

# 一种进行稀疏编码的复数数据词典快速训练方法<sup>\*</sup>

郝红星<sup>1,2</sup>, 吴玲达<sup>1,2</sup>, 黄为<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(国防科学技术大学 信息系统与管理学院, 湖南 长沙 410073)

<sup>2</sup>(装备学院 复杂电子系统仿真重点实验室, 北京 101400)

通讯作者: 郝红星, E-mail: hongxinghao87@nudt.edu.cn

**摘要:** 稀疏编码理论应用于信号处理的各个领域, 为了获取优化的稀疏编码, 需要通过训练获取数据词典. 提出了一种复数域数据词典的快速训练方法, 将词典训练问题转化为最优化问题并交替地对词典原子和编码进行最优化而得到最终训练词典. 在对词典原子的最优化过程中, 采用具有记忆性的在线训练算法; 而在对编码进行最优化的过程中, 采用交换乘子方向方法进行实现. 通过实验得出: 所提出的算法能够有效地提高数据词典的训练效率, 在保证收敛值的同时缩短训练时间, 并且对于训练样本中的噪声具有鲁棒性.

**关键词:** 复数词典训练; 在线学习; 交换乘子方向方法

**中图法分类号:** TP391

中文引用格式: 郝红星, 吴玲达, 黄为. 一种进行稀疏编码的复数数据词典快速训练方法. 软件学报, 2015, 26(8): 1960–1967. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4677.htm>

英文引用格式: Hao HX, Wu LD, Huang W. Fast complex valued dictionary learning method for sparse representation. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2015, 26(8): 1960–1967 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4677.htm>

## Fast Complex Valued Dictionary Learning Method for Sparse Representation

HAO Hong-Xing<sup>1,2</sup>, WU Ling-Da<sup>1,2</sup>, HUANG Wei<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(College of Information Systems and Management, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

<sup>2</sup>(Key Laboratory of Science and Technology for National Defense, College of Equipment, Beijing 101400, China)

**Abstract:** Sparse representation is widely used in signal processing. The best representation is based on the adaptive dictionary that trained from the processing data. This paper proposes a new complex valued dictionary learning method which turns the dictionary learning into an optimization problem and performs the optimization on the dictionary atoms and coding alternately. An online training method with memory is used in the optimization on the dictionary atoms, and an insurance of alternated direction method of multipliers is solved in the optimization on the coding. The proposed algorithm is proved to be of high efficiency, minimizing the training time while converging to the optimized value. The presented method is also robust to the noise in the training set.

**Key words:** complex valued dictionary learning; online learning; alternated direction method of multipliers

稀疏编码是将数据向量通过某一数据集中的少量元素的线性组合来表示, 广泛地应用于机器学习、神经科学、信号处理和统计学. 为了使数据词典能够更好地适应所要表示的数据集合, 目前的研究开始关注于词典的自适应学习, 而不是局限于固定的各类基(如小波基<sup>[1]</sup>等), 并且已经有效地应用于音频图像处理领域的信号重建和信号分类. 词典的类型分为完备词典和过完备词典, 其中, 完备词典的理论比较成熟, 可以基于经典矩阵分析进行获取和运算. 近年来, 一些研究者开始专注于过完备词典的训练理论研究. 过完备词典的优点是其能紧致地表示很多信号, 且其对于噪声具有鲁棒性, 能够更加灵活地表示训练数据中的各种结构. 信号的稀疏性表示是基于新的压缩传感理论, 而压缩传感理论与传统的香农采样理论具有很大的不同: 传统的香农理论假设信号是变

\* 基金项目: 湖南省研究生科研创新项目(CX2011B025); 国防科学技术大学博士生创新资助项目(B110503)

收稿时间: 2013-11-28; 修改时间: 2014-04-08; 定稿时间: 2014-07-01

换域中带宽有限的信号;而压缩传感理论则假设信号在变换域中是稀疏的,即,可以紧致表示.稀疏编码的理论研究可以应用于解决许多图像处理的逆问题,由于稀疏编码问题是病态的,因此需要进行正则化.正则化是指运用信号的先验知识对最优化问题进行约束,进而求解病态问题.

