

3 组效应

本节证明 GLSC 具有组效应^[12].组效应在子空间聚类中扮演重要的角色,对于相似的数据点,具有相似的代表系数.GLSC 的组效应特性可通过如下定理 1 得到.

定理 1. 给定一个数据样本 $y \in \mathbb{R}^d$ 、字典 $X \in \mathbb{R}^{d \times n}$ 和惩罚系数 λ .假设字典 X 中的每一列都正交化, z^* 是下面问题的最优解:

$$\min \|y - Xz\|_2^2 + \lambda \|s \odot z\|_2^2 \quad (14)$$

则我们有:

$$\frac{\|z_i^* - z_j^*\|_2}{\|y\|_2} \leq \frac{1}{\lambda \min(s_i^2, s_j^2)} \sqrt{2(1 - \cos(x_i, x_j))} \quad (15)$$

其中, s_i, s_j 表示权值向量 s 中第 i, j 项,即 z_i^*, z_j^* 对应的权值.

证明:

令 $L(z) = \|y - Xz\|_2^2 + \lambda \|s \odot z\|_2^2$, 因为 z^* 是问题(14)的最优解,所以 z^* 满足:

$$\left. \frac{\partial L(z)}{\partial z} \right|_{z=z^*} = 0 \quad (16)$$

然后,我们有:

$$-2x_i^T (y - Xz^*) + 2\lambda s_i^2 z_i^* = 0 \quad (17)$$

$$-2x_j^T (y - Xz^*) + 2\lambda s_j^2 z_j^* = 0 \quad (18)$$

公式(17)与公式(18)相减,可得:

$$z_i^* - z_j^* \leq \frac{1}{\lambda \min(s_i^2, s_j^2)} (x_i^T - x_j^T)(y - Xz^*) \quad (19)$$

因为 X 的每一列都正交化,因此:

$$\|x_i^T - x_j^T\|_2 = \sqrt{2(1 - \cos(x_i, x_j))} \quad (20)$$

因为 z^* 是问题(14)的最优解,因此我们有:

$$\|y - Xz^*\|_2^2 + \lambda \|s \odot z^*\|_2^2 = L(z^*) \leq L(0) = \|y\|_2^2 \quad (21)$$

因此, $\|y - Xz^*\|_2 \leq \|y\|_2$, 然后通过公式(19)、公式(20)可以得到结论(15). \square

4 实验结果与分析

本节通过实验验证 GLSC 聚类算法的有效性,第 4.1 节~第 4.3 节讨论各算法在 3 类数据集上的聚类效果.第 4.4 节讨论 GLSC 的参数选择.第 4.5 节讨论 GLSC 算法的时间复杂度.

本文使用聚类的准确率(accuracy)和 NMI(normalized mutual information)^[23]评价算法的性能,在人脸数据库、手写数字数据库和运动分割上测试算法.其中,人脸数据库使用 Extend YaleB^[24],AR^[25]数据集.手写数字数据库使用 USPS^[26],MNIST^[27]数据集,运动分割使用 Hopkins 115^[28]运动分割数据集.实验中的对比算法为 LRR, SSC,LSR,代码由原作者提供,且所有参数根据原论文中设置调到最优.另外,我们是利用 PCA 求得原数据集的低秩形式,在人脸数据集和手写数字集上将其映射到 $n \times 6$ 维的低秩子空间中, n 表示聚类的类别数.在运动分割数据集上,将其映射到 12 维的低维子空间中.

表 1 给出了各算法的实验参数,需要注意的是:在 Extended YaleB 数据集和 AR 数据集上,SSC 和 LRR 在原论文中是对原数据集进行聚类;这里,我们将数据集降维到低维子空间后重新调整参数获取最优的结果.

