	150	1.4
6	700	270	-	3.3	16	-	-	360	2.6
7	660	280	-	2.0	17	-	-	160	1.0
8	500	350	-	1.8	18	600	500	-	2.0
9	200	160	-	1.1	19	450	350	-	1.5
10	-	-	450	4.0	20	500	450	-	1.8

**Table 7** Comparison of the computational results by 4 algorithms for Instance 10

**表 7** 对于算例 10 的 4 种不同算法的计算结果比较

算法	半径(mm)	静不平衡量(kg·mm)	(avg.) $J$ (kg·mm)	时间(s)	(avg.) $t$ (s)
PGA	1 703.57	1.277	2.153	182.29	-
PSO-IA	1 666.27	0.310	0.784	201.47	-
HCPSO-IA	1 587.58	0.001	0.009	215.65	-
<b>hWL</b>	<b>1 577.94</b>	<b>4.43E<sup>-12</sup></b>	<b>2.32E<sup>-12</sup></b>	<b>189.23</b>	<b>146.73</b>

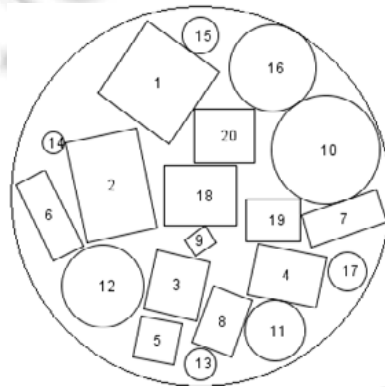


Fig.10 Diagram of the typical optimal layout for Instance 10

图 10 算例 10 的一个典型最优布局图

**Table 8** Data of optimal layout by hWL algorithm for Instance 10

**表 8** 本文 hWL 算法得到的算例 10 的最优格局数据

序号	$x$ 坐标(mm)	$y$ 坐标(mm)	夹角	序号	$x$ 坐标(mm)	$y$ 坐标(mm)	夹角
1	-348.613	1 011.225	-0.609	11	614.257	-1 117.53	-
2	-742.801	89.372	-1.360	12	-811.906	-750.414	-
3	-198.091	-743.194	1.352	13	-1.984	-1 395.82	-
4	716.335	-661.883	-0.203	14	-1 225.66	443.181	-
5	-358.501	-1 197.32	1.383	15	-2.544	1 331.72	-
6	-1 255.01	-162.355	-1.105	16	595.415	1 062.48	-
7	1 189.93	-188.216	0.320	17	1 215.77	-625.98	-
8	178.770	-1 041.46	1.211	18	0.0	0.0	0
9	-3.887	-373.825	0.582	19	600.0	-200.0	0
10	1 032.82	379.156	-	20	200.0	500.0	0

关于两组算例的计算时间,考虑到执行各算法所使用的计算机的性能和实现算法的编程语言不同,本文不做详细对比,但从表 2、表 4 和表 7 不难看出,对于两组共 10 个算例,hWL 算法均能在较短时间内得到计算结果。

## 5 结 论

对于带静不平衡性能约束的任意矩形装填问题,本文通过改进有限包络圆族法,提出了针对矩形装填物的一种新的划分方式.通过将任意矩形装填问题转化为圆形装填问题,从而使得任意矩形装填物之间的干涉性判断和干涉量计算更加简单.通过将基于矩形的启发式格局更新策略、局部搜索机制、质心平移策略与 Wang-Landau 抽样算法相结合,提了一种用于解决带静不平衡约束的任意矩形装填问题的启发式布局算法.通过对文献中的若干算例进行测试,计算结果表明,所提出的布局算法是一种有效算法。