数据词典学习融合了稀疏性和冗余性.词典学习将词典作为最优化问题的自变量进行求解,其词典的训练可以基于两种训练集合<sup>[2]</sup>:不含噪声的训练数据集,或者待编码的含噪数据集.进行稀疏编码数据词典的学习算法在大量的文献中进行了研究.最早的稀疏编码和词典学习算法由文献[3]提出,其中的词典训练算法基于最大化数据集的稀疏独立模型.MOD 算法<sup>[4]</sup>运用迭代聚类方法将数据集分成几大类,并将聚类中心集合作为最终的训练词典.而基于 FOCUSS 的词典训练方法<sup>[5,6]</sup>运用最大化最大似然函数和最大先验概率模型的方法,结合主成分分析和稀疏诱导的先验概率进行词典的训练.该方法分别对完备词典和任意大小词典进行了训练,并以最终编码的稀疏性来衡量最终训练词典的优劣性.文献[6]中,将过完备词典的训练转化为观察数据的最大化概率模型问题,并且指出:过完备基能够更好地近似统计模型,因此可以更高效地进行编码.文献[7]将词典的训练问题作为主成分分析的一般形式,提出一种方法用于含噪图像的贝叶斯重建和混合图像的盲分离.

另一种迭代的过完备词典学习方法由文献[8]提出.在其词典学习迭代步骤中,每一步包括通过块坐标松弛算法 BCR(block coordinate relaxation)进行稀疏编码,然后运用特征值分解方法对其中的一个元素进行更新,并通过实验分析了噪声的影响.Aharon 等人基于相同的机制进行词典的训练,并且将其提出的 K-SVD 方法<sup>[9,10]</sup>应用于图像修复问题.

上述词典学习算法是基于二次迭代的批处理方法,即,每一步迭代算法需要访问训练数据集中的所有元素,进而在一定约束下最小化目标代价函数.尽管这类方法要快于一次梯度下降算法<sup>[11]</sup>,但是仍然不能处理大规模数据集<sup>[12]</sup>,或者随时间变化的动态数据集.

为了提高词典的训练效率,文献[13]提出一种在线词典训练算法.该算法在每一步迭代中仅仅使用训练数据集中的元素或者子集,是批处理方法的一种有效统计近似.相同的研究者在文献[14]中提出词典监督学习的一般形式,并且将其应用于信号处理问题.在其词典训练算法中,运用改进的 LARS 算法求解  $l_2-l_1$  问题,并且运用梯度下降算法更新词典元素.Rakotomamonjy 提出了一种词典学习直接最优化技术<sup>[15]</sup>,通过对于词典元素和系数矩阵运用梯度下降算法进行求解.但是由于词典学习最优化问题是非凸的,因此运用梯度的方法并不能保证解的收敛性.

国内关于稀疏编码的研究主要集中在最近几年,其中,文献[16]中对超完备图像稀疏表示中冗余字典的构造问题进行研究,提出了冗余多尺度脊波字典的构造方法,但是该方法构造的词典是固定的;李志清等人<sup>[17]</sup>提出通过共轭梯度下降法和单梯度下降法进行实数域词典训练.

文献[18]基于稀疏 K-SVD 算法提出了稀疏字典编码的超分辨率模型,建立了自然实数图像高低分辨率图像间的稀疏关联.文献[19]同样将图像块的词典学习和稀疏表示的应用推广到图像超分辨率中.因此,目前国内的研究主要是将实数域的词典训练方法扩展到多分辨率的表示中.

综上所述的词典训练算法是基于实数域的,而将其扩展到复数域需要考虑一系列问题.而实际中,很多信号是以复数形式获取,例如干涉合成孔径雷达<sup>[20]</sup>、磁共振图像<sup>[21]</sup>等等,因此,研究复数域的词典训练算法对于该类复数信号的压缩、分类等等应用具有重要的意义.文献[22,23]都对复数域中稀疏表示进行了研究,其中,

- 文献[22]研究了复数编码和复数词典的训练,但是由于该应用的最终目的是通过复数词典和复数编码表示实数视频帧,因此其对词典的训练过程中最小化了复数词典的表示的实部与视频帧之间的误差,其训练得到的词典并不是针对复数图像的稀疏表示所提出来的;另外,其词典训练过程通过独立成分分析的方法进行求解,速度较慢.
- 文献[23]仅仅讨论了复数域的稀疏编码算法,通过运用凸函数替换  $l_0$  范数的方法,将稀疏编码问题转化为凸优化问题.但是,该文献中并没有研究复数词典的训练过程.

