

公式 θ 可能是属于 T 的,但是我们仍记为 $T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi, \Delta_2 \Rightarrow T, \theta|\Delta_1, \Delta_2$ 来表示该 θ 是通过作用缺省规则产生的.

定义 2.3. Atomic-rule:

$$\frac{T \vdash \phi \quad T \vdash \neg p}{T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow p, \Delta_2 \Rightarrow T, \lambda|\Delta_1, \Delta_2}, \quad \frac{T \vdash \phi \quad T \vdash p}{T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \neg p, \Delta_2 \Rightarrow T, \lambda|\Delta_1, \Delta_2}.$$

原子公式和原子公式的否定形式是公式的最基本形式,如果协调,则将公式添加到集合 T 中去.如果不协调,则表明 T 可以推导出公式的否定,由于原子公式不能再继续分解,因此将公式舍去.

定义 2.4. \wedge^\downarrow -rule:

$$\frac{T \vdash \phi \quad T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1, \Delta_2 \Rightarrow T, \psi_1|\Delta_1, \Delta_2 \quad T, \psi_1|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow T, \psi_1, \psi_2|\Delta_1, \Delta_2}{T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow T, \psi_1 \wedge \psi_2|\Delta_1, \Delta_2}.$$

\wedge^\downarrow -rule 是指对于缺省规则 $\phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2$, 如果 $T \vdash \phi$ 成立,集合 T 作用缺省规则 $\phi \rightsquigarrow \psi_1$ 可以得到 $T \cup \{\psi_1\}$, $T \cup \{\psi_1\}$ 作用缺省规则 $\phi \rightsquigarrow \psi_2$ 可以得到 $T \cup \{\psi_1, \psi_2\}$, 则集合 T 作用缺省规则 $\phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2$ 可以得到 $T \cup \{\psi_1 \wedge \psi_2\}$.

事实上, \wedge^\downarrow -rule 还有另外一种形式:

$$\frac{T \vdash \phi \quad T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow T, \psi_2|\Delta_1, \Delta_2 \quad T, \psi_2|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1, \Delta_2 \Rightarrow T, \psi_1, \psi_2|\Delta_1, \Delta_2}{T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow T, \psi_1 \wedge \psi_2|\Delta_1, \Delta_2}.$$

即如果 $T \vdash \phi$ 成立,集合 T 作用缺省规则 $\phi \rightsquigarrow \psi_1$ 可以得到 $T \cup \{\psi_2\}$, $T \cup \{\psi_2\}$ 作用缺省规则 $\phi \rightsquigarrow \psi_1$ 可以得到 $T \cup \{\psi_1, \psi_2\}$, 则集合 T 作用缺省规则 $\phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2$ 可以得到 $T \cup \{\psi_1 \wedge \psi_2\}$. 因为对于集合 T 和公式 $\psi_1, \psi_2, T \cup \{\psi_1, \psi_2\}$ 是协调的,所以这两条规则是等价的,我们只保留其中的一条.并且,我们在之后的定理中也证明,如果 ψ 可以全部保留,则 ψ 与集合 T 是协调的.

定义 2.5. \wedge^\uparrow -rule:

$$\frac{T \vdash \phi \quad T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1, \Delta_2 \Rightarrow T, \theta_1|\Delta_1, \Delta_2 \quad T, \theta_1|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow T, \theta_1, \theta_2|\Delta_1, \Delta_2}{T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow T, \theta_1 \wedge \theta_2|\Delta_1, \Delta_2},$$

$$\frac{T \vdash \phi \quad T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow T, \theta_2|\Delta_1, \Delta_2 \quad T, \theta_2|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1, \Delta_2 \Rightarrow T, \theta_2, \theta_1|\Delta_1, \Delta_2}{T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow T, \theta_1 \wedge \theta_2|\Delta_1, \Delta_2},$$

其中, θ_1 和 θ_2 分别是 ψ_1 和 ψ_2 的伪子公式.

在 \wedge^\uparrow -rule 中,缺省规则 $\phi \rightsquigarrow \psi$ 作用在集合 T 上得到的是 ψ 的一个伪子公式.这说明, ψ 本身与集合 T 是不协调的. ψ 的最外层逻辑联结词是合取符号,即 $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$.于是有 $\psi_1 \wedge \psi_2$ 与 T 是不协调的,缺省规则 $\phi \rightsquigarrow \psi_1$ 和 $\phi \rightsquigarrow \psi_2$ 作用的顺序不同,则可能产生的伪子公式不同.例如,最简单的情况,令 $T = \{p\}$, $\phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2 = p \rightsquigarrow q \wedge \neg q$.先作用 $p \rightsquigarrow q$ 产生的集合为 $\{p, q\}$,而先作用 $p \rightsquigarrow \neg q$ 产生的集合为 $\{p, \neg q\}$.

所以上述规则并不是等价的,需要一一列出.

定义 2.6. \vee^\downarrow -rule:

$$\frac{T \vdash \phi \quad T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1, \Delta_2 \Rightarrow T, \psi_1|\Delta_1, \Delta_2}{T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1 \vee \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow T, \psi_1 \vee \psi_2|\Delta_1, \Delta_2}, \quad \frac{T \vdash \phi \quad T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow T, \psi_2|\Delta_1, \Delta_2}{T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1 \vee \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow T, \psi_1 \vee \psi_2|\Delta_1, \Delta_2}.$$

在 \vee^\downarrow -rule 中,如果 T 和 ψ_1 或者 ψ_2 是协调的,则 T 与 $\psi_1 \vee \psi_2$ 是协调的.因此只要满足上述条件之一,我们即可把 $\psi_1 \vee \psi_2$ 添加到 T 当中去.即当 ψ 与集合 T 是协调的,则将 ψ 全部保留.

定义 2.7. \vee^\uparrow -rule:

$$\frac{T \vdash \phi \quad T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1, \Delta_2 \Rightarrow T, \theta_1|\Delta_1, \Delta_2 \quad T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow T, \theta_2|\Delta_1, \Delta_2}{T|\Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1 \vee \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow T|\Delta_1, \Delta_2},$$

其中, θ_1 和 θ_2 分别是 ψ_1 和 ψ_2 的真伪子公式.

在 \vee^\uparrow -rule 中,公式 $\psi_1 \vee \psi_2$ 与集合 T 是不协调的.因此公式 ψ_1 和 ψ_2 与集合 T 都是不协调的.即集合 T 作用 $\phi \rightsquigarrow \psi_1$ 和 $\phi \rightsquigarrow \psi_2$ 产生的新公式都是 ψ_1 和 ψ_2 的伪子公式,考虑到公式 ψ_1 和 ψ_2 与集合 T 都是不协调的,我们不会将任何公式添加到 T 中去.

定义 2.8. TR-rule:

$$\frac{T_1|\Delta_1 \Rightarrow T_2|\Delta_2 \quad T_2|\Delta_2 \Rightarrow T_3|\Delta_3}{T_1|\Delta_1 \Rightarrow T_3|\Delta_3}$$

直观上,TR-rule 表明缺省矢列式是具有传递性的,即如果矢列式 $T_1|\Delta_1 \Rightarrow T_2|\Delta_2$ 成立,且有 $T_2|\Delta_2 \Rightarrow T_3|\Delta_3$ 成立,则有 $T_1|\Delta_1 \Rightarrow T_3|\Delta_3$ 成立.