Table 1 Parameters of all algorithms

表 1 各算法的参数设置

数据集	GLSC	SSC	LRR	LSR1	LSR2
YaleB(5)	$n=5, \lambda=0.0001$	$\alpha=100000$	$\lambda=2$	$\lambda=0.4$	$\lambda=0.4$
YaleB(10)	$n=5, \lambda=0.01$	$\alpha=100000$	$\lambda=3$	$\lambda=0.004$	$\lambda=0.004$
AR(10)	$n=6, \lambda=0.00008$	$\alpha=1000000$	$\lambda=2$	$\lambda=0.0007$	$\lambda=0.0004$
AR(20)	$n=6, \lambda=0.00001$	$\alpha=1000000$	$\lambda=6$	$\lambda=0.0004$	$\lambda=0.006$
MNIST	$n=4, \lambda=0.4$	$\alpha=6$	$\lambda=0.002$	$\lambda=15$	$\lambda=10$
USPS	$n=4, \lambda=0.05$	$\alpha=1$	$\lambda=0.03$	$\lambda=130$	$\lambda=150$
Hopkins115 (2 motions)	$n=9, \lambda=0.0001$	$\alpha=800$	$\lambda=4$	$\lambda=0.0046$	$\lambda=0.0048$
Hopkins115 (3 motions)	$n=10, \lambda=0.000001$	$\alpha=800$	$\lambda=4$	$\lambda=0.0046$	$\lambda=0.0046$

4.1 人脸数据集实验

本节在 YaleB 和 AR 人脸数据集上验证算法的有效性,其中,在 YaleB 数据库上,选取前 5 个和前 10 个人脸对象进行实验,分别包含 320 张和 640 张图片;AR 数据库中的有 50 位男性、50 位女性,每个人有 26 张图片,包括遮挡和戴眼镜的图片.为了建立与 YaleB 数据库上类似的子空间分割任务,在 AR 数据集上,我们选取前 10 个和前 20 个人脸对象实验.表 2 中的每条数据都是重复进行 10 次实验取平均得到.

Table 2 Accuracy and NMI of clustering on face databases (%)

表 2 不同算法在人脸数据集上聚类效果的比较 (%)

数据集	对象数	GLSC		SSC		LRR		LSR1		LSR2	
		AC	NMI	AC	NMI	AC	NMI	AC	NMI	AC	NMI
YaleB	5	98.75	96.24	83.12	70.00	83.44	70.36	90.00	77.29	91.25	79.37
	10	93.91	90.31	65.94	57.51	61.56	54.58	68.80	59.91	72.19	64.40
AR	10	93.46	92.31	76.62	70.18	77.31	70.44	73.62	70.83	74.54	71.75
	20	80.25	82.71	71.79	73.62	70.44	75.55	65.69	74.13	71.03	71.56

从表 2 中可以看出:GLSC 在人脸数据集上,聚类的效果比当前流行的算法有较大的优势.从表中可以看出:在 YaleB 数据集上,当选取 5 个对象的人脸做实验时,GLSC 比 LSR2 有 7.5%的提升;但是当人脸对象提升到 10 个时,算法的优势明显,比 LSR2 有 21.72%的提升.在 AR 数据集上,当选取 10 个对象人脸实验时,GLSC 的聚类准确率比 LRR 有 16.15%的提升.当人脸对象提升到 20 个时,与 SSC 相比,有 8.46%的提升.综上所述,GLSC 算法在人脸数据集上有较好的聚类效果.

4.2 手写数字数据集实验

在手写数字数据集中,选取 USPS 数据集和 MNIST 数据集进行实验.它们都含有 10 个对象(0~9).由于它们样本数较多,所以在 USPS 数据集上,我们选取每个对象的前 100 张图片,共 1 000 张图片进行实验.在 MNIST 数据集上,我们选取每个对象的前 50 张图片,共 500 张图片进行实验.表 3 是各种算法在手写数字数据集上聚类效果的比较.

Table 3 Accuracy and NMI of clustering on handwritten databases (%)

表 3 不同算法在手写数字数据集上聚类效果的比较 (%)

数据集	GLSC		SSC		LRR		LSR1		LSR2	
	AC	NMI	AC	NMI	AC	NMI	AC	NMI	AC	NMI
MNIST	72.80	66.69	63.60	61.54	61.20	55.92	60.20	57.17	59.20	57.42
USPS	83.00	82.63	46.60	41.88	71.00	67.50	70.60	68.01	68.80	66.66

从表 3 中可以看出:所有的算法在手写数字数据集上都没有太好的聚类效果;但是与其他聚类算法相比,GLSC 算法仍有较好的聚类效果.在 MNIST 数据集上,GLSC 比 SSC 有 9.2%的提升.同样,在 USPS 数据集上,与 LRR 比较,在聚类的准确度上,GLSC 有 12%的提升.综上所述,GLSC 在手写数字数据集上有较好的聚类效果.