本文以复数值词典的训练为目标,研究训练算法的快速求解问题,并比较关于词典训练算法的文献中提出的在线算法(online method)、批处理算法(batch method)<sup>[9]</sup>和直接训练算法(direct method)<sup>[15]</sup>的训练效果.本文主

要的创新点为渐进地采用待训练图像块进行复数词典的训练,相对于整体载入的算法,能够有效地提高算法效率.另外,算法训练的词典能够自适应地表示复数信号.

## 1 问题描述

定义  $\mathbf{z}=[\mathbf{z}_i, i=1, \dots, N]^T$  为信号观察数据集,其中每一个元素  $\mathbf{z}_i \in \mathbf{C}^m$  为观察数据的列向量形式,  $N$  为观察数据的个数,  $\mathbf{C}$  为复数集合. 记  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{C}^m$  为原始信号向量,  $\mathbf{n}_i \in \mathbf{C}^m$  为对应于第  $i$  个信号的噪声,可以得到:

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{n}_i, i=1, \dots, N \quad (1)$$

给定训练集合  $\mathbf{z}$ , 词典学习的目标是找到一个词典,能够运用较少数目的词典原子(atoms)表示训练数据集中的元素  $\mathbf{z}_i$ . 在正则化框架下,该思想的可以通过下面的形式进行描述:

$$\min_{\mathbf{D} \in \mathbf{C}, \alpha_1, \dots, \alpha_N} \sum_{i=1}^N (1/2) \|\mathbf{z}_i - \mathbf{D}\alpha_i\|_2^2 + \lambda \|\alpha_i\| \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{C} = \{\mathbf{D} \in \mathbf{C}^{m \times k} : |d_j^H d_j| \leq 1, j=1, \dots, k\}$ ,  $\mathbf{D}=[\mathbf{d}_i, i=1, \dots, k]$  为待训练词典,  $\alpha=[\alpha_i, i=1, \dots, N]$  为对应于训练集合  $\mathbf{z}$  的编码. 其中,二次项衡量表示误差,  $l_1$  范数诱导稀疏编码. 由于噪声水平的不同,这两项的相关权值通过正则化参数  $\lambda > 0$  来确定. 约束条件  $\mathbf{D} \in \mathbf{C}$  防止词典  $\mathbf{D}$  中元素模值趋于任意大.

在问题(2)中,对  $\alpha_i$  求最优化是一个 BPDN 问题<sup>[24]</sup>,可以运用其他稀疏诱导的正则化准则(例如  $l_0$  范数)来根据已知词典确定训练集的稀疏编码. 但是相对于  $l_0$  范数,  $l_1$  范数正则化方法能够获得稍好的词典. 出现这种差别的主要原因是:基于  $l_0$  范数的正则化准则的最优化问题很难获得精确解,而  $l_1$  范数却可以得到精确解.

## 2 算法设计

最优化问题(2)是矩阵分解的一个实例. 通常,解决问题(2)的方法是交互地对  $\mathbf{D}$  和  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  进行最优化求解. 对数据词典  $\mathbf{D}$  最优化求解是一个凸集上的二次优化问题,而对编码  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  最优化是可分解的凸优化问题. 但是对数据词典和编码同时进行最优化求解是非凸问题,所以没有算法能够保证求得全局最优解. 尽管如此,通过一系列问题的求解,基于最优化求得的词典能够获得非常令人满意的实验结果.

问题(2)对于  $\mathbf{D}$  最优化问题求解相对较简单,但是对于  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  最优化求解则非常耗时. 为了解决这个问题,我们将在线学习方法扩展到复数域的词典求解. 首先,从训练数据集  $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N$  中随机获取一系列数据(或者数据组)  $\mathbf{z}'^t, t=1, \dots$ ; 然后,按照一定顺序利用这些数据进行词典学习. 对于训练序列中的每一个新的元素,首先运用 BPDN 问题求解稀疏编码,然后通过最小化下面的问题来进行更新词典:

$$\mathbf{g}_t(\mathbf{D}) = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t (1/2) \|\mathbf{z}^j - \mathbf{D}\alpha_j\|_2^2 + \lambda \|\alpha_j\| \quad (3)$$

其中,稀疏编码  $\alpha_i, i=1, \dots, t-1$  已经在稀疏编码步骤中计算获得.