定义 2.9(证明). 给定公式的集合 S_1 和 S_2 ,缺省规则的集合 Δ_1 和 Δ_2 (Δ_2 可能是 \emptyset).我们称缺省矢列式 $S_1|\Delta_1 \Rightarrow S_2|\Delta_2$ 是 GD-可证的,记为 $\vdash^{GD} S_1|\Delta_1 \Rightarrow S_2|\Delta_2$,当且仅当存在一棵以 $S_1|\Delta_1 \Rightarrow S_2|\Delta_2$ 为根节点的证明树 T ,满足:

- 1) T 的非叶节点都是缺省矢列式;
- 2) T 的所有叶节点都是 Axiom 的上层;
- 3) T 中除了根节点以外的所有节点都是某一个推导规则的上层,且其直接后继节点为该缺省规则的下层.

显然,证明树 T 的任意子树也是证明树.

例如:给定缺省理论 $\Gamma = (T, \Delta)$, 其中, $T = \{p\}$, $\Delta = \{p \rightsquigarrow q, q \rightsquigarrow r\}$, 则

$$\frac{\frac{T \vdash p \quad T \nvdash \neg q}{p|p \rightsquigarrow q, q \rightsquigarrow r \Rightarrow p, q|q \rightsquigarrow r} \quad \frac{p, q \vdash q \quad p, q \nvdash \neg r}{p, q|q \rightsquigarrow r \Rightarrow p, q, r}}{T|p \rightsquigarrow q, q \rightsquigarrow r \Rightarrow p, q, r}$$

为 $T|\Delta \Rightarrow p, q, r$ 的一棵证明树,即 $T|\Delta \Rightarrow p, q, r$ 是可证的.

命题 2.10. 给定缺省矢列式 $S_1|\Delta_1 \Rightarrow S_2|\Delta_2$,如果 $S_1|\Delta_1 \Rightarrow S_2|\Delta_2$ 是 GD-可证的,则有 $\Delta_2 \subseteq \Delta_1, S_1 \subseteq S_2$.

定义 2.11(公式的序 L 下可证性). 给定缺省理论 $\Gamma=(T, \Delta)$ 和一个定义在 Δ 上的全序 L ,其中, $L = \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$. 公式 ψ 是关于缺省理论 $\Gamma=(T, \Delta)$ 在序 L 下可证的,如果存在一个 Δ 中的缺省规则的序列 $\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_j$,使得:

$$\begin{aligned} &\vdash^{GD} T_0|\Delta_0, \delta'_1, \Delta_0 \Rightarrow T_0, \theta_1|\Delta_0, \Delta_0, \\ &\dots \\ &\vdash^{GD} T_{i-1}|\Delta_{i-1}, \delta'_i, \Delta_{i-1} \Rightarrow T_{i-1}, \theta_i|\Delta_{i-1}, \Delta_{i-1}, \\ &\dots \\ &\vdash^{GD} T_{j-1}|\Delta_{j-1}, \delta'_j, \Delta_{j-1} \Rightarrow T_{j-1}, \theta_j|\Delta_{j-1}, \Delta_{j-1}, \\ &T_j \vdash \psi, \end{aligned}$$

其中, $\Delta_0 = \Delta = \Delta_0 \cup \Delta_0, \Delta_i = \Delta_{i-1} - \{\delta'_i\} = \Delta_i \cup \Delta_i$; 对于任意的缺省规则 $\delta \in \Delta_i, \delta \stackrel{L}{<} \delta'_{i+1}$ 并且 $T_i \nvdash \text{pre}(\delta)$; 同时,对于任意的缺省规则 $\delta \in \Delta_i, \delta \stackrel{L}{<} \delta'_i$.

从公式的可证性我们了解到,缺省规则的作用依赖于给定的严格偏序,每一步作用的缺省规则都是活动的,并且具有最优先的序.在每次作用完之后,我们就将这个缺省规则从原有的集合中移除.我们要求每一步的矢列式都是缺省可证的,并且由这些矢列式组成了一个连续可证的缺省矢列式的序列,使得可证的公式可以被矢列式当中的某一个集合 T 推导出来.这样按照严格偏序去一步一步地作用缺省规则而生成的公式,都是在该序下关于缺省理论 Γ 可证的公式,那么包含所有这些公式的集合,我们定义为 GD-扩展,定义如下.

定义 2.12(GD-扩展). 给定缺省理论 $\Gamma=(T, \Delta)$,其中, T 是协调的公式集合, Δ 是缺省规则的集合.公式的集合 E 是缺省理论 $\Gamma=(T, \Delta)$ 的一个 GD-扩展,如果存在一个 Δ 上的全序 $L = \delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots$,使得

$$\begin{aligned} &\vdash^{GD} T_0|\Delta_0, \delta'_1, \Delta_0 \Rightarrow T_0, \theta_1|\Delta_0, \Delta_0, \\ &\dots \\ &\vdash^{GD} T_{i-1}|\Delta_{i-1}, \delta'_i, \Delta_{i-1} \Rightarrow T_{i-1}, \theta_i|\Delta_{i-1}, \Delta_{i-1}, \\ &\dots \\ &E = Th\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} T_i\right), \end{aligned}$$

其中, $T_0 = T, T_i = T_{i-1} \cup \{\theta_i\}$; $\Delta_0 = \Delta = \Delta_0 \cup \Delta_0, \Delta_i = \Delta_{i-1} - \{\delta'_i\} = \Delta_i \cup \Delta_i$; 对于任意的缺省规则 $\delta \in \Delta_{i-1}, \delta \stackrel{L}{<} \delta'_i$, 并且 $T_{i-1} \nvdash \text{pre}(\delta)$; 同时,对于任意的缺省规则 $\delta \in \Delta_{i-1}, \delta \stackrel{L}{<} \delta'_i$.

我们称 E 是缺省理论 $\Gamma=(T,\Delta)$ 的一个关于序 L 的 GD-扩展.并且,对于任意公式 $\phi \in \text{pre}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} \Delta_i\right)$, $E \nVdash \phi$.

不同于缺省逻辑,贪婪缺省逻辑的 GD-扩展的定义是构造型的.在贪婪缺省逻辑中,由于随着作用集合的变化,作用相同的缺省规则产生的伪子公式是不尽相同的,即便是将缺省规则作用在最终生成的 GD-扩展上所生成的公式与在生成扩展的过程中作用于该规则所产生的公式也未必相同.而在缺省逻辑中,即使集合发生变化,作用相同的缺省规则产生的公式要么是其本身,要么是一个空公式;并且,将缺省规则作用在最终生成的扩展上生成的公式与在生成扩展的过程中作用于该规则上产生的公式是相同的.因此,我们不能把 GD-扩展不动点型定义为类似于缺省逻辑中形式,即 $\wedge_{\Gamma}(S) = Th(T \cup \{\phi : S \vdash \phi, E \nVdash \neg\psi, \phi \rightsquigarrow \psi \in \Delta\})$, 其中, E 是扩展.

例 2.13: 给定缺省理论 $\Gamma=(T,\Delta)$, $T = \{p_1, \neg p_2\}$, $\Delta = \{p_3 \rightsquigarrow p_4, p_1 \rightsquigarrow p_2 \wedge p_3, p_4 \rightsquigarrow p_2\}$. L 是定义在 Δ 上的全序, 其中, $L = p_3 \rightsquigarrow p_4, p_1 \rightsquigarrow p_2 \wedge p_3, p_4 \rightsquigarrow p_2$. 我们构造缺省理论 $\Gamma=(T,\Delta)$ 的一个关于序 L 的 GD-扩展如下.

