软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2014,25(6):1255−1272 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004560]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

区分 3 种否定的模糊命题逻辑系统及其应用*

潘正华

(江南大学 理学院,江苏 无锡 214122)

通讯作者: 潘正华, E-mail: panzh@jiangnan.edu.cn

摘 要: 在模糊知识表示与推理中,否定信息扮演了一个重要角色.从概念层面上区分了模糊知识中存在的 3 种否定关系,即矛盾否定关系、对立否定关系和中介否定关系.为了建立能够完全描述这些不同否定关系的逻辑基础,提出一种区分矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊命题逻辑形式系统 FLCOM.讨论了 FLCOM 特有的性质与意义,给出了 FLCOM 的一种语义解释,并证明了可靠性定理.为了表明 FLCOM 处理实际问题的适用性,进一步研究了 FLCOM 在一个模糊决策实例中的应用.具体地,基于 FLCOM 讨论了决策规则中的模糊命题及其不同否定的区分与形式表示,给出一种确定模糊命题及其不同否定的真值及其真值范围阈值的方法,并采用模糊产生式规则讨论了实例中的模糊推理与决策.从而表明,运用 FLCOM 处理具有模糊性并且存在不同否定的实际问题是有效的.

关键词: 模糊知识;矛盾否定;对立否定;中介否定;模糊命题逻辑

中图法分类号: TP181

中文引用格式: 潘正华.区分 3 种否定的模糊命题逻辑系统及其应用.软件学报,2014,25(6):1255−1272. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4560.htm

英文引用格式: Pan ZH. Fuzzy propositional logic system with three kinds of negation and its applications. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2014,25(6):1255−1272 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/ 4560.htm

Fuzzy Propositional Logic System with Three Kinds of Negation and Its Applications

PAN Zheng-Hua

(School of Science, University of Jiangnan, Wuxi 214122, China)

Corresponding author: PAN Zheng-Hua, E-mail: panzh@jiangnan.edu.cn

Abstract: Negative information plays an important role in fuzzy knowledge representation and reasoning. This paper distinguishes between contradictory negative relation and opposite negative relation in fuzzy concept, and discovers a characteristic of fuzzy concept that if a pair of opposite concepts are fuzzy concepts, then there must exists a “medium” fuzzy concept between them; conversely, if there is a medium fuzzy concept between the two opposite concepts, then opposite concepts must be fuzzy concepts. Thus, negation of fuzzy concept is considered to include contradictory negation, opposite negation and medium negation. In order to provide a base of logic for the three kinds of negations, this paper proposes a fuzzy propositional logic, FLCOM, with contradictory negation, opposite negation and medium negation, discusses operations and interesting properties as well as characteristics of FLCOM, presents a semantic interpretation of FLCOM, and proves reliability theorem. In order to show that FLCOM is applicable for dealing with fuzzy proposition and its different negations in practical problem, the paper studies applications of FLCOM to fuzzy decision making in an example. Based on FLCOM, the study discusses formal representation of fuzzy proposition and different negations in decision rules, presents an approach to measure truth value of fuzzy proposition and threshold of truth value, and describes reasoning and realization of fuzzy decision making in the example based on fuzzy production rules.

Key words: fuzzy knowledge; contradictory negation; opposite negation; medium negation; fuzzy propositional logic

在知识表示与推理中,尤其是在模糊知识表示与推理中,否定概念扮演了重要且特殊的角色.在 Zadeh 模糊

* 基金项目: 国家自然科学基金(61375004, 60973156); 中央高校基本科研业务费专项资金(JUSRP51317B)