图 3 表示在 MNIST 数据集上,手写数字的可视化.图 3(a)表示 MNIST 数据集上,手写数字的真实分布.图 3(b)表示 GLSC 的聚类结果分布.图 3(b)中,带有圆圈的数字表示被错分的数字.

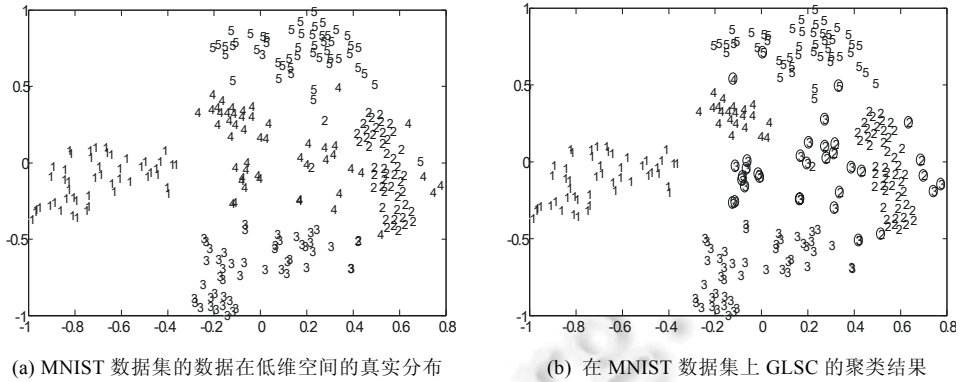


Fig.3
图 3

4.3 运动分割数据集实验

在运动分割的实验中,采用聚类的错分率(1-accuracy)的均值和中值衡量各个算法的性能.Hopkins 155 数据集中包含 156 个运动序列,每个运动序列有 39 个~550 个数据点,其中包括 2 个运动序列和 3 个运动序列.我们使用在整个运动分割数据集上的平均错分率和中值衡量各个算法的有效性.表 4 是各个算法在运动分割数据集上聚类效果的比较.

Table 4 Segmentation errors of clustering on the Hopkins 155 database (%)
表 4 不同算法在运动分割数据上的聚类错误率 (%)

Algorithms	2 motions		3 motions	
	均值	中值	均值	中值
GLSC	2.43	0	5.00	0.22
SSC	1.9	0	5.10	1.09
LLR	3.64	0.22	9.43	3.7
LSR2	3.19	0	6.62	1.99

从表 4 中可以看出:在两个运动分割上,GLSC 的聚类错分率比 SSC 高 0.53%;但是在 3 个运动分割上,GLSC 比 SSC 有 0.1%的提升;并且在属性中值上,GLSC 只有 0.22%,具有一定的优越性.

4.4 算法参数的选择

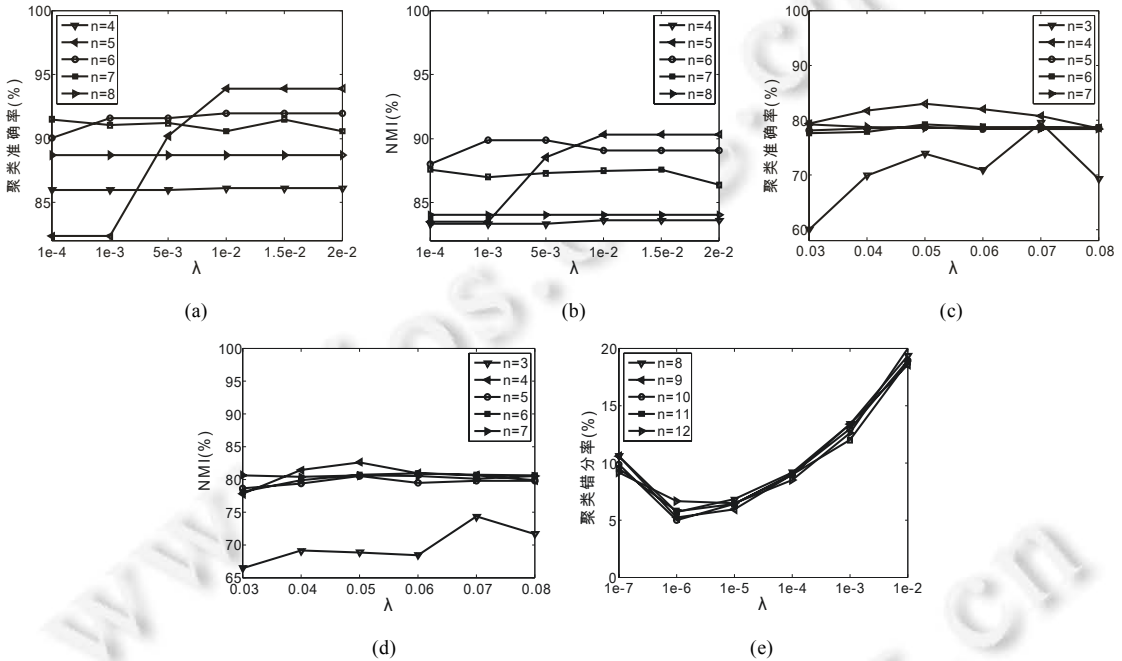
本节对 GLSC 算法在各个数据集上参数选择进行讨论.在人脸数据集上,选取 Extended YaleB 前 10 个人脸对象进行讨论.在手写数字数据集上,选取 USPS 数据集进行讨论.在运动分割数据集上,选取 3 个运动序列任务进行讨论.GLSC 算法在其他子空间分割任务上的参数选择不做讨论,参数选择方法与之类似.