算法 1 中显示了将在线词典学习算法扩展到复数域的算法伪代码,其中,第 6 行运用 BPDN 求解  $\eta$  个图像块集合  $\mathbf{z}'$  的稀疏编码,第 9 行到第 13 行通过最小化目标函数(3)来更新词典  $\mathbf{D}$ . 在文献[13]中,最小角度回归算法(least angle regression, 简称 LARS)被用来进行 BPDN 问题的求解. 在本研究中,提出变量分解和增广拉格朗日稀疏回归方法来进行求解,该方法对于所要求解的问题能够取得更高的计算效率.

**算法 1.** 复数在线词典学习算法(online dictionary learning for complex numbers, 简称 ODLCN).

输入:  $\mathbf{z}_i \in \mathbf{C}^m, i=1, \dots, N_p$  (训练图像块集合),  $T \in \mathbf{N}$  (循环次数),  $\eta \in \mathbf{N}$  (每一步所使用的图像块数目),  $\lambda > 0$  (BPDN 正则化参数),  $\beta_i$  (遗忘系数),  $\mathbf{D}_0 \in \mathbf{C}^{m \times k}$  (初始化词典).

输出:  $\mathbf{D} \in \mathbf{C}^{m \times k}$  (训练词典).

1. **Begin**
2.  $\mathbf{D}=[\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k]=\mathbf{D}_0$
3.  $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k]=\mathbf{0}, \mathbf{B}=[\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k]=\mathbf{0}$
4. **for**  $t \leq T$  **do**

5. 从  $\mathbf{z}$  中任意选取  $\mathbf{z}' = [\mathbf{z}'_i, i = 1, \dots, \eta]$
6.  $\boldsymbol{\alpha}' = \arg \min_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^{k \times \eta}} (1/2) \|\mathbf{z}' - \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}\|_F^2 + \lambda \|\boldsymbol{\alpha}\|_1$  (稀疏编码, BPDN 问题)
7.  $\mathbf{A} = \beta_t \mathbf{A} + \sum_{i=1}^{\eta} \boldsymbol{\alpha}'_i (\boldsymbol{\alpha}'_i)^H$
8.  $\mathbf{B} = \beta_t \mathbf{B} + \sum_{i=1}^{\eta} \mathbf{z}'_i (\boldsymbol{\alpha}'_i)^H$   
/\*对  $\mathbf{D}$  求最优化\*/
9. **repeat**
10.     **for**  $j=1$  **to**  $j=k$  **do**
11.          $\mathbf{u}_j = \frac{1}{A(j, j)} (\mathbf{b}_j - \mathbf{D}\mathbf{a}_j) + \mathbf{d}_j$
12.          $\mathbf{d}_j = \mathbf{u}_j / \max \{\|\mathbf{u}_j\|_2, 1\}$
13.     **end**
14.     **until convergence**
15. **end**
16. **end**

对词典  $\mathbf{D}$  进行最优化求解时,采用投影块坐标下降算法对词典的每一列进行更新.由于编码  $\boldsymbol{\alpha}_i$  的高度稀疏性,矩阵  $\mathbf{A}$  的非零元素主要集中在对角线,因此,对每一列的更新只需要一步迭代即可.当前迭代的词典使用以前的词典更新结果作为初始值.

在第 7 行和第 8 行,如果  $0 < \beta_t < 1$ ,矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  中的积累信息随着时间  $t$  的增长其权值逐渐减小,这在在线学习中是一个常用的机制,其目的是给当前新的信息以更高的权重,因为理论上新的信息具有更高的精确性.在具体的执行过程中,我们采用的机制为指数遗忘规律,即

$$\beta_t = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^\rho, t = 1, 2, \dots \quad (4)$$

其中,  $\rho > 0$ .

算法 1 中的训练词典序列  $\mathbf{D}_t$  收敛于固定点的证明由文献[13]的命题 4 给出.其收敛的假设是:

- (1) 观察数据是有限的;
- (2) 公式(3)中的目标函数  $g_t(\mathbf{D}), t=1, \dots$  是严格凸优化问题并且具有低 Hessian 值;
- (3) 算法(1)中第 6 行 BPDN 最优化问题的解是唯一的.

在本最优化问题中,正如文献[13]所指出的,对于  $\mathbf{D} \in \mathbb{C}$ ,并不能保证满足假设 3).但是可以通过在 BPDN 目标函数中添加一个小的二次项来确保满足假设 3),而从实际应用中该二次项并不会改变最终的解.