收稿时间: 2012-03-31; 修改时间: 2013-03-29; 定稿时间: 2013-12-26

集 FS(fuzzy sets)[1]、直觉模糊集 IFS(intuitionistic fuzzy sets)[2]与粗糙集 RS(rough sets)[3]中,否定$\neg$被定义为$\neg x=1-x$;在 Hájek 基础逻辑 BL(basic logic)[4]中,否定$\neg$定义为$\neg x=x\rightarrow 0$;在王国俊模糊命题演算系统$\mathcal{L}^*$[5]中,否定$\neg$仍定义为$\neg x=1-x$.这些理论对否定概念的认识在概念本质上与经典集和经典逻辑没有区别,即只有一种否定,只是定义形式的不同[11,12].然而人们已经认识到:在知识推理、自然语言理解、逻辑程序设计(prolog)、语义网(semantic Web)、数据库查询语言 SQL 以及产生式规则系统(如 CLIPS 和 Jess)等许多计算信息处理系统中,从逻辑观点看,否定概念是一个非清晰的概念,认为在这些领域中存在多种否定[6−15].Wagner 等人提出在所有这些计算信息处理系统中区分强否定(strong negation)和弱否定(weak negation),强否定表示明确的假(explicit falsity),弱否定表示非-真(non-truth)[6−8];Ferré 对于否定概念提出一种认识的扩充,在逻辑概念分析(logical concept analysis)和自然语言中,区分否定中的外延否定和内涵否定[9];Kaneiwa 提出一个带有经典否定和强否定的扩展的描述逻辑 $ALC_{\sim}$,经典否定$\neg F$ 代表了一个陈述 F 的否定,但一个强否定$\sim F$ 可能更适合于表示明白的否定信息(或否定事实),换句话说,$\sim F$ 所指信息即是 F 的专用的对立,其胜过 F 的补否定[10].潘正华等人从概念层面上对否定概念提出一种认识的扩充,确立了清晰性知识和模糊性知识中存在的 5 种否定关系,对这 5 种关系给出一种逻辑描述以及运用在知识表示与知识推理中[11−14],并且进一步研究了模糊概念中的不同否定[15],提出一种区分矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊集 FScom,并研究了 FScom 具有的性质以及在实际中的应用[16−18].

为了能够从逻辑的角度描述模糊知识中的不同否定及其关系与规律,本文提出一种区分矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊命题逻辑形式系统 FLcom,讨论了 FLcom 特有的性质与意义,给出了 FLcom 的一种语义解释,并证明了可靠性定理.为了表明 FLcom 处理实际中的模糊信息及其不同否定的适用性,进一步研究了 FLcom 在一个模糊决策实例中的应用.

1 模糊概念中的不同否定关系

在知识中,概念是知识构成的基本成份.在形式逻辑中,概念之间的关系是指概念外延的关系,它区分为相容关系和不相容关系.概念 A 与 B 之间的不相容关系,是指 A 与 B 两个概念的外延(外延用一个矩形框表示)之间没有任何一部分重合的关系(如图 1 所示),例如“白”与“非白”、“青年”与“老年”、“导体”与“绝缘体”等等.

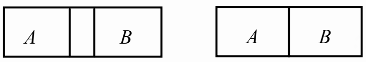


Fig.1 Extensions of the inconsistent concept A and B doesnot superposition

图 1 不相容概念 A 与 B 的外延没有重合部分

自 Aristotle 以来,形式逻辑将概念的不相容关系区分为矛盾关系和对立关系.概念的矛盾关系是指在同一个属概念下的两个种概念之间的不相容关系,它们的外延互相排斥,外延之和等于属概念的外延;概念的对立关系是指在同一个属概念之下的两个种概念之间的不相容关系,它们的外延互相排斥,外延之和小于属概念的外延.一个概念与其“否定”之间的关系就是一种不相容关系,因而,一个概念与其否定概念之间的关系包括了矛盾否定关系和对立否定关系.

概念的模糊性,即是概念在外延上的不分明性.对于一个模糊概念与其否定的关系,我们认为存在下列 3 种情形.

1.1 模糊概念中的3种否定关系

(1) 模糊概念中的矛盾否定关系 CFC(contradictory negative relation in fuzzy concepts)

关系特征:“外延界限不分明,非此即彼”.

例如:属概念“人”下的种概念“青年人”与“非青年人”的关系,属概念“速度”下的种概念“快”与“不快”的关系等(如图 2 所示).