图 4(a)表示在 ExtendedYaleB 数据集上,以 Accuracy 为评价指标时,算法参数 λ 和 n 对聚类性能的影响.从图中可以看出:当参数 λ 取值在 0.01~0.02 时,聚类的准确率比较稳定,对聚类性能的影响不大.同时可以看出,参数 n 对聚类效果的影响较大.当 $n=5, \lambda=0.01$ 时,取得最好的聚类效果为 93.91%.从图 4(b)中可以看出:当 λ 取值在 0.01~0.02, $n=5$ 时, NMI 也取得了最好的聚类效果,为 90.31%.在其他人脸分割任务上,采取同样的方法选取算法的参数,在 Extended YaleB 5 个人脸对象上, $\lambda=0.0001, n=5$.在 AR 数据集 10 个人脸对象上, $\lambda=0.00008, n=6$.20 个人脸对象上, $\lambda=0.00001, n=6$.

图 4(c)表示在 USPS 数据集上,以 Accuracy 为评价指标时,算法参数 λ 和 n 对聚类性能的影响.从图中可以发现:当 $n=3$ 时,参数 λ 的取值对算法的稳定性的影响较大;但是当 n 取值在 4~7 时,参数 λ 的取值对聚类性能的影响较小.同时,当 $n=4, \lambda=0.05$ 时,得到最好的聚类效果为 83%.同样,当以 NMI 为性能评价指标时,参数 λ 和 n 对聚类性能的影响类似.如图 4(d)所示:当 $n=4, \lambda=0.05$ 时,取得最好的聚类性能为 82.63%.在 MNIST 数据集上,选取的参

数为 $n=4, \lambda=0.4$.

图 4(e)表示在 Hopkins155 3 个运动分割数据集上,以平均聚类错分率为性能评价指标时,算法参数 λ 和 n 对聚类性能的影响.当固定参数 n 时,参数 λ 对聚类效果的影响比较大;当 λ 从 $1e-7$ 变化 $1e-2$ 时,聚类的平均错分率从 9.87% 下降到 5%,然后又逐渐提升到 18.96%.当固定参数 λ 时,参数 n 对聚类性能的影响不大.在 Hopkins155 2 个运动分割数据集上,参数的选取为 $n=9, \lambda=0.0001$.



(a) 在 Extended YaleB 前 10 个人脸数据集上,当以 Accuracy 为评价指标时,参数 λ 和 n 对聚类性能的影响
 (b) 在 Extended YaleB 前 10 个人脸数据集上,当以 NMI 为评价指标时,参数 λ 和 n 对聚类性能的影响
 (c) 在 USPS 数据集上,当以 Accuracy 为评价指标时,参数 λ 和 n 对聚类性能的影响
 (d) 在 USPS 数据集上,当以 NMI 为评价指标时,参数 λ 和 n 对聚类性能的影响
 (e) 在 Hopkins155 3 个运动数据集上,当以聚类的平均错分率为性能评价指标时,参数 λ 和 n 对聚类性能的影响

Fig.4 On different databases, the influence of two parameters on GLSC algorithm

图 4 在不同的数据集上, GLSC 算法中两个参数对聚类性能的影响

4.5 时间复杂度分析

为了验证各算法时间复杂度,在人脸数据集上,选取 Extended YaleB 前 10 个人脸对象进行实验.在手写数字数据集上,选取 USPS 数据集进行实验.在 Hopkins155 数据集上,选取 3 个运动分割进行实验.表 5 显示了各算法在不同数据集上的运行时间.