在词典学习算法(1)的第 6 行 BPDN 最优化问题解决中,本研究提出 SpaRSAL 算法.SpaRSAL 算法基于交换乘子方向方法(ADMM)<sup>[25]</sup>,该算法的核心思想是将 BPDN 最优化问题转化为有约束问题:

$$\begin{cases} \min_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^{k \times \eta}} (1/2) \|\mathbf{z}' - \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{u}\|_1 \\ \text{s.t. } \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{u} \end{cases} \quad (5)$$

然后,运用拉格朗日乘子法将问题(5)目标函数添加二次项  $\|\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{u}\|_2^2$ .算法通过交替地对原始变量  $\boldsymbol{\alpha}$  和  $\mathbf{u}$  进行最小化,并且对偶变量进行最大化.算法 SpaRSAL 的伪代码由算法(2)给出.

**算法 2.** SpaRSAL 算法(基于变量分解和改进 Lagrangian 的稀疏编码算法).

输入:  $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{m \times k}$ (词典),  $\mathbf{z}' \in \mathbb{C}^{m \times \eta}$ ,  $\mu > 0$ (ADMM 参数),  $\lambda > 0$ (正则化参数).

输出:  $\boldsymbol{\alpha}' \in \mathbb{C}^{k \times \eta}$ .

1. **Begin**
2.      $\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{D}^H \mathbf{z}'$
3.      $\mathbf{u}' = \boldsymbol{\alpha}', \mathbf{v}' = 0$

4.  $F=(D^H D+\mu I)^{-1}$
5. **While** not converge **do**
6.      $u^t=soft(\alpha^t-v^t, \lambda/\mu)$
7.      $\alpha^t=F(D^H z^t+\mu(u^t+v^t))$
8.      $v^t=v^t-(\alpha^t-u^t)$
9.     **end**
10. **end**

使用算法 SpaRSAL 对  $\eta$  个训练元素使用同一个词典进行编码的复杂度为  $O(km^2+\eta km)$ , 因此, 使用相同词典对  $\eta$  个图像块进行编码的效率要比运用不同词典对相同数目的图像块进行编码的效率要高. 如果  $\eta > k$ , 则复杂度收益率为  $k$ .

函数  $soft(x, \tau)=\max\{|x|-\tau, 0\} \cdot \frac{x}{|x|}$  是软门限方法且对矩阵中每一个元素的操作. 当  $\eta$  值较大时, 算法(2)的第 7 步是最耗时的一步, 其复杂度为  $O(k^2)$ , 通过利用矩阵  $D^H$  的左特征向量和特征值, 该步可以简化为复杂度为  $O(km)$  的运算. 虽然  $\mu > 0$  的取值影响最终的收敛速度, 但是算法的收敛性与其取值无关, 文献[26]中详细讨论了  $\mu$  的选取准则.

### 3 实验结果

本节对所提出的算法效果进行实验验证, 主要从词典训练效率和词典效果两个方面进行算法比较. 本文的训练数据集由复数图像集的图像采样块给出, 如图 1 所示为本文提出的在线学习算法和批处理算法的目标函数随时间变化图. 在该实验中, 训练集来自文献[27]中的 4 幅干涉合成孔径雷达复数图像, 通过从这些图像中选取不同的图像块进行复数词典训练, 其中, 训练集中元素数目为 32 000 个, 所训练的词典向量为 144 维, 词典中原子数目为 512. 理论上, 批处理算法能够得到最优的目标函数值, 因为其每一步运用相同的训练集交替地对词典元素和稀疏编码进行目标函数的最优化. 由图 1 可以得出: 本文提出的算法比批处理算法具有更快的收敛速度, 且同批处理算法能够收敛于相同的目标函数值.