Fig.2 Extension relations between fuzzy concepts young people and non-young people

图 2 模糊概念“青年”与其矛盾否定“非青年”的外延关系

(2) 模糊概念中的对立否定关系 OFC(opposite negative relation in fuzzy concepts)

关系特征:“外延界限不分明,不非此即彼”.

例如:属概念“人”下的种概念“青年人”与“老年人”的关系,属概念“速度”下的种概念“快”与“慢”的关系等(如图 3 所示).

Fig.3 Extension relations between young people and opposite negation old people

图 3 模糊概念“青年”与其对立否定“老年”的外延关系

在现实世界的各种知识中,许多对立的概念之间存在具有“中介”特征的概念.所谓对立概念之间的中介概念,即指在同一个属概念下,两个对立的种概念之间呈现出“过渡状态”的另一个种概念.对于对立的模糊概念,通过对大量的客观实例进行研究后我们发现,对立的模糊概念中存在如下规律:

- 如果一对对立概念为模糊概念,则对立概念之间必然存在中介的模糊概念;
- 相反,如果一对对立概念之间存在中介的模糊概念,则对立概念一定是模糊概念.

对立概念之间存在中介的模糊概念,当且仅当对立概念为模糊概念.

这种存在于对立的模糊概念之间的中介模糊概念,从它的内涵和外延可知,它与对立的模糊概念的关系是一种否定关系.对此,我们称为中介否定关系.

(3) 模糊概念中的中介否定关系 MFC(medium negative relation in fuzzy concept)

关系特征:“外延界限不分明,彼与此的中介”.

例如:“中年人”是对立概念“青年人”与“老年人”之间的中介概念,中年人与青年人(或老年人)之间的关系是中介否定关系;“黄昏”或“黎明”是对立概念“白昼”与“黑夜”之间的中介概念,黄昏(或黎明)与白昼(或黑夜)之间的关系是中介否定关系;“半导体”是“导体”与“绝缘体”之间的中介概念,半导体与导体(或绝缘体)之间的关系是中介否定关系等(如图 4 所示).

Fig.4 Extension relations between middleaged people and young people (or old people)

图 4 对立的模糊概念“青年”和“老年”与其中介否定“中年”的外延关系

因而我们提出,在模糊概念中存在 3 种不同的否定关系,即:矛盾否定关系 CFC、对立否定关系 OFC 和中介否定关系 MFC.

2 模糊知识及其 3 种否定的一种逻辑基础

如何研究建立能够完整刻画模糊知识中的矛盾否定关系、对立否定关系和中介否定关系的逻辑基础,基于上述认识,我们提出一种能够区分矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊命题逻辑形式化系统.

2.1 区分矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊命题逻辑FLCOM

定义 1.

(I) 设 S 是非空集,其元素称为原子命题或原子公式,“¬”,“╕”,“~”,“→”,“∧”和“∨”是连接词,“(”与“)”是括号.

其中,¬,╕和~为矛盾否定、对立否定和中介否定符号.规定:

(a) 对每个 $A\in S$,A 是合式公式(简称公式);

(b) 若 A 和 B 是公式,则 $\neg A$,╕A,$\sim A$,$(A\to B)$,$(A\vee B)$和$(A\wedge B)$是公式;

(c) 由规定(a)与规定(b)生成的全体模糊命题集为$\mathfrak{I}(S)$,简记为$\mathfrak{I}$.$\mathfrak{I}$中的元素称为模糊公式,简称公式.

(II) $\mathfrak{I}$中的以下公式称为公理:

(A1) $A\to(B\to A)$;

(A2) $(A\to(A\to B))\to(A\to B)$;

(A3) $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$;

(M_1) $(A\to\neg B)\to(B\to\neg A)$;

(M_2) $(A\to$╕$B)\to(B\to$╕$A)$;

(H) $\neg A\to(A\to B)$;

(C) $((A\to\neg A)\to B)\to((A\to B)\to B)$;

($\vee_1$) $A\to A\vee B$;

($\vee_2$) $B\to A\vee B$;

($\wedge_1$) $A\wedge B\to A$;

($\wedge_2$) $A\wedge B\to B$;

($Y_╕$) ╕$A\to\neg A\wedge\neg\sim A$;

($Y_\sim$) $\sim A\to\neg A\wedge\neg$╕$A$.