Table 5 Computing time of different algorithm on different databases (s)

表 5 各算法在不同数据集上的运行时间 (s)

算法	数据集		
	YaleB	USPS	Hopkins 155
GLSC	12.81	55.73	2.99
SSC	8.25	38.67	1.98
LRR	2.9	33.51	1.46
LSR	0.03	0.15	0.02

从表中可以看出, GLSC 的时间复杂度较高.公式(12)中每个数据点都需要计算协方差矩阵,并且求取协方

差矩阵后还要求逆矩阵,时间复杂度为 $o(n^3)$, n 表示数据点的个数.

因此, GLSC 在算法的运行时间上处于劣势.

5 结束语

本文利用 ℓ_2 范数,提出一种基于欧氏距离的且具有组效应的低秩子空间聚类算法,该算法在保证同一子空间数据点间联系的同时,减小不同子空间数据点之间的联系,并且在多个数据集上取得了较好的聚类效果.但是 GLSC 算法时间复杂度较高,这是由于对于每一个数据点, GLSC 要求解该数据点的协方差矩阵和求逆操作,因此时间复杂度上,我们将对本算法做进一步优化.

References:

- [1] Wang WW, Li XP, Feng XC, Wang SQ. A survey on sparse subspace clustering. *Acta Automatica Sinica*, 2015,41(8):1373–1384 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.16383/j.aas.2015.c140891]
- [2] Vidal R, Ma Y, Sastry S. Generalized principal component analysis (GPCA). *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005,27(12):1945–1959. [doi: 10.1109/TPAMI.2005.244]
- [3] Rao S, Tron R, Vidal R, Ma Y. Motion segmentation in the presence of outlying, incomplete, or corrupted trajectories. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2010,32(10):1832–1845. [doi: 10.1109/TPAMI.2009.191]
- [4] Lu L, Vidal R. Combined central and subspace clustering for computer vision applications. In: *Proc. of the 23rd Int'l Conf. on Machine Learning*. New York: ACM Press, 2006. 593–600. [doi: 10.1145/1143844.1143919]
- [5] Favaro P, Vidal R, Ravichandran A. A closed form solution to robust subspace estimation and clustering. In: *Proc. of the IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*. Colorado Springs: IEEE, 2011. 1801–1807. [doi: 10.1109/CVPR.2011.5995365]
- [6] Elhamifar E, Vidal R. Clustering disjoint subspaces via sparse representation. In: *Proc. of the IEEE Int'l Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Dallas: IEEE, 2010. 1926–1929. [doi: 10.1109/ICASSP.2010.5495317]
- [7] Yan J, Pollefeys M. A general framework for motion segmentation: Independent, articulated, rigid, non-rigid, degenerate and non-degenerate. In: *Proc. of the European Conf. on Computer Vision*. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 94–106. [doi: 10.1007/11744085_8]
- [8] Goh A, Vidal R. Segmenting motions of different types by unsupervised manifold clustering. In: *Proc. of the IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*. Minneapolis: IEEE, 2007. 1–6. [doi: 10.1109/CVPR.2007.383235]
- [9] Hu H, Lin Z, Feng J, Zhou J. Smooth representation clustering. In: *Proc. of the IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*. Columbus: IEEE, 2014. 3834–3841. [doi: 10.1109/CVPR.2014.484]
- [10] Elhamifar E, Vidal R. Sparse subspace clustering: Algorithm, theory, and applications. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013,35(11):2765–2781. [doi: 10.1109/TPAMI.2013.57]
- [11] Liu G, Lin Z, Yan S, Sun J. Robust recovery of subspace structures by low-rank representation. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013,35(1):171–184. [doi: 10.1109/TPAMI.2012.88]
- [12] Lu CY, Min H, Zhao ZQ, Zhu L, Huang DS, Yan S. Robust and efficient subspace segmentation via least squares regression. In: *Proc. of the European Conf. on Computer Vision*. Berlin: Springer-Verlag, 2012. 347–360. [doi: 10.1007/978-3-642-33786-4_26]
- [13] Chen J, Zhang H, Mao H, Sang Y, Yi Z. Symmetric low-rank representation for subspace clustering. *Neurocomputing*, 2016,173: 1192–1202. [doi: 10.1016/j.neucom.2015.08.077]
- [14] Wang J, Yang J, Yu K, Lv F, Huang T, Gong Y. Locality-Constrained linear coding for image classification. In: *Proc. of the IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*. San Francisco: IEEE, 2010. 3360–3367. [doi: 10.1109/CVPR.2010.5540018]
- [15] Lu C, Feng J, Lin Z, Yan S. Correlation adaptive subspace segmentation by trace lasso. In: *Proc. of the IEEE Int'l Conf. on Computer Vision*. 2013. 1345–1352. [doi: 10.1109/ICCV.2013.170]
- [16] Li B, Lu CY, Leng CC, Jin LB. Robust low rank subspace clustering based on local graph Laplace constraint. *Acta Automatica Sinica*, 2015,41(11):1971–1980 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.16383/j.aas.2015.c150031]