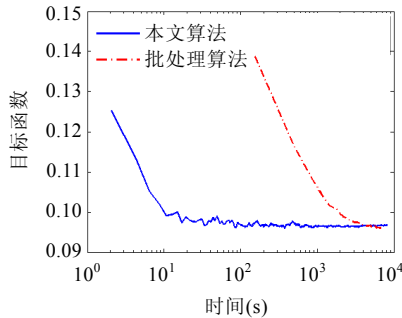


Fig.1 Object function along time for the proposed algorithm and batch method

图 1 本文算法与批处理算法目标函数随时间变化

如图 2(a)所示为生成训练信号集的复数图像, 采用重叠块方法获取训练样本, 其中, 将实部赋值红色分量(第一原色分量), 虚部赋值绿色分量(第二原色分量), 训练集中元素数目为 10 000 个, 所训练的词典向量为 144 维, 词典中原子数目为 256. 如图 2(b)所示为本文算法和批处理算法目标函数变化, 其中, 本文算法收敛于值 0.176, 批处理算法收敛于 0.178. 图 2(c)为直接优化技术目标函数收敛图, 其收敛于 1 832, 远大于本文算法和批处理算法. 图 2(d)为本文算法的词典, 其中, 实部赋值红色分量, 虚部赋值绿色分量.

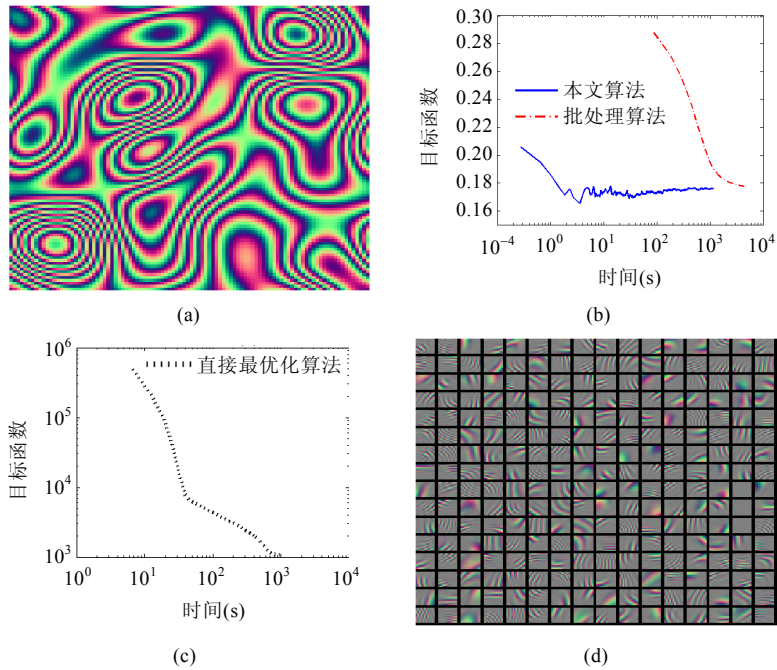


Fig.2 Results of dictionary training from sets without noise

图 2 不含噪训练集的词典训练结果

下面给出具有噪声的训练样本的结果,图 3(a)为训练样本的采样复数图像,图 3(b)~图 3(d)分别为本文算法、批处理算法和直接优化算法的训练词典.

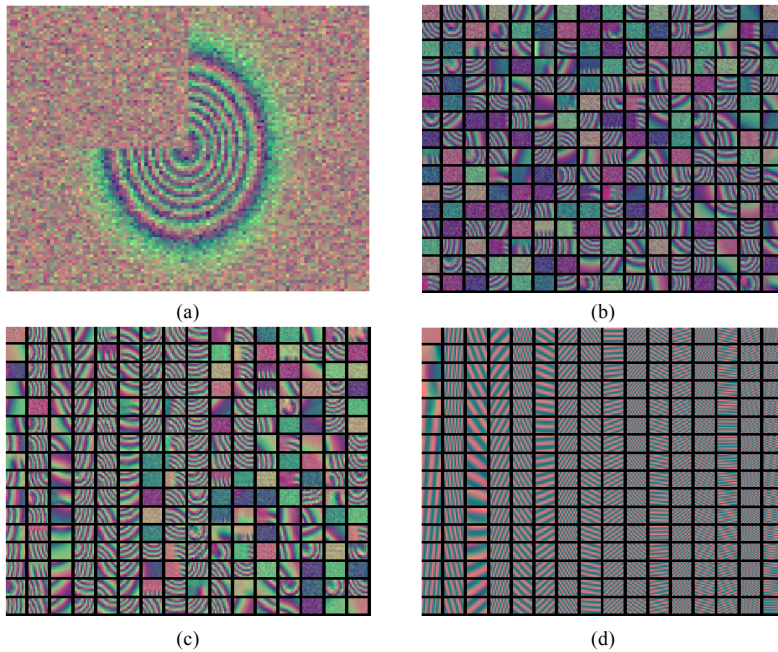


Fig.3 Results of dictionary training from sets with noise

图 3 包含噪训练集的词典训练结果

注意到,直接优化算法的训练词典主要为初始化的余弦基,其主要原因是,我们所求解的最优化问题是非凸的,而直接优化算法得到的是局部最优解.对于3种算法,虽然训练样本含有噪声,由于稀疏性正则化项使得训练的词典原子中含有较少的噪声.