## References:

- [1] Zachariadis EE, Tarantilis CD, Kiranoudis CK. A guided tabu search for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 2009,195(3):729–743. [doi: 10.1016/j.ejor.2007.05.058]
- [2] Dominguez O, Juan AA, Barrios B, Faulin J, Agustin A. Using biased randomization for solving the two-dimensional loading vehicle routing problem with heterogeneous fleet. *Annals of Operations Research*, 2016,236(2):383–404. [doi: 10.1007/s10479-014-1551-4]
- [3] Ji J, Lu YP, Cha JZ, Cui YD, Wang JM. A deterministic algorithm for optimal two-segment cutting patterns of rectangular blanks. *Chinese Journal of Computers*, 2012,35(1):183–191 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3724/SP.J.1016.2012.00183]
- [4] You J, Tian Z, Hou XY. Genetic algorithm based optimization of counterweight distribution for reentry vehicle. *Spacecraft Engineering*, 2015,24(1):56–61 (in Chinese with English abstract).
- [5] Lin QL, Liu HC, Wang DJ, Liu L. Integrating systematic layout planning with fuzzy constraint theory to design and optimize the facility layout for operating theatre in hospitals. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 2015,26(1):87–95. [doi: 10.1007/s10845-013-0764-8]
- [6] Song Z, Zhang Z, Chen X. The decision model of 3-dimensional wind farm layout design. *Renewable Energy*, 2016,85:248–258. [doi: 10.1016/j.renene.2015.06.036]
- [7] Li W, Huang WQ, Jiang DC, Liu XL. A heuristic algorithm for cube packing with time schedule. *Science China: Information Sciences*, 2010,53(1):18–29 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.1007/s11432-010-0022-z]
- [8] Zhang DD, Peng Y, Zhang LL. A multi-layer heuristic search algorithm for three dimensional container loading problem. *Chinese Journal of Computers*, 2012,35(12):2553–2561 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3724/SP.J.1016.2012.02553]
- [9] He K, Huang WQ. Cuboid arrangement approach based on caving degree for solving the cuboid packing problem. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2011,22(5):843–851 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3799.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2011.03799]
- [10] Silva E, Oliveira JF, Wäscher G. 2DCPackGen: A problem generator for two-dimensional rectangular cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 2014,237(3):846–856. [doi: 10.1016/j.ejor.2014.02.059]
- [11] Casazza M, Ceselli A. Exactly solving packing problems with fragmentation. *Computers & Operations Research*, 2016,75:202–213. [doi: 10.1016/j.cor.2016.06.007]
- [12] Leung J, Tam T, Wong CS. Packing squares into a square. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 1990,10(3):271–275. [doi: 10.1016/0743-7315(90)90019-L]
- [13] Feng EM, Wang XL, Wang XM, Teng HF. A Global optimization algorithm for layout problems with behavior constraints. *Applied Mathematics, A Journal of Chinese Universities*, 1999,14(1):98–104 (in Chinese with English abstract).
- [14] Zhai JG, Feng EM, Li ZM, Yin HC. Non-Overlapped genetic algorithm for layout problem with behavior constraints. *Journal of Dalian University of Technology*, 1999,39(3):352–357 (in Chinese with English abstract).
- [15] Teng HF, Liu J, Wang XM, Feng EM, Yang HY, Sun ZG. A dynamic non-interference algorithm for rectangles. *Journal of Image and Graphics*, 2001,6(3):259–263 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.11834/jig.20010363]

- [16] Xu YC, Xiao RB, Amos M. Particle swarm algorithm for weighted rectangle placement. In: Proc. of the 3rd Int'l Conf. on Natural Computation. Haikou: IEEE, 2007. 728–732. [doi: 10.1109/ICNC.2007.542]
- [17] Xu YC, Dong FM, Liu Y, Xiao RB. Genetic algorithm for rectangle layout optimization with equilibrium constraints. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2010,23(6):794–801 (in Chinese with English abstract).
- [18] Huang ZD, Xiao RB. Hybrid algorithm for the rectangular packing problem with constraints of equilibrium. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2011,9(3):96–99 (in Chinese with English abstract).
- [19] Zeng Y, Zhang J. Glowworm swarm optimization and heuristic algorithm for rectangle packing problem. In: Proc. of the 2012 Int'l Conf. on Information Science and Technology (ICIST). IEEE, 2012. 136–140. [doi: 10.1109/ICIST.2012.6221623]
- [20] Liu JF, Zhou ZL, Liu ZX, Gao ZX. Improved tabu search algorithm for the rectangle packing problem with equilibrium constraints. Journal of Information and Computational Science, 2012,9(18):5831–5839.
- [21] Li ZQ, Wang XF, Tan JY, Wang YS. A quasiphysical and dynamic adjustment approach for packing the orthogonal unequal rectangles in a circle with a mass balance: satellite payload packing. Mathematical Problems in Engineering, 2014,2014(3):1–16.
- [22] Wang F, Landau DP. Efficient, multiple-range random walk algorithm to calculate the density of states. Physical Review Letters, 2001,86(10):2050–2053. [doi: 10.1103/PhysRevLett.86.2050]
- [23] Liu JF, Xue SJ, Liu ZX, Xu D. An improved energy landscape paving algorithm for the problem of packing circles into a larger containing circle. Computers & Industrial Engineering, 2009,57(3):1144–1149. [doi: 10.1016/j.cie.2009.05.010]
- [24] Zhang Q, Zhang WH. Efficient construction algorithm of finite circles and their applications to 2D layout optimization. Journal of Computer-aided Design and Computer Graphics, 2009,21(5):617–625 (in Chinese with English abstract).
- [25] Zhu JH, Zhang WH, Xia L, Zhang Q, Bassir D. Optimal packing configuration design with finite-circle method. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2012,67(3):185–199.
- [26] Zhang WH, Zhang Q. Finite-Circle method for component approximation and packing design optimization. Engineering Optimization, 2009,41(10):971–987. [doi: 10.1080/03052150902890056]
- [27] Liu JF, Li G, Geng HT. A new heuristic algorithm for the circular packing problem with equilibrium constraints. Science China: Information Sciences, 2011,54(8):1572–1584 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.1007/s11432-011-4351-3]
- [28] Liu JF, Li G. Basin filling algorithm for the circular packing problem with equilibrium behavioral constraints. Science China: Information Sciences, 2010,40(3):885–895 (in Chinese with English abstract).
- [29] Xu YC, Xiao RB, Amos M. Simulated annealing for weighted polygon packing. arXiv:0809.5005 [cs.CG], 2008. <http://arxiv.org/abs/0809.5005>
- [30] Feng EM, Gong SH, Liu CY, Zhang X. Improved GA for artificial satellite module layout problem with performance constraints. Journal of Dalian University of Technology, 2005,45(3):459–463 (in Chinese with English abstract).
- [31] Li ZQ, Dong MJ. Case-Based reasoning genetic algorithm for rectangle and circle packing problem with equilibrium constraints. In: Wang Y, Li T, eds. Proc. of the Int'l Conf. on Intelligent Systems and Knowledge Engineering. Shanghai, 2011. 267–273. [doi: 10.1007/978-3-642-25664-6\_31]
- [32] Zhao FQ, Li GQ, Yang C, Abraham A, Liu HB. A human-computer cooperative particle swarm optimization based immune algorithm for layout design. Neurocomputing, 2014,132:68–78. [doi: 10.1016/j.neucom.2013.03.062]