- [17] Candès EJ, Li X, Ma Y, Wright J. Robust principal component analysis? *Journal of the ACM (JACM)*, 2011,58(3):11. [doi: 10.1145/1970392.1970395]
- [18] Abdi H, Williams LJ. Principal component analysis. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 2010,2(4):433–459. [doi: 10.1002/wics.101]
- [19] Xu J, Xu K, Chen K, Ruan J. Reweighted sparse subspace clustering. *Computer Vision and Image Understanding*, 2015,138:25–37. [doi: 10.1016/j.cviu.2015.04.003]
- [20] Liu B, Jing L, Yu J, Li J. Robust graph learning via constrained elastic-net regularization. *Neurocomputing*, 2016,171:299–312. [doi: 10.1016/j.neucom.2015.06.059]
- [21] Costeira JP, Kanade T. A multibody factorization method for independently moving objects. *Int'l Journal of Computer Vision*, 1998,29(3):159–179. [doi: 10.1023/A:1008000628999]
- [22] Peng X, Yi Z, Tang H. Robust subspace clustering via thresholding ridge regression. In: *Proc. of the AAAI*. Austin: AAAI, 2015. 3827–3833.
- [23] Cai D, He X, Han J. Document clustering using locality preserving indexing. *IEEE Trans. on Knowledge and Data Engineering*, 2005,17(12):1624–1637. [doi: 10.1109/TKDE.2005.198]
- [24] Georghiades AS, Belhumeur PN, Kriegman DJ. From few to many: Illumination cone models for face recognition under variable lighting and pose. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2001,23(6):643–660. [doi: 10.1109/34.927464]
- [25] Martinez AR, Benavente R. The AR face database, 1998. Technical Report, Computer Vision Center, 2007.
- [26] Hull JJ. A database for handwritten text recognition research. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1994, 16(5):550–554. [doi: 10.1109/34.291440]
- [27] LeCun Y, Bottou L, Bengio Y, Haffner P. Gradient-Based learning applied to document recognition. *Proc. of the IEEE*, 1998, 86(11):2278–2324. [doi: 10.1109/5.726791]
- [28] Tron R, Vidal R. A benchmark for the comparison of 3-d motion segmentation algorithms. In: *Proc. of the IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*. Minneapolis: IEEE, 2007. 1–8. [doi: 10.1109/CVPR.2007.382974]

附中文参考文献:

- [1] 王卫卫,李小平,冯象初,王斯琪.稀疏子空间聚类综述. *自动化学报*,2015,41(8):1373–1384. [doi: 10.16383/j.aas.2015.c140891]
- [16] 李波,卢春园,冷成财,金连宝.基于局部图拉普拉斯约束的鲁棒低秩表示聚类方法. *自动化学报*,2015,41(11):1971–1980. [doi: 10.16383/j.aas.2015.c150031]



傅文进(1992—),男,江苏盐城人,硕士生,
主要研究领域为聚类分析,人脸识别.



吴小俊(1967—),男,博士,教授,博士生导师,
CCF 专业会员,主要研究领域为模式识别,
计算机视觉,模糊系统,神经网络,智能系统.