为了进一步验证训练词典的优劣性,下面运用图3中的训练词典对图3(a)中的图像块进行稀疏编码,并计算编码需要的平均原子数目,其结果见表1.可以得出:本文算法能够得到与批处理算法接近的平均原子数目,而直接优化算法却需要较大数目的原子,即,本文算法的词典能够与批处理算法相接近的稀疏度表示信号,但本文算法需要较少的训练时间.由于直接优化算法得到的数据词典的表示需要相对较多的原子,因此其稀疏表示的效果要差于本文算法和批处理算法.

**Table 1** Average number of atoms for sparse representation for different dictionary

**表 1** 不同词典用于稀疏表示所需要的平均原子数

算法 平均原子数目	本文算法 3.31	批处理算法 3.28	直接优化算法 7.32

#### 4 结束语

本文提出一种复数数据词典快速训练方法.该词典训练算法能够与批处理算法的训练词典对信号具有相似的稀疏度表示,但是其训练时间远小于批处理算法.本文的词典训练算法能够应用于复数领域的稀疏表示和复数域基于稀疏表示的信号去噪、信号分类和信号分解等等,而且对于训练样本中的噪声具有鲁棒性;而且,本文算法能够在实际应用中根据所要处理的数据实时训练词典,使得词典具有更好的自适应特性.

**致谢** 在此,我们向对本文的工作给予支持和建议的同行,尤其是里斯本大学计算机与电气工程系 Jose Bioucas 教授对我们的研究的帮助表示感谢.

#### References:

- [1] Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing. 2nd ed., New York: Academic Press, 1999.
- [2] Elad M, Aharon M. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2006,15(12):3736–3745. [doi: 10.1109/TIP.2006.881969]
- [3] Olshausen BA, Field DJ. Sparse coding with an overcomplete basis set: A strategy employed by V1? *Vision Research*, 1997,37(23): 3311–3325. [doi: 10.1016/S0042-6989(97)00169-7]
- [4] Engan K, Aase SO, Hakon-Husoy JH. Method of optimal directions for frame design. In: *Proc. of the IEEE Int'l Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 1999. 2443–2446. [doi: 10.1109/ICASSP.1999.760624]
- [5] Kreutz-Delgado K, Rao BD. Focuss-Based dictionary learning algorithms. In: *Proc. of the Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII*. 2000. [doi: 10.1117/12.408634]
- [6] Kreutz-Delgado K, Murray JF, Rao BD, Engan K, Lee T, Sejnowski TJ. Dictionary learning algorithms for sparse representation. *Neural Computation*, 2003,15(2):349–396. [doi: 10.1162/089976603762552951]
- [7] Lewicki MS, Sejnowski TJ. Learning overcomplete representations. *Neural Computation*, 2000,12:337–365. [doi: 10.1162/089976600300015826]
- [8] Lesage L, Gribonval R, Bimbot F, Benaroya L. Learning unions of orthonormal bases with thresholded singular value decomposition. In: *Proc. of the IEEE Int'l Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Philadelphia: IEEE, 2005. 293–296. [doi: 10.1109/ICASSP.2005.1416298]
- [9] Aharon M, Elad M, Bruckstein AM. The K-SVD: An algorithm for designing of overcomplete dictionaries for sparse representation. *IEEE Trans. on Signal Process*, 2006,54(11):4311–4322. [doi: 10.1109/TSP.2006.881199]
- [10] Aharon M, Elad M, Bruckstein AM. On the uniqueness of overcomplete dictionaries, and a practical way to retrieve them. *Journal of Linear Algebra and Its Applications*, 2006,416(1):48–67.
- [11] Lee H, Battle A, Raina R, Ng AY. Efficient sparse coding algorithms. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2007, 19:801–808.
- [12] Bottou L, Bousquet O. The tradeoffs of large scale learning. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2008,20:161–168.
- [13] Mairal J, Bach F, Ponce J, Sapiro G. Online dictionary learning for sparse coding. In: *Proc. of the 26th Annual Int'l Conf. on Machine Learning (ICML 2009)*. New York: ACM Press, 2009. 689–696. [doi: 10.1145/1553374.1553463]