(III) 推理规则 MP(modus ponens):由 $A\to B$ 与 A 推出 B.

由上述(I)~(III)构成的形式系统,称为“区分矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊命题逻辑形式化系统FLCOM”(fuzzy propositional logic with contradictory negation, opposite negation and medium negation).

在 FSCOM 中,已证明一个模糊集 P 的矛盾否定 $P^{\neg}$与对立否定 $P^{╕}$、中介否定 $P^{\sim}$具有关系[16,17]:

$$P^{\neg}=P^{╕}\cup P^{\sim} \tag{1}$$

由此,在 FLCOM 中,我们可定义模糊公式 A 矛盾否定$\neg A$ 与对立否定╕A、中介否定$\sim A$ 的关系如下:

定义 2. 在 FLCOM 中:

$$\neg A=╕A\vee\sim A \tag{2}$$

注 1:可以证明:(i) FLCOM 中的一些公理并不具有独立性;(ii) FLCOM 中有些连接词也不具有独立性.连接词集{¬,╕,~,∨,∧,→}可归约为{╕,~,∨,→},而且若将∨,∧作为系统中引入的定义符号:$A\vee B=$╕$A\to B$,$A\wedge B=$╕$(A\to$╕$B)$,则连接词集{¬,╕,~,∨,∧,→}可归约为{╕,~,→},即,FLCOM 的初始连接词为╕,~与→.

注 2:因在 FSCOM 中已证 $A^{╕}=A^{\neg}\cap A^{\sim\neg}$,$A^{\sim}=A^{\neg}\cap A^{╕\neg}$,所以我们将 $Y_╕$ 和 $Y_\sim$作为 FLCOM 的公理.

注 3:在 FLCOM 中,$A\to B$ 并不与$\neg A\vee B$,╕$A\vee B$ 逻辑等价.

2.2 FLCOM的性质与意义

由于 FLCOM 中将“否定”概念区分为“矛盾否定”、“对立否定”和“中介否定”,所以我们可证明,FLCOM 具有许多与其他模糊逻辑系统相同的性质以及特有的性质与意义.

定理 1. 在 FLCOM 中:

[1] $\vdash A\to A$;

[2] $\vdash((A\to B)\to C)\to(B\to C)$;

[3] $\vdash A\to((A\to B)\to(C\to B))$;

[4] $\vdash A\to((A\to B)\to B)$;

[5] $\vdash(((A\to B)\to B)\to C)\to(A\to C)$;

[6] $\vdash(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$;

[7]* $\vdash(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$;

[8] $\vdash((A\to B)\to(A\to(A\to C)))\to((A\to B)\to(A\to C))$;

[9] $\vdash(B\to(A\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$;

[10] $\vdash(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$.

证明:

[1]:

(1) $(A\to(A\to A))\to(A\to A)$ (A2)

(2) $A\to(A\to A)$ (A1)

(3) $A\to A$ (1)(2)(MP)

[2]:

(1) $(B\to(A\to B))\to(((A\to B)\to C)\to(B\to C))$ (A3)

(2) $B\to(A\to B)$ (A1)

(3) $((A\to B)\to C)\to(B\to C)$ (1)(2)(MP)

[3]:

(1) $(C\to A)\to((A\to B)\to(C\to B))\to(A\to((A\to B)\to(C\to B)))$ [2]

(2) $(C\to A)\to((A\to B)\to(C\to B)$ (A3)

(3) $A\to((A\to B)\to(C\to B))$ (1)(2)(MP)

[4]:

(1) $(A\to((A\to B)\to((A\to B)\to B)))\to((((A\to B)\to((A\to B)\to B))\to((A\to B)\to B))\to(A\to((A\to B)\to B)))$ (A3)

(2) $A\to((A\to B)\to((A\to B)\to B))$ [3]

(3) $(A\to B)\to((A\to B)\to B))\to((A\to B)\to B))\to(A\to((A\to B)\to B))$ (1)(2)(MP)

(4) $(A\to B)\to(((A\to B)\to B)\to((A\to B)\to B))$ [3]

(5) $A\to((A\to B)\to B)$ (3)(4)(MP)

同样方法,可证明定理 1 的[5]~[10].