Step 1.

$$T_0 = T, \Delta_0 = \Delta; \delta_{k_0} = p_1 \rightsquigarrow p_2 \wedge p_3, \Delta_{0'} = \{p_3 \rightsquigarrow p_4\}, \Delta_{0''} = \{p_4 \rightsquigarrow p_2\};$$

因为

$$\frac{\frac{T_0 \vdash p_1 \quad T_0 \vdash \neg p_2}{T_0 \mid \Delta_{0'}, p_1 \rightsquigarrow p_2, \Delta_{0''} \Rightarrow T_0, \lambda \mid \Delta_{0'}, \Delta_{0''}} \quad \frac{T_0 \vdash p_1 \quad T_0 \nVdash \neg p_3}{T_0 \mid \Delta_{0'}, p_1 \rightsquigarrow p_3, \Delta_{0''} \Rightarrow T_0, p_3 \mid \Delta_{0'}, \Delta_{0''}}}{T_0 \mid \Delta_{0'}, p_1 \rightsquigarrow p_2 \wedge p_3, \Delta_{0''} \Rightarrow T_0, p_3 \mid \Delta_{0'}, \Delta_{0''}},$$

故而有 $\vdash^D T_0 \mid \Delta_{0'}, \delta_{k_0}, \Delta_{0''} \Rightarrow T_0, \theta_{k_0} \mid \Delta_{0'}, \Delta_{0''}$, 其中, $\theta_{k_0} = p_3$.

Step 2.

$$\Delta_1 = \Delta_{0'} \cup \Delta_{0''} = \{p_3 \rightsquigarrow p_4, p_4 \rightsquigarrow p_2\}, T_1 = T_0 \cup \{\theta_{k_0}\}; \delta_{k_1} = p_3 \rightsquigarrow p_4, \Delta_{1'} = \emptyset, \Delta_{1''} = \{p_4 \rightsquigarrow p_2\};$$

因为

$$\frac{T_1 \vdash p_3 \quad T_1 \nVdash \neg\neg p_4}{T_1 \mid p_3 \rightsquigarrow p_4, \Delta_{1''} \Rightarrow T_1, p_4 \mid \Delta_{1''}},$$

故而有 $\vdash^D T_1 \mid p_3 \rightsquigarrow p_4, \Delta_{1''} \Rightarrow T_1, p_4 \mid \Delta_{1''}$, 其中, $\theta_{k_1} = p_4$.

Step 3.

$$\Delta_2 = \Delta_{0'} \cup \Delta_{0''} = \{p_4 \rightsquigarrow p_2\}, T_2 = T_1 \cup \{\theta_{k_1}\}; \delta_{k_2} = p_4 \rightsquigarrow p_2, \Delta_{2'} = \emptyset, \Delta_{2''} = \emptyset;$$

因为

$$\frac{T_2 \vdash p_4 \quad T_2 \vdash \neg p_2}{T_2 \mid p_4 \rightsquigarrow p_2 \Rightarrow T_2, \lambda},$$

故而有 $\vdash^D T_2 \mid p_4 \rightsquigarrow p_2 \Rightarrow T_2, \lambda$, 其中, $\theta_{k_2} = \lambda$.

故而 $Th(T_2)$ 是缺省理论 $\Gamma=(T,\Delta)$ 的一个关于序 L 的 GD-扩展, 并且公式 p_3, p_4 都是于缺省理论 $\Gamma=(T,\Delta)$ 在序 L 下可证的.

3 贪婪缺省推演系统-GD 系统的性质

例 3.1: 给定公式集合 $S = \{p, \neg q_2, \neg q_4\}$ 和缺省规则 $\delta = p \rightsquigarrow (q_1 \wedge q_2) \wedge (q_3 \wedge q_4)$. 首先, 因为 $S \vdash p$, 缺省规则 δ 是可作用于集合 S 上的; 之后, 按照贪婪缺省逻辑的推导规则, 将缺省规则 δ 作用在集合 S 上.

$$\frac{\frac{S \vdash p \quad S \nVdash \neg q_1}{S \mid p \rightsquigarrow q_1 \Rightarrow S, q_1} \quad \frac{S \vdash p \quad S \vdash \neg q_2}{S, q_1 \mid p \rightsquigarrow q_2 \Rightarrow S, q_1, \lambda} \quad \frac{S \vdash p \quad S \nVdash \neg q_3}{S \mid p \rightsquigarrow q_3 \Rightarrow S, q_3} \quad \frac{S \vdash p \quad S \vdash \neg q_4}{S, q_3 \mid p \rightsquigarrow q_4 \Rightarrow S, q_3, \lambda}}{\frac{S \mid p \rightsquigarrow q_1 \wedge q_2 \Rightarrow S, q_1 \quad S \mid p \rightsquigarrow q_3 \wedge q_4 \Rightarrow S, q_3}{S \mid p \rightsquigarrow (q_1 \wedge q_2) \wedge (q_3 \wedge q_4) \Rightarrow S, q_1 \wedge q_3}}.$$

我们可以得到公式 $q_1 \wedge q_3, q_1 \wedge q_3$ 并不是 $(q_1 \wedge q_2) \wedge (q_3 \wedge q_4)$ 的子公式, 而是 $(q_1 \wedge q_2) \wedge (q_3 \wedge q_4)$ 的伪子公式.

从上述的例子中我们发现, 在贪婪缺省逻辑中, 作用缺省规则 δ 而产生的公式是 $\text{cons}(\delta)$ 的伪子公式. 正如接下来的定理 3.2.

定理 3.2. 给定协调的公式集合 S , 缺省规则集合 Δ_1, Δ_2 和缺省规则 $\delta = \phi \rightsquigarrow \psi$; 其中, 对于任意的公式 $\phi_1 \in \text{pre}(\Delta_1)$, 都有 $S \not\vdash \phi_1$. 那么, 如果 $S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi, \Delta_2 \Rightarrow S, \theta | \Delta_1, \Delta_2$ 是 GD-可证的, 则 θ 是 ψ 的伪子公式.

证明: 我们对公式 ψ 的结构进行归纳证明.

基始: 如果 $\psi = p$ 或者 $\psi = \neg p$, 根据推导规则的定义, θ 的形式要么是 ψ 本身, 要么是空公式. 显然, ψ 和空公式 λ 都是 ψ 的伪子公式, 结论成立.

归纳步骤: 假设结论在结构比公式 ψ 简单的公式上成立.

如果 $\vdash^{\text{GD}} S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi, \Delta_2 \Rightarrow S, \theta | \Delta_1, \Delta_2$, 根据证明的定义, 存在一棵以 $S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi, \Delta_2 \Rightarrow S, \theta | \Delta_1, \Delta_2$ 为根节点的证明树. 那么存在以下几种情形.

情形 1: $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$.

根据证明树的定义, 证明树的最低两层有以下 3 种可能:

$$\frac{\frac{S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1, \Delta_2 \Rightarrow S, \psi_1 | \Delta_1, \Delta_2}{S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi, \Delta_2 \Rightarrow S, \psi_1 \vee \psi_2 | \Delta_1, \Delta_2}, \frac{S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow S, \psi_2 | \Delta_1, \Delta_2}{S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi, \Delta_2 \Rightarrow S, \psi_1 \vee \psi_2 | \Delta_1, \Delta_2}}{S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1, \Delta_2 \Rightarrow S, \theta_1 | \Delta_1, \Delta_2 \quad S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow S, \theta_2 | \Delta_1, \Delta_2} \quad S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi, \Delta_2 \Rightarrow S | \Delta_1, \Delta_2}$$

对于第 1 种和第 2 种可能, 显然, $\psi_1 \vee \psi_2$ 是其本身的伪子公式, 结论成立. 第 3 种情形是一种特殊的情形, 空公式是所有公式的伪子公式.

情形 2: $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$.