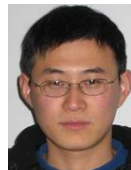
- [14] Mairal J, Bach F, Ponce J. Task-Driven dictionary learning. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2012,34(4): 791–804. [doi: 10.1109/TPAMI.2011.156]
- [15] Rakotomamonjy A. Direct optimization of the dictionary learning problem. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2013,61(22): 5495–5506. [doi: 10.1109/TSP.2013.2278158]
- [16] Deng CZ. Research on image sparse representation theory and its applications [Ph.D. Thesis]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2008 (in Chinese with English abstract).
- [17] Li ZQ, Shi ZP, Li ZX, Shi ZZ. Sparse coding model based on structural similarity. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2010, 21(10):2410–2419 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3675.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.03675]
- [18] Li M, Cheng J, Le X, Luo HM. Super-Resolution based on sparse dictionary coding. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2012, 23(5):1315–1324 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3989.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2012.03989]
- [19] Pu J, Zhang JP. Super-Resolution through dictionary learning and sparse representation. *PR&AI*, 2010,23(3):335–340 (in Chinese with English abstract).
- [20] Zebker H, Goldstein R. Topographic mapping from interferometric synthetic aperture radar observations. *Journal of Geophysical Research*, 1986,91(B5):4993–4999. [doi: 10.1029/JB091iB05p04993]
- [21] Hedley M, Rosenfeld D. A new two-dimensional phase unwrapping algorithm for MRI images. *Magnetic Resonance in Medicine*, 1992,24(1):177–181. [doi: 10.1002/mrm.1910240120]
- [22] Bruno AO, Charles FC, David KW. Learning real and complex overcomplete representations from the statistics of natural images. In: *Proc. of the SPIE. SPIE 7446, SPIE, 2009*. [doi: 10.1117/12.825882]
- [23] Mohimani GH, Babaie-Zadeh M, Jutten C. Complex-Valued sparse representation based on smoothed  $\ell_0$  norm. In: *Proc. of the ICASSP. IEEE, 2008*. 3881–3884. [doi: 10.1109/ICASSP.2008.4518501]
- [24] Chen MSS, Donoho D, Michael A. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Review*, 2001,43(1):129–159. [doi: 10.1137/S003614450037906X]
- [25] Bioucas-Dias J, Figueiredo M. Alternating direction algorithms for constrained sparse regression: Application to hyperspectral unmixing. In: *Proc. of the 2nd Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing (WHISPERS). IEEE, 2010*. 1–4. [doi: 10.1109/WHISPERS.2010.5594963]
- [26] Boyd S, Parikh N, Chu E, Peleato B, Jonathan E. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 2011,3(1):1–122.
- [27] Jose BD, Vladimir K, Jaakko A, Karen E. Absolute phase estimation: Adaptive local denoising and global unwrapping. *Applied Optics*, 2008,47(29):5358–5369. [doi: 10.1364/AO.47.005358]

#### 附中文参考文献:

- [16] 邓承志.图像稀疏表示理论及其应用研究[博士学位论文].武汉:华中科技大学,2008.
- [17] 李志清,施智平,李志欣,史忠植.基于结构相似度的稀疏编码模型.软件学报,2010,21(10):2410–2419. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3675.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.03675]
- [18] 李民,程建,乐翔,罗环敏.稀疏字典编码的超分辨率重建.软件学报,2012,23(5):1315–1324. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3989.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2012.03989]
- [19] 浦剑,张军平.基于词典学习和稀疏表示的超分辨率方法.模式识别与人工智能,2010,23(3):335–340.



郝红星(1987—),男,山东临沂人,博士,主要研究领域为多媒体信息系统与虚拟现实技术,图像去噪及应用,图像逆问题正则化问题.



黄为(1985—),男,博士,主要研究领域为遥感影像处理技术,大规模影像数据分类计数.



吴玲达(1962—),女,博士,教授,博士生导师,CCF 杰出会员,主要研究领域为多媒体信息系统与虚拟现实技术,复杂系统构建与可视化技术,虚拟环境构建.