定理 2. 在 FLCOM 中:

[11] $\vdash\neg A\to(A\to\neg(B\to B))$;

[12] $\vdash B\to((A\to\neg B)\to\neg A)$;

[13] $\vdash(A\to\neg B)\to((A\to B)\to\neg A)$;

[14]* $\vdash(A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)$ (归缪律)

[15]* $\vdash(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$;

[16] $\vdash(A\to\neg A)\to\neg A$;

[17]* $\vdash A\to\neg\neg A$;

[18]* $\vdash(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$;

[19] $\vdash\neg\neg A\to(\neg\neg A\to A)$;

[20]* $\vdash\neg\neg A\to A$;

[21]* $\vdash(\neg A\to B)\to((\neg A\to\neg B)\to A)$ (反证律)

我们选证定理 2 的[11]、[14]*和[17]*,其余的用同样方法可以证明.

证明:

[11]:

(1) $((B\to B)\to\neg A)\to(A\to\neg(B\to B))$ (M_1)

(2) $((B\to B)\to\neg A)\to(A\to\neg(B\to B))\to(\neg A\to(A\to\neg(B\to B)))$ [2]

(3) $\neg A\to(A\to\neg(B\to B))$ (1)(2)(MP)

[14]*:

(1) $(A\to\neg B)\to((A\to B)\to\neg A)$ [13]

(2) $((A\to\neg B)\to((A\to B)\to\neg A))\to((A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A))$ [6]

(3) $(A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)$ (1)(2)(MP)

[17]*:

(1) $\neg A\to\neg A$ [1]

(2) $(\neg A\to\neg A)\to(A\to\neg\neg A)$ (A4)

(3) $A\to\neg\neg A$ (1)(2)(MP)

定理1与定理2表明:FLcom保持了许多模糊逻辑形式系统通常具有的基本性质,如归缪律([14]*)和反证律([21]*),以及[7]*、[15]*、[17]*、[18]*和[20]*.

定理3. 在FLcom中:

[1^0] $\vdash$╕$A\to(A\to$╕$(B\to B))$;

[2^0] $\vdash B\to((A\to$╕$B)\to$╕$A)$;

[3^0] $\vdash(A\to$╕$B)\to(A\to(B\to$╕$(B\to B)))$;

[4^0] $\vdash(A\to B)\to((A\to$╕$B)\to$╕$A)$ (新归缪律)

[5^0] $\vdash(A\to B)\to($╕$B\to$╕$A)$;

[6^0] $\vdash(A\to$╕$A)\to$╕A;

[7^0] $\vdash A\to$╕╕A;

[8^0] $\vdash($╕$A\to$╕$B)\to(B\to A)$;

[9^0] $\vdash$╕╕$A\to($╕╕$A\to A)$;

[10^0] $\vdash$╕╕$A\to A$.

证明:

[1^0]:

(1) $((B\to B)\to$╕$A)\to(A\to$╕$(B\to B))$ (M_2)

(2) $((B\to B)\to$╕$A)\to(A\to$╕$(B\to B))\to($╕$A\to(A\to$╕$(B\to B)))$ [2]

(3) ╕$A\to(A\to$╕$(B\to B))$ (1)(2)(MP)

证明[2^0]~[10^0]:如同[1^0]的证明,即:在[11]~[20]的证明,即:在情形[11]~情形[20]的证明中,将M_1换成M_2即得到证明.

定理3呈现了FLcom具有的与其他模糊逻辑不同的性质,具有独立意义.FLcom在定理2中既保持了模糊逻辑中的归缪律([14]*),在定理3中又新增了一个归缪律([4^0]),表明FLcom扩充了“归缪律”的涵义.