根据证明树的定义, 证明树的最低两层有以下 3 种可能:

$$\frac{\frac{S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1, \Delta_2 \Rightarrow S, \psi_1 | \Delta_1, \Delta_2 \quad S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow S, \psi_1, \psi_2 | \Delta_1, \Delta_2}{S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow S, \psi_1 \wedge \psi_2 | \Delta_1, \Delta_2}, \frac{S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1, \Delta_2 \Rightarrow S, \theta_1 | \Delta_1, \Delta_2 \quad S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow S, \theta_1, \theta_2 | \Delta_1, \Delta_2}{S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow S, \theta_1 \wedge \theta_2 | \Delta_1, \Delta_2}, \frac{S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow S, \theta_2 | \Delta_1, \Delta_2 \quad S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1, \Delta_2 \Rightarrow S, \theta_2, \theta_1 | \Delta_1, \Delta_2}{S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow S, \theta_1 \wedge \theta_2 | \Delta_1, \Delta_2}}$$

对于第 1 种情形, 显然, $\psi_1 \wedge \psi_2$ 是其本身的伪子公式, 结论成立. 我们下面将对第 2 种情形进行讨论.

因为缺省矢列式 $S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_1, \Delta_2 \Rightarrow S, \theta_1 | \Delta_1, \Delta_2$ 和 $S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi_2, \Delta_2 \Rightarrow S, \theta_1, \theta_2 | \Delta_1, \Delta_2$ 都是 GD-可证的; 由归纳假设, θ_1 与 θ_2 分别是 ψ_1 与 ψ_2 的伪子公式. 根据证明树的定义, $\theta = \theta_1 \wedge \theta_2$. 又根据伪子公式的定义, $\theta_1 \wedge \theta_2$ 是 $\psi_1 \wedge \psi_2$ 的伪子公式, 故而结论成立.

第 3 种情形与第 2 种类似.

定理 3.3. 给定协调的公式集合 S , 缺省规则集合 Δ_1, Δ_2 和缺省规则 $\delta = \phi \rightsquigarrow \psi$; 其中, 对于任意的公式 $\phi_1 \in \text{pre}(\Delta_1)$, 都有 $S \not\vdash \phi_1$. 那么, $S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi, \Delta_2 \Rightarrow S, \psi | \Delta_1, \Delta_2$ 是 GD-可证的, 当且仅当 $S \vdash \phi$, 并且 $S \not\vdash \neg \psi$.

证明: 我们对公式 ψ 的结构进行归纳证明.

基始: 如果 $\psi = p$ 或者 $\psi = \neg p$, 根据推导规则的定义, 结论成立.

归纳步骤: 假设结论在结构比公式 ψ 简单的公式上成立.

情形 1: $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$.

(\Rightarrow) 如果 $S | \delta \Rightarrow S, \psi$ 是可证的, 则存在一棵以 $S | \delta \Rightarrow S, \psi$ 为根节点的证明树, 使得该证明树的最底部的两层为

$$\frac{S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S, \psi_1}{S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow S, \psi_1 \vee \psi_2} \quad \text{或者} \quad \frac{S | \phi \rightsquigarrow \psi_2 \Rightarrow S, \psi_2}{S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow S, \psi_1 \vee \psi_2}.$$

根据证明的定义, 可以得到矢列式 $S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S, \psi_1$ 或者 $S | \phi \rightsquigarrow \psi_2 \Rightarrow S, \psi_2$ 是可证的. 由归纳假设 $S \cup \{\psi_1\}$ 或者 $S \cup \{\psi_2\}$ 是协调的. 因此 $S \cup \{\psi_1 \vee \psi_2\}$ 是协调的. 即 $S \not\vdash \neg \psi$.

(\Leftarrow) 如果 $S \not\vdash \neg \psi$, 则有 $S \not\vdash \neg \psi_1 \wedge \neg \psi_2$. 即 $S \not\vdash \neg \psi_1$ 或者 $S \not\vdash \neg \psi_2$. 不妨假设 $S \not\vdash \neg \psi_1$. 由归纳假设, $S | \phi \rightsquigarrow$

$\psi_1 \Rightarrow S, \psi_1$ 是可证的. 故而由推导规则 \vee^{\downarrow} , 有

$$\frac{S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S, \psi_1}{S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow S, \psi_1 \vee \psi_2}$$

可以知道, $S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow S, \psi_1 \vee \psi_2$ 是可证的. 同样地, 如果 $S \nVdash \neg \psi_2$, 则有 $S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow S, \psi_1 \vee \psi_2$ 是可证的.

即结论在情形 1 的情况下成立.

情形 2: $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$.

(\Rightarrow) 如果 $S | \delta \Rightarrow S, \psi$ 是可证的, 则存在一棵以 $S | \delta \Rightarrow S, \psi$ 为根节点的证明树, 使得该证明树的最底两层为

$$\frac{S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S, \psi_1 \quad S, \psi_1 | \phi \rightsquigarrow \psi_2 \Rightarrow S, \psi_1, \psi_2}{S | \phi \rightsquigarrow \psi \Rightarrow S, \psi_1 \wedge \psi_2}$$

根据证明树的定义, $S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S, \psi_1$ 是可证的, 由归纳假设可知 $S \cup \{\psi_1\}$ 是协调的. 同理, $S, \psi_1 | \phi \rightsquigarrow \psi_2 \Rightarrow S, \psi_1, \psi_2$ 也是可证的, 再次使用归纳假设可知, $S \cup \{\psi_1\} \cup \{\psi_2\}$ 是协调的. 因此, $S \cup \{\psi_1 \wedge \psi_2\}$ 是协调的, 故而 $S \nVdash \neg \psi$.

(\Leftarrow) 如果 $S \nVdash \neg \psi$, 则 $S \nVdash \neg \psi_1 \vee \neg \psi_2$. 即 $S \nVdash \neg \psi_1$ 且 $S \nVdash \neg \psi_2$. 因为 $S \cup \{\psi_1, \psi_2\}$ 是协调的, 所以, $S, \psi_1 \nVdash \neg \psi_2$. 由归纳假设, $S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S, \psi_1$ 和 $S, \psi_1 | \phi \rightsquigarrow \psi_2 \Rightarrow S, \psi_1, \psi_2$ 都是可证的. 使用推导规则 \wedge^{\downarrow} , 有

$$\frac{S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S, \psi_1 \quad S, \psi_1 | \phi \rightsquigarrow \psi_2 \Rightarrow S, \psi_1, \psi_2}{S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2 \Rightarrow S, \psi_1 \wedge \psi_2}$$

可知 $S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2 \Rightarrow S, \psi_1 \wedge \psi_2$ 是可证的.

即结论在情形 2 的情况下成立.

定理 3.4. 给定协调的公式集合 S , 缺省规则集合 Δ_1, Δ_2 和缺省规则 $\delta = \phi \rightsquigarrow \psi$; 其中, 对于任意的公式 $\phi_i \in \text{pre}(\Delta_i)$, 都有 $S \nVdash \phi_i$. 如果 $S | \Delta_1, \phi \rightsquigarrow \psi, \Delta_2 \Rightarrow S, \theta | \Delta_1, \Delta_2$ 是 GD-可证的, 则 $S \cup \{\theta\}$ 是协调的.

证明: 我们对 ψ 的公式结构进行归纳假设.

基始: 如果 $\psi = p$ 或者 $\phi = \neg p$, 由推导规则定义可知, 结论成立.

归纳步骤: 假设结论在结构比公式 ψ 简单的公式上成立.

情形 1: $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$.

子情形 1.1: $\theta = \psi_1 \vee \psi_2$.

由定理 3.3 可知, 结论成立.