#### 附中文参考文献:

- [3] 季君,陆一平,查建中,崔耀东,王金敏.生成矩形毛坯最优两段排样方式的确定型算法.计算机学报,2012,35(1):183–191. [doi: 10.3724/SP.J.1016.2012.00183]
- [4] 游进,田政,侯向阳.基于遗传算法的再入航天器配重布局优化.航天器工程,2015,24(1):56–61.
- [7] 李未,黄文奇,蒋东辰,刘祥龙.一种求解带有时间调度的四维长方体装填问题的启发式算法.中国科学:信息科学,2010,40(1):1–12. [doi: 10.1007/s11432-010-0022-z]
- [8] 张德富,彭煜,张丽丽.求解三维装箱问题的多层启发式搜索算法.计算机学报,2012,35(12):2553–2561. [doi: 10.3724/SP.J.1016.2012.02553]
- [9] 何琨,黄文奇.求解长方体 Packing 问题的捆绑穴度算法.软件学报,2011,22(5):843–851. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3799.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2011.03799]

- [13] 冯恩民,王锡禄,王秀梅,滕弘飞.带性能约束布局问题的全局优化算法.高校应用数学学报 A 辑(中文版),1999,14(1):98-104.
- [14] 翟金刚,冯恩民,李振民,尹洪超.带性能约束布局问题的不干涉遗传算法.大连理工大学学报,1999,39(3):352-357.
- [15] 滕弘飞,刘峻,王秀梅,冯恩民,杨宏宇,孙治国.一种矩形的动态不干涉算法.中国图像图形学报,2001,6(3):259-263. [doi: 10.11834/jig.20010363]
- [17] 徐义春,董方敏,刘勇,肖人斌.带平衡约束矩形布局优化问题的遗传算法.模式识别与人工智能,2010,23(6):794-801.
- [18] 黄振东,肖人彬.求解带平衡约束矩形布局问题的混合算法.华中科技大学学报(自然科学版),2011,9(3):96-99.
- [24] 张桥,张卫红.有限包络圆族的快速生成方法及其在二维布局优化中的应用.计算机辅助设计与图形学学报,2009,21(5): 617-625.
- [27] 李刚,刘景发.基于禁忌搜索的启发式算法求解带平衡约束的圆形装填问题.中国科学:信息科学,2011,41(9):1076-1088. [doi: 10.1007/s11432-011-4351-3]
- [28] 刘景发,李刚.求解带平衡性能约束的圆形装填问题的吸引盘填充算法.中国科学:信息科学,2010,40(3):423-432.
- [30] 冯恩民,宫召华,刘重阳,张旭.带性能约束的卫星舱布局问题改进遗传算法.大连理工大学学报,2005,45(3):459-463.



刘景发(1972—),男,湖南衡阳人,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为 NP 难度问题现实求解,多目标优化,智能计算,生物信息计算.



刘思妤(1993—),女,硕士生,主要研究领域为高性能智能计算.