定理4. 在FLcom中:

[11^0] $\vdash\neg(A\wedge\neg A)$ (矛盾律)

[12^0] $\vdash\neg($╕$A\wedge{\sim}A)$ (矛盾律1)

[13^0] $\vdash\neg(A\wedge{\sim}A)$ (矛盾律2)

[14^0] $\vdash\neg(A\wedge$╕$A)$ (矛盾律3)

证明:

[11^0]:

(1) $A\wedge\neg A\to A$ ($\wedge_1$)

(2) $A\wedge\neg A\to\neg A$ ($\wedge_2$)

(3) $\neg(A\wedge\neg A)$ [14](1)(2)(MP)

[12^0]:

(1) ╕$A\wedge{\sim}A\to$╕A ($\wedge_1$)

(2) ╕$A\wedge{\sim}A\to{\sim}A$ ($\wedge_2$)

(3) ╕$A\to\neg A\wedge\neg{\sim}A$ ($Y_{╕}$)

(4) ╕$A\wedge{\sim}A\to\neg A\wedge\neg{\sim}A$ (1)(3)(A3)(MP)

(5) $\neg A\wedge\neg{\sim}A\to\neg{\sim}A$ ($\wedge_2$)

(6) ╕$A\wedge{\sim}A\to\neg{\sim}A$ (4)(5)(A3)(MP)

(7) $\neg($╕$A\wedge{\sim}A)$ (2)(6)[14](MP)

[13^0]:

(1) $A\wedge{\sim}A\to A$ ($\wedge_1$)

(2) $A\wedge{\sim}A\to{\sim}A$ ($\wedge_2$)

(3) $\sim A\to\neg A\wedge\neg ╕ A$ $(Y_{\sim})$

(4) $A\wedge\sim A\to\neg A\wedge\neg ╕ A$ (2)(3)(A3)(MP)

(5) $\neg A\wedge\neg ╕ A\to\neg A$ $(\wedge_1)$

(6) $A\wedge\sim A\to\neg A$ (4)(5)(A3)(MP)

(7) $\neg(A\wedge\sim A)$ (1)(6)[14] (MP)

$[14^0]$:

(1) $A\wedge ╕ A\to A$ $(\wedge_1)$

(2) $A\wedge ╕ A\to ╕ A$ $(\wedge_2)$

(3) $╕ A\to\neg A\wedge\neg\sim A$ $(Y_{╕})$

(4) $A\wedge ╕ A\to\neg A\wedge\neg\sim A$ (2)(3)(A3)(MP)

(5) $\neg A\wedge\neg ╕ A\to\neg A$ $(\wedge_1)$

(6) $A\wedge ╕ A\to\neg A$ (4)(5)(A3)(MP)

(7) $\neg(A\wedge ╕ A)$ (1)(6)[14] (MP)

由于“否定”概念在 FLcom 中区分成“矛盾否定”、“对立否定”和“中介否定”,因而通常意义下的“矛盾”概念的含义在 FLcom 中应该得到扩充,定理 4 反映了这种扩充意义.具体地,FLcom 保持了模糊逻辑中的矛盾律($[11^0]$),增加了 3 个新矛盾律($[12^0]$,$[13^0]$,$[14^0]$).

2.3 FLcom的一种语义解释

构造、研究一个逻辑形式系统的目的,是为了通过研究其中的形式推理以研究非形式的演绎推理[20].关于FLcom的语义研究,我们如下证明了FLcom的可靠性定理,表明FLcom中形式推理所反映的前提与结论之间的关系,在演绎推理中都是成立的.

定义 3. 形式系统 FLcom 中一个形式定理 A 的证明为一个有限的公式序列 $A_1,A_2,\ldots,A_n$,其中,$A_k(k=1,2,\ldots,n)$是 FLcom 的公理,或者是由 A_i 与 $A_j(i<k,j<k)$通过 MP 推导出的公式,并且 $A_n=A$.