子情形 1.2: $\theta = \lambda$, 结论成立.

情形 2: $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$.

子情形 2.1: $\theta = \theta_1 \wedge \theta_2$.

如果 $S | \phi \rightsquigarrow \psi \Rightarrow S, \theta_1 \wedge \theta_2$ 是可证的, 则存在一棵以 $S | \phi \rightsquigarrow \psi \Rightarrow S, \theta_1 \wedge \theta_2$ 为根节点的证明树, 使得该证明树的最底两层为

$$\frac{S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S, \theta_1 \quad S, \theta_1 | \phi \rightsquigarrow \psi_2 \Rightarrow S, \theta_1, \theta_2}{S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2 \Rightarrow S, \theta_1 \wedge \theta_2} \quad (1)$$

$$\frac{S | \phi \rightsquigarrow \psi_2 \Rightarrow S, \theta_2 \quad S, \theta_2 | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S, \theta_2, \theta_1}{S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2 \Rightarrow S, \theta_1 \wedge \theta_2} \quad (2)$$

其中, 在公式(1)中出现的 θ_1 和 θ_2 与公式(2)中出现的 θ_1 和 θ_2 不一定相同.

由式(1)可知, $S | \phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S, \theta_1$ 是可证的, 故由归纳假设可知 $S \cup \{\theta_1\}$ 是协调的. 同理, $S, \theta_1 | \phi \rightsquigarrow \psi_2 \Rightarrow S, \theta_1, \theta_2$ 也是可证的, 因此, $S \cup \{\theta_1\} \cup \{\theta_2\}$ 是协调的. 故而 $S \cup \{\theta_1 \wedge \theta_2\}$ 是协调的.

式(2)的情形与式(1)类似.

子情形 2.2: $\theta = \psi_1 \wedge \theta_2$ 与 $\theta = \theta_1 \wedge \psi_2$.

与子情形 2.1 类似.

子情形 2.3: $\theta = \psi_1 \wedge \psi_2$.

由定理 3.3 可知, 结论成立.

推论 3.5. 给定缺省理论 $\Gamma=(T,\Delta)$, 其中, T 是协调的公式集合, Δ 是缺省规则的集合. 对于任意的公式集合 E , 如果 E 是缺省理论 $\Gamma=(T,\Delta)$ 的一个 GD-扩展, 则 E 是协调的.

证明: 根据 GD-扩展的定义, 我们对自然数 n 进行归纳.

基始: 当 $n=0$ 时, 由于 $T_0=T$, T 是协调的, 因此 T_0 是协调的公式集合. 结论成立.

归纳步骤: 假设当 $n=k$ 时, 结论成立, 即 T_k 是协调的公式集合. 当 $n=k+1$ 时, 令 δ 是序最优的, 并且是可以被作用的缺省规则. 根据缺省规则的推导规则,

$$\vdash^{\text{GD}} T_k | \Delta_1, \delta, \Delta_2 \Rightarrow T_k, \theta | \Delta_1, \Delta_2,$$

并且 $T_{k+1} = T_k \cup \{\theta\}$. 由定理 3.4, T_{k+1} 是协调的. 并且根据 GD-扩展的定义过程, 对于任意的自然数 i, j , 如果 $i < j$, 则有 $T_i \subseteq T_j$. 因此, $\bigcup_{i=0}^{k+1} T_i = T_{k+1}$. 于是, 对于任意的自然数 n , 都有 T_n 和 $\bigcup_{i=0}^n T_i$ 均是协调的. 又因为 GD-扩展 $E = Th\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} T_i\right)$, 因此 E 是协调的.

4 GD-扩展的性质及与扩展的比较

在第 2 节中, 我们给出了贪婪缺省逻辑中 GD-扩展的定义. 自然而然地, 我们会产生疑问, 对于缺省理论 Γ, Γ' 在贪婪缺省逻辑中的 GD-扩展 E 和缺省逻辑中的扩展 E' 存在怎样的区别与联系呢?

可以发现, 贪婪缺省逻辑 GD-扩展的定义与缺省逻辑扩展的构造定理是类似的, 且贪婪缺省逻辑的目标是尽可能地保留缺省规则中的信息. 那么, 对于 GD-扩展 E , 是否存在扩展 E' 使得 $E' \subseteq E$? 亦或对于扩展 E' , 是否存在 GD-扩展 E 使得 $E' \subseteq E$?

首先, 回到本文开始部分提出的问题, *Jone* 是一个没有腿的人和人是缺省的有胳膊并且有腿的; 其次, 我们使用贪婪缺省逻辑的推导规则, 是否可以得到我们想要的结果?

例 4.1: 给定缺省理论 $\Gamma=(T,\Delta)$, 其中, $T = \{\text{Man}(\text{Jone}), \neg \text{HasLeg}(\text{Jone})\}$, $\Delta = \{\text{Man}(x) \rightsquigarrow \text{HasLeg}(x) \wedge \text{HasArm}(x)\}$.

构造关于缺省理论 Γ 的证明树如下:

$$\frac{\frac{T \vdash \text{Man}(\text{Jone}) \quad T \vdash \neg \text{HasLeg}(\text{Jone})}{T | \text{Man}(\text{Jone}) \rightsquigarrow \text{HasLeg}(\text{Jone}) \Rightarrow T, \lambda} \quad \frac{T \vdash \text{Man}(\text{Jone}) \quad T \not\vdash \neg \text{HasArm}(\text{Jone})}{T, \lambda | \text{Man}(\text{Jone}) \rightsquigarrow \text{HasArm}(\text{Jone}) \Rightarrow T, \text{HasArm}(\text{Jone})}}{T | \text{Man}(\text{Jone}) \rightsquigarrow \text{HasLeg}(\text{Jone}) \wedge \text{HasArm}(\text{Jone}) \Rightarrow T, \text{HasArm}(\text{Jone})}$$

于是, 缺省理论的 GD-扩展为 $Th(\{\text{Man}(\text{Jone}), \neg \text{HasLeg}(\text{Jone}), \text{HasArm}(\text{Jone})\})$. 因此, 通过人是缺省的有胳膊和腿的这条规则以及 *Jone* 是一个没有腿的人推导出 *Jone* 是有胳膊而没有腿的.

下面我们将通过给出的几个具体例子来探讨贪婪缺省逻辑的扩展与缺省逻辑扩展之间的关系.

例 4.2: 给定缺省理论 $\Gamma=(T,\Delta)$, $T=\{p\}$, $\Delta=\{\delta_1, \delta_2\}$, 其中, $\delta_1 = p \rightsquigarrow \neg q_1$, $\delta_2 = p \rightsquigarrow q_1 \wedge q_2$.

我们可以写出两棵关于该缺省理论 Γ 的证明树.

$$\frac{\frac{\frac{T \vdash p \quad T \not\vdash q_1}{T | \delta_1, \delta_2 \Rightarrow T, \neg q_1 | \delta_2} \quad \frac{\frac{T, \neg q_1 \vdash p \quad T, \neg q_1 \not\vdash \neg q_2}{T, \neg q_1 | p \rightsquigarrow q_2 \Rightarrow T, \neg q_1, q_2}}{T, \neg q_1 | \delta_2 \Rightarrow T, \neg q_1, q_2}}{T | \delta_1, \delta_2 \Rightarrow T, \neg q_1, q_2}}{\frac{\frac{\frac{T \vdash p \quad T \not\vdash \neg q_1}{T | p \rightsquigarrow q_1, \delta_1 \Rightarrow T, q_1 | \delta_1} \quad \frac{T, q_1 \vdash p \quad T, q_1 \not\vdash \neg q_2}{T, q_1 | p \rightsquigarrow q_2, \delta_1 \Rightarrow T, q_1, q_2 | \delta_1}}{T, q_1 \wedge q_2 \vdash p \quad T, q_1 \wedge q_2 \vdash q_1}}{T, q_1 \wedge q_2 | \delta_1 \Rightarrow T, q_1 \wedge q_2, \lambda}}{T | \delta_2, \delta_1 \Rightarrow T, q_1 \wedge q_2, \lambda}$$

根据证明树, 可以得到缺省理论 Γ 的两个 GD-扩展: $E_1 = Th(\{p, \neg q_1, q_2\})$, $E_2 = Th(\{p, q_1 \wedge q_2\})$. 另一方面, 根据缺省理论扩展的定义, 缺省理论 Γ 有两个扩展: $E_3 = Th(\{p, \neg q_1\})$, $E_4 = Th(\{p, q_1 \wedge q_2\})$, 且有 $E_3 \subseteq E_1$ 和 $E_2 = E_4$.

即缺省理论的扩展可能是其 GD-扩展, 也可能是其 GD-扩展的子集.

接下来, 我们考虑一个公式结构稍微复杂些的例子.

例 4.3: 给定缺省理论 $\Gamma=(T,\Delta)$, $T=\{p\}$, $\Delta=\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$, 其中, $\delta_1 = p \rightsquigarrow \neg q_1$, $\delta_2 = p \rightsquigarrow \neg q_3$, $\delta_3 = p \rightsquigarrow \neg q_4$ 以

及 $\delta_4 = p \rightsquigarrow ((q_1 \wedge q_2) \wedge q_3) \vee q_4$.

以序列 $L = \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ 构造的证明树为例.

$$\frac{\frac{S_1}{T | \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \Rightarrow T, \neg q_1, \neg q_3, \neg q_4 | \delta_4} \quad \frac{S_2}{T, \neg q_1, \neg q_3, \neg q_4 | \delta_4 \Rightarrow T, \neg q_1, \neg q_3, \neg q_4, \lambda}}{T | \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \Rightarrow T, \neg q_1, \neg q_3, \neg q_4} \text{(TR)}$$

首先分解左边的这一支 S_1 , 可以得到

$$S_1 = \frac{\frac{S_3}{T | \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \Rightarrow T, \neg q_1, \neg q_3 | \delta_3, \delta_4} \quad \frac{S_4}{T, \neg q_1, \neg q_3 | \delta_3, \delta_4 \Rightarrow T, \neg q_1, \neg q_3, \neg q_4 | \delta_4}}{T | \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \Rightarrow T, \neg q_1, \neg q_3, \neg q_4 | \delta_4} \text{(TR)}$$

$$S_3 = \frac{\frac{S_5}{T | \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \Rightarrow T, \neg q_1 | \delta_2, \delta_3, \delta_4} \quad \frac{S_6}{T, \neg q_1 | \delta_2, \delta_3, \delta_4 \Rightarrow T, \neg q_1, \neg q_3 | \delta_3, \delta_4}}{T | \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \Rightarrow T, \neg q_1, \neg q_3 | \delta_3, \delta_4} \text{(TR)}$$

$$S_4 = \frac{T, \neg q_1, \neg q_3 \vdash p \quad T, \neg q_1, \neg q_3 \not\vdash q_4}{T, \neg q_1, \neg q_3 | \delta_3, \delta_4 \Rightarrow T, \neg q_1, \neg q_3, \neg q_4 | \delta_4} \text{(Atomic}^+)$$

$$S_5 = \frac{T \vdash p \quad T \not\vdash q_1}{T | \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \Rightarrow T, \neg q_1 | \delta_2, \delta_3, \delta_4} \text{(Atomic}^+)$$

$$S_6 = \frac{T, \neg q_1 \vdash p, T, \neg q_1 \not\vdash q_3}{T, \neg q_1 | \delta_2, \delta_3, \delta_4 \Rightarrow T, \neg q_1, \neg q_3 | \delta_3, \delta_4} \text{(Atomic}^+)$$

再来分解 S_2 这一支, 可以得到(为了简化标记, 我们使用符号 T' 表示集合 $T \cup \{-q_1, -q_3, -q_4\}$):

$$S_2 = \frac{\frac{S_7}{T' | p \rightsquigarrow (q_1 \wedge q_2) \wedge q_3 \Rightarrow T', q_2} \quad \frac{S_8}{T' | p \rightsquigarrow q_4 \Rightarrow T', \lambda}}{T' | \delta_4 \Rightarrow T', q_2} (\vee^\uparrow)$$

$$S_7 = \frac{\frac{S_9}{T' | p \rightsquigarrow q_1 \wedge q_2 \Rightarrow T', q_2} \quad \frac{S_{10}}{T' | p \rightsquigarrow q_3 \Rightarrow T', \lambda}}{T' | p \rightsquigarrow (q_1 \wedge q_2) \wedge q_3 \Rightarrow T', q_2} (\wedge^\uparrow)$$

$$S_8 = \frac{T' \vdash p \quad T' \vdash \neg q_4}{T' | p \rightsquigarrow q_4 \Rightarrow T', \lambda} \text{(Atomic}^+)$$

$$S_9 = \frac{\frac{S_{11}}{T' | p \rightsquigarrow q_1 \Rightarrow T', \lambda} \quad \frac{S_{12}}{T', \lambda | p \rightsquigarrow q_2 \Rightarrow T' q_2}}{T' | p \rightsquigarrow q_1 \wedge q_2 \Rightarrow T', q_2} (\wedge^\uparrow)$$

$$S_{10} = \frac{T' \vdash p \quad T \vdash \neg q_3}{T' | p \rightsquigarrow q_3 \Rightarrow T', \lambda} \text{(Atomic}^-)$$

$$S_{11} = \frac{T' \vdash p \quad T \vdash \neg q_1}{T' | p \rightsquigarrow q_1 \Rightarrow T', \lambda} \text{(Atomic}^-)$$

$$S_{12} = \frac{T' \vdash p \quad T \not\vdash \neg q_2}{T' | p \rightsquigarrow q_2 \Rightarrow T', q_2} \text{(Atomic}^+)$$

节点 $S_5, S_6, S_8, S_{10}, S_{11}$ 和 S_{12} 的上层公式都是 **Atomic** 规则, 即它们都是叶子节点, 其他节点都是中间节点, 它们都是通过联结词的分解规则亦或是传递规则联结起来的. 这样即构成了一棵以 $T | \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \Rightarrow T, \neg q_1, \neg q_3, \neg q_4, q_2$ 为根节点证明树.

我们给出图 1 证明树的结构示意图以帮助理解.

根据证明树与 GD-扩展的定义, 我们可以得到缺省理论 T 的一个 GD-扩展 $E_1 = Th(\{p, \neg q_1, \neg q_3, \neg q_4\})$.

类似地, 我们可以得到缺省理论 T 在其他 23 种序列下的证明树, 由于数目较多, 这里我们不再一一列举. 从 24 种不同序列的证明树中, 我们可以根据定义得到缺省理论 T 的 3 个不同的 GD-扩展.

$$E_1 = Th(\{p, \neg q_1, \neg q_3, \neg q_4\}),$$

$$E_2 = Th(\{p, \neg q_1, \neg q_3, ((q_1 \wedge q_2) \wedge q_3) \vee q_4\}),$$

$$E_3 = Th(\{p, \neg q_4, (((q_1 \wedge q_2) \wedge q_3) \vee q_4\}).$$

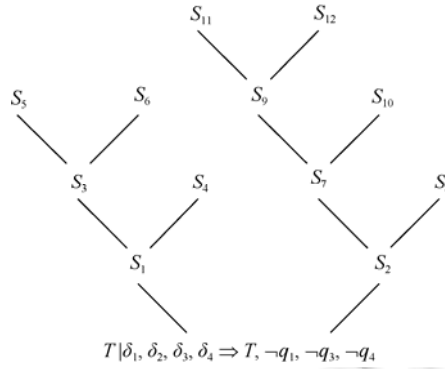


Fig.1 Structure of proof tree
图 1 证明树结构示意图

根据缺省逻辑扩展的定义, E_1, E_2 和 E_3 都是缺省理论 Γ 的扩展. 即在这个缺省理论中, E_1, E_2 和 E_3 既是缺省理论的扩展, 又是缺省理论的 GD-扩展. 并且, Γ 任意的两个不同的 GD-扩展的并集都是不协调的.