定义 4(λ-赋值). 设$\lambda\in(0,1)$,映射$\partial:\mathfrak{I}\to[0,1]$称为$\mathfrak{I}$的一个$\lambda$-赋值,如果:

(a) $\partial(A)+\partial(╕ A)=1$ (3)

(b)
$$\partial(\sim A)=\begin{cases}\lambda-\dfrac{2\lambda-1}{1-\lambda}(\partial(A)-\lambda), & \text{当}\lambda\geqslant 1/2\text{且}\partial(A)\in(\lambda,1] \quad (4)\\ \lambda-\dfrac{2\lambda-1}{1-\lambda}\partial(A), & \text{当}\lambda\geqslant 1/2\text{且}\partial(A)\in[0,1-\lambda] \quad (5)\\ 1-\dfrac{1-2\lambda}{\lambda}(\partial(A)+\lambda-1)-\lambda, & \text{当}\lambda\leqslant 1/2\text{且}\partial(A)\in(1-\lambda,1] \quad (6)\\ 1-\dfrac{1-2\lambda}{\lambda}\partial(A)-\lambda, & \text{当}\lambda\leqslant 1/2\text{且}\partial(A)\in[0,\lambda) \quad (7)\\ \partial(A), & \text{其他} \quad (8)\end{cases}$$

(c) $\partial(A\vee B)=\mathrm{Max}(\partial(A),\partial(B)),\partial(A\wedge B)=\mathrm{Min}(\partial(A),\partial(B))$ (9)

(d) $\partial(A\to B)=\mathfrak{R}(\partial(A),\partial(B))$.这里,$\mathfrak{R}:[0,1]^2\to[0,1]$是某个二元函数 (10)

其中,情形(b)的含义是:因公式的真值域为[0,1],参数$\lambda\in(0,1)$,由于λ是可变的,所以公式 A 的真值$\partial(A)$在[0,1]中的取值范围与λ值的关系存在以下情形:

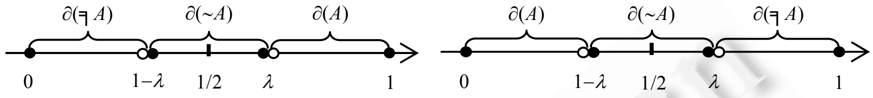
(i) 当$\lambda\geqslant 1/2$ 时,$\partial(A)\in(\lambda,1]$或$\partial(A)\in[0,1-\lambda)$或$\partial(A)\in[1-\lambda,\lambda]$.其中,

- 如果$\partial(A)\in(\lambda,1]$,则由情形(a)有$\partial(╕ A)\in[0,1-\lambda)$.此时,若规定$\partial(\sim A)\in[1-\lambda,\lambda]$),根据数学中一维空间中任何两个不相交区间中的点存在 1-1 对应关系的原理,则公式$\sim A$ 的真值$\partial(\sim A)$与$\partial(A)$具有关系式(4);
- 如果$\partial(A)\in[0,1-\lambda)$,同理得到$\partial(A)$与$\partial(\sim A)$的关系式(5);
- 如果$\partial(A)\in[1-\lambda,\lambda]$,规定$\partial(\sim A)$为$\partial(A)$,即关系式(8).

(ii) 当$\lambda\leqslant 1/2$ 时,$\partial(A)\in(1-\lambda,1]$或$\partial(A)\in[0,\lambda)$或$\partial(A)\in[\lambda,1-\lambda]$.类似情形(i),得到$\partial(A)$与$\partial(\sim A)$的关系式(6)~关系

式(8).

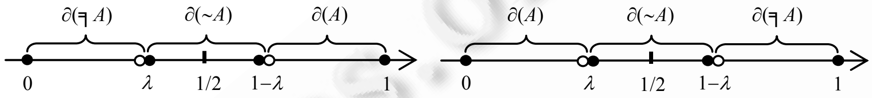
对于$\partial(A)$,$\partial(\neg A)$和$\partial(\sim A)$在[0,1]中的关系,我们可用图 5、图 6 描述如下(图中符号“•”与“o”分别表示一个区间的闭端点和开端点):



$\partial(A)\in(\lambda,1]$的情形　　$\partial(A)\in[0,1-\lambda)$的情形

Fig.5 $\partial(A)$ has relationships with $\partial(\neg A)$ and $\partial(\sim A)$ in [0, 1] when $\lambda\geq$ ½