下面的例子则说明, 可能存在某些 GD-扩展, 并不存在扩展, 使得这些 GD-扩展与扩展之间有包含关系.

例 4.4: 给定缺省理论 $\Gamma = (T, \Delta), T = \{p\}, \Delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, 其中, $\delta_1 = p \rightsquigarrow q_1 \wedge q_2$, $\delta_2 = p \rightsquigarrow \neg q_1$ 以及 $\delta_3 = p \rightsquigarrow \neg q_2$.

与例 4.3 类似, 可以得到缺省理论 Γ 在 6 种序列下的证明树, 因此下面的缺省矢列式都是 GD-可证的.

$$T \mid \delta_1, \delta_2, \delta_3 \Rightarrow p, q_1 \wedge q_2, \quad T \mid \delta_1, \delta_3, \delta_2 \Rightarrow p, q_1 \wedge q_2, \quad T \mid \delta_2, \delta_1, \delta_3 \Rightarrow p, \neg q_1, q_2,$$

$$T \mid \delta_2, \delta_3, \delta_1 \Rightarrow p, \neg q_1, \neg q_2, \quad T \mid \delta_3, \delta_1, \delta_2 \Rightarrow p, \neg q_2, q_1, \quad T \mid \delta_3, \delta_2, \delta_1 \Rightarrow p, \neg q_2, \neg q_1.$$

根据 GD-扩展的定义, 我们可以得到缺省理论 Γ 的 4 种不同的 GD-扩展.

$$E_1 = Th(\{p, q_1 \wedge q_2\}), \quad E_2 = Th(\{p, \neg q_1, q_2\}),$$

$$E_3 = Th(\{p, \neg q_1, \neg q_2\}), \quad E_4 = Th(\{p, \neg q_2, q_1\}).$$

根据缺省逻辑中扩展的定义, Γ 的扩展为

$$E_5 = Th(\{p, q_1 \wedge q_2\}) \text{ 和 } E_6 = Th(\{p, \neg q_1, \neg q_2\}).$$

从而有 $E_1 = E_5, E_3 = E_6$, 即 E_1 和 E_3 既是缺省理论的扩展, 又是缺省理论的 GD-扩展. 但是, 不同于例 4.3, 在该例子中, GD-扩展 E_2 和 E_4 并不包含该缺省理论的扩展.

那么贪婪缺省逻辑中缺省理论的 GD-扩展是否也与扩展一样具有半单调性呢? 我们先看下面的例子.

例 4.5: 给定缺省理论 $\Gamma = (T, \Delta)$ 和 $\Gamma' = (T, \Delta')$, $T = \{p\}, \Delta = \{\delta_1\}, \Delta' = \{\delta_1, \delta_2\}$; 其中, $\delta_1 = p \rightsquigarrow q_1 \wedge q_2$, $\delta_2 = p \rightsquigarrow \neg q_1$.

分别构造缺省理论 Γ 与 Γ' 的证明树. Γ 只有 1 棵证明树如下:

$$\frac{\frac{p \vdash p \quad p \not\vdash q_1}{p \mid p \rightsquigarrow q_1 \Rightarrow p, q_1} \quad \frac{p, q_1 \vdash p \quad p, q_1 \not\vdash q_2}{p, q_1 \mid p \rightsquigarrow q_2 \Rightarrow p, q_1, q_2}}{p \mid p \rightsquigarrow q_1 \wedge q_2 \Rightarrow p, q_1 \wedge q_2}.$$

缺省理论 Γ' 有两棵证明树, 分别为

$$\frac{\frac{p \vdash p \quad p \not\vdash q_1}{p \mid p \rightsquigarrow q_1, \delta_2 \Rightarrow p, q_1 \mid \delta_2} \quad \frac{p, q_1 \vdash p \quad p, q_1 \not\vdash q_2}{p, q_1 \mid p \rightsquigarrow q_2, \delta_2 \Rightarrow p, q_1, q_2 \mid \delta_2}}{p \mid p \rightsquigarrow q_1 \wedge q_2, \delta_2 \Rightarrow p, q_1 \wedge q_2 \mid \delta_2} \quad \frac{p, q_1 \vdash p \quad p, q_1 \vdash q_1}{p, q_1 \wedge q_2 \mid \delta_2 \Rightarrow p, q_1 \wedge q_2, \lambda},$$

$$p \mid \delta_1, \delta_2 \Rightarrow p, q_1 \wedge q_2$$

$$\frac{\frac{p \vdash p \quad p \not\vdash q_1}{p \mid p \rightsquigarrow \neg q_1, \delta_2 \Rightarrow p, \neg q_1 \mid \delta_2} \quad \frac{\frac{p, \neg q_1 \vdash p \quad p, \neg q_1 \vdash \neg q_1}{p, \neg q_1 \mid p \rightsquigarrow q_1 \Rightarrow p, \neg q_1, \lambda} \quad \frac{p, \neg q_1 \vdash p \quad p, \neg q_1 \not\vdash \neg q_2}{p, \neg q_1 \mid p \rightsquigarrow q_2 \Rightarrow p, \neg q_1, q_2}}{p, \neg q_1 \mid p \rightsquigarrow q_1 \wedge q_2 \Rightarrow p, \neg q_1, q_2}}{p \mid \delta_2, \delta_1 \Rightarrow p, \neg q_1, q_2}$$

因此,缺省理论 Γ 只有一个 GD-扩展: $E = Th(\{p, q_1 \wedge q_2\})$, 缺省理论 Γ 有两个 GD-扩展 $E'_1 = Th(\{p, q_1 \wedge q_2\})$ 和 $E'_2 = Th(\{p, \neg q_1, q_2\})$, 其中, $E = E'_1$.

根据上述的例子,我们可以得到下面的定理.

定理 4.6(GD-扩展的存在性). 一个缺省理论至少有一个 GD-扩展.

定理 4.7(GD-扩展的半单调性). 给定缺省理论 $\Gamma_1=(T, \Delta)$ 和缺省理论 $\Gamma=(T, \Delta')$, 满足 $\Delta \subseteq \Delta'$. 如果 E 是缺省理论 Γ_1 的一个 GD-扩展, 那么一定存在缺省理论 Γ_2 的一个 GD-扩展 E' , 使得 $E \subseteq E'$.

证明: 因为 E 是缺省理论 Γ_1 的一个 GD-扩展, 根据 GD-扩展的定义, 一定存在序列 $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots$ (T_i 的定义见定义 2.12), 使得 $E = Th\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} T_i\right)$. 下面我们证明存在 E' , 使得 $E \subseteq E'$.

因为根据 GD-扩展的定义, 对于每一个集合 T_i , 都对应一个缺省规则 δ_{i+1} , 并且 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots$ 是缺省规则集合 Δ 上的一个全序 L . 定义 $\Delta^- = \Delta' - \Delta$ 和 Δ' 上的一个全序 L', L' 满足

- 对于任意 $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$, 如果 $\delta_1 \succeq^L \delta_2$, 则 $\delta_1 \succeq^{L'} \delta_2$;
- 对于任意 $\delta \in \Delta$ 和 $\delta' \in \Delta^-$, 都有 $\delta \succeq^{L'} \delta'$.

因此根据定义, 按照序列 L' 生成的 GD-扩展 E' 满足对于任意 T_i , 都有 $T_i \subseteq E'$. 故而 $Th\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} T_i\right) \subseteq E'$, 即 $E \subseteq E'$.

定理 4.8. 给定缺省理论 $\Gamma=(T, \Delta)$, 如果存在公式的集合 E 是 Γ 的扩展, 则存在 Γ 的一个 GD-扩展 E' , 使得 $E \subseteq E'$. 反之不成立.

证明: 因为集合 E 是 Γ 的扩展, 根据定理 1.6, 存在一个集合的序列 E_0, \dots, E_i, \dots , 使得

$$E_0 = T; E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{\psi \mid \phi \rightsquigarrow \psi \in \Delta, \text{ 其中, } \phi \in T_i \text{ 并且 } \neg\psi \notin E\}; E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i.$$

故而, 令

$$\Delta_0 = \{\psi \mid \phi \rightsquigarrow \psi \in \Delta, \text{ 其中, } \phi \in T_0 \text{ 并且 } \neg\psi \notin E\};$$

$$\Delta_{i+1} = \left\{ \psi \mid \phi \rightsquigarrow \psi \in \Delta - \bigcup_{j=0}^i \Delta_j, \text{ 其中, } \phi \in T_i \text{ 并且 } \neg\psi \notin E \right\},$$

则有 $E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{\psi \mid \phi \rightsquigarrow \psi \in \Delta_i\}$. 并且, 对于每个 $\Delta_i = \{\delta_{i1} = \phi_{i1} \rightsquigarrow \psi_{i1}, \delta_{i2} = \phi_{i2} \rightsquigarrow \psi_{i2}, \dots\}$, 都有:

$$\begin{aligned} E_i \mid \delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots &\Rightarrow E_i, \psi_{i1} \mid \delta_{i2}, \delta_{i3}, \dots \\ &\Rightarrow E_i, \psi_{i1}, \psi_{i2} \mid \delta_{i3}, \delta_{i4}, \dots \\ &\dots \\ &\Rightarrow E_i, \psi_{i1}, \dots, \psi_{ij} \mid \delta_{i(j+1)}, \delta_{i(j+2)}, \dots \end{aligned}$$

并且, $\{\psi \mid \phi \rightsquigarrow \psi \in \Delta_i\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{\psi_{ij}\}$, 即 $E_{i+1} = Th(E_i) \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} \{\psi_{ij}\}$.

我们将 Δ 中缺省规则的序列定义为 $L :: \delta_{01}, \delta_{02}, \dots, \delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta'_{i1}, \dots, \delta'_{i2}, \dots$, 其中, $\delta_{ij} \in \bigcup_{k=0}^i \Delta_k, \delta'_{ij} \in \Delta - \bigcup_{k=0}^i \Delta_k$. 故而由 L 生成的序列 E' 满足 $E \subseteq E'$.

反之不成立, 见例 4.4. 在例 4.4 中, $Th(\{p, q_1 \wedge q_2\})$ 和 $Th(\{p, \neg q_1, \neg q_2\})$ 是 Γ 的 GD-扩展, 又是 Γ 的扩展, 但是 GD-扩展 $Th(\{p, \neg q_1, q_2\})$ 和 $Th(\{p, \neg q_2, q_1\})$ 都不是 Γ 的扩展.

我们可以得出贪婪缺省逻辑是不能退化为缺省逻辑的, 故而我们得到下面的定理.

定理 4.9(不可退化性). 存在一个缺省理论 Γ , 对于任意的集合 E , 都有 E 是缺省理论 Γ 的扩展当且仅当 E 是缺省理论 Γ 的 GD-扩展.

5 总 结

本文提出了一种贪婪缺省逻辑,旨在构造扩展时能尽可能地保留缺省规则中的信息,并给出了贪婪缺省逻辑的推演系统——GD 系统和贪婪缺省逻辑的 GD-扩展的构造型定义.证明了贪婪缺省逻辑的存在性、半单调性和不可退化性等性质,说明了贪婪缺省逻辑与经典缺省逻辑是两种不同的逻辑.

References:

- [1] Reiter R. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*, 1980,13(1):81–132. [doi: 10.1016/0004-3702(80)90014-4]
- [2] Antoniou G. A tutorial on default logics. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 1999,31(4):337–359. [doi: 10.1145/344588.344602]
- [3] Etherington DW, Reiter R. On inheritance hierarchies with exceptions. In: *Proc. of the AAAI*. 1983,83:104–108. <https://www.aaai.org/Papers/AAAI/1983/AAAI83-017.pdf>
- [4] Hunter A. Using default logic in information retrieval. In: *Proc. of the Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty*. 1995. 235–242. [doi: 10.1007/3-540-60112-0_27]
- [5] Brewka G. *Nonmonotonic Reasoning: Logical Foundations of Commonsense*. Vol.12, Cambridge University Press, 1991.
- [6] Lukaszewicz W. Two results on default logic. In: *Proc. of the 9th Int'l Joint Conf. on Artificial Intelligence*, Vol.1. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1985. 459–461. <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1625225>
- [7] Baader F, Hollunder B. Priorities on defaults with prerequisites, and their application in treating specificity in terminological default logic. *Journal of Automated Reasoning*, 1995,15(1):41–68. [doi: 10.1007/BF00881830]
- [8] Schaub T. On constrained default theories. In: *Proc. of the ECAI*. 1992. 304–308. <http://www.intellektik.informatik.tu-darmstadt.de/TR/1992/92-02.ps.Z>
- [9] Mikitiuk A, Truszczyński M. Constrained and rational default logics. In: *Proc. of the IJCAI*. 1995. 1509–1517. <http://ijcai.org/Proceedings/95-2/Papers/064.pdf>
- [10] Cholewinski P, Marek VW, Truszczyński M. Default reasoning system *deres*. *KR*, 1996,96:518–528.
- [11] Baader F, Hollunder B. Embedding defaults into terminological knowledge representation formalisms. *Journal of Automated Reasoning*, 1995,14(1):149–180. [doi: 10.1007/BF00883932]
- [12] Kolovski V, Parsia B, Katz Y. Implementing owl defaults. Technical Report, DTIC Document, 2006.
- [13] Zang L, Cao C, Sui Y. Two-Level default theories. In: *Proc. of the Int'l Conf. on Artificial Intelligence (ICAI)*, p.1, The Steering Committee of the World Congress in Computer Science, Computer Engineering and Applied Computing (WorldComp). 2013. <http://search.proquest.com/openview/a93eb9dda9bb0a7ddef38039f5b2485a/1?pq-origsite=gscholar&cbl=1976349>
- [14] Zang L, Wang W, Chen B, Cao C. The double-level default description logic *mathcal{d}3l*. In: *Knowledge Science, Engineering and Management*. 2015. 141–146. [doi: 10.1007/978-3-319-25159-2_12]
- [15] Takeuti G. *Proof Theory*. 2nd ed., Courier Corporation, 2013.



陈博(1988 -),男,山东济南人,博士,助理研究员,主要研究领域为人工智能.



胥跃飞(1963 -),男,博士,研究员,博士生导师,主要研究领域为数理逻辑.



曹存根(1964 -),男,博士,研究员,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为大规模知识处理.