图 5 当$\lambda\geqslant 1/2$时,$\partial(A)$,$\partial(\neg A)$,$\partial(\sim A)$在[0,1]中的关系



$\partial(A)\in(1-\lambda,1]$的情形　　$\partial(A)\in[0,\lambda)$的情形

Fig.6 $\partial(A)$ has relationships with $\partial(\neg A)$ and $\partial(\sim A)$ in [0, 1] when $\lambda\leq$ ½

图 6 当$\lambda\leqslant 1/2$时,$\partial(A)$,$\partial(\neg A)$,$\partial(\sim A)$在[0,1]中的关系

定义 5(λ-重言式). 设Γ是$\mathfrak{I}$的λ-赋值集,$\forall A\in\mathfrak{I}$,如果对每个$\xi\in\Gamma$,恒有$\xi(A)=1$,则称 A 为Γ-重言式.如果$\lambda>1/2$时,使得对每个λ-赋值ξ,恒有$\xi(A)\geqslant\lambda$,则称 A 为λ-重言式.

为了证明 FLcom 的所有公理都是λ-重言式,我们需要确立公式(10)中的函数$\mathfrak{R}$.

定义 6. 设 $a,b\in[0,1]$,$\mathfrak{R}^o:[0,1]^2\rightarrow[0,1]$是一个满足下式的二元函数$\mathfrak{R}$:

$$\text{当 } a\leqslant b \text{ 时},\mathfrak{R}^o(a,b)=1 \tag{11}$$

$$\text{当 } a>b \text{ 时},\mathfrak{R}^o(a,b)=\max(1-a,b) \tag{12}$$

容易证明,$\mathfrak{R}^o$ 具有如下性质:

命题 1. 设 $a,b,c\in[0,1]$,则:

$$a\geqslant b,\text{当且仅当}\mathfrak{R}^o(a,c)\leqslant\mathfrak{R}^o(b,c) \tag{13}$$

$$a\geqslant b,\text{当且仅当}\mathfrak{R}^o(c,a)\geqslant\mathfrak{R}^o(c,b) \tag{14}$$

定理 5. 对于 FLcom,如果 A 和 $A\rightarrow B$ 是λ-重言式,那么 B 是λ-重言式.

证明:设$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^o$,$A$ 和 $A\rightarrow B$ 是λ-重言式.假若 B 不是λ-重言式,则根据定义 5,存在一个λ-赋值$\beta\in\Gamma$,使得$\beta(B)<\lambda$,而$\beta(A)\geqslant\lambda$,且由公式(10),有$\beta(A\rightarrow B)=\mathfrak{R}^o(\beta(A),\beta(B))\geqslant\lambda$.因$\beta(A)>\beta(B)$,由公式(14)得到$\mathfrak{R}^o(\beta(A),\beta(B))=\max(1-\beta(A),\beta(B))<\lambda$,矛盾.因此,$B$ 是λ-重言式.

定理 6. FLcom 中的各条公理都是λ-重言式.

证明:任取$\upsilon\in\Gamma$,a,b,c 分别表示$\upsilon(A)$,$\upsilon(B)$和$\upsilon(C)$,设$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^o$.则由公式(10)和定义 6,公理(A1)~公理(A3)可表示为以下各式:

$$\text{(A1)}: \mathfrak{R}(a,\mathfrak{R}(b,a))\geqslant\lambda \tag{15}$$

$$\text{(A2)}: \mathfrak{R}(\mathfrak{R}(a,\mathfrak{R}(a,b)),\mathfrak{R}(a,b))\geqslant\lambda \tag{16}$$

$$\text{(A3)}: \mathfrak{R}(\mathfrak{R}(a,b),\mathfrak{R}(\mathfrak{R}(b,c),\mathfrak{R}(a,c)))\geqslant\lambda \tag{17}$$

对于公式(15),根据定义 6,如果 $a\leqslant b$,则$\mathfrak{R}(a,\mathfrak{R}(b,a))=\mathfrak{R}(a,\max(1-b,a))$.其中:若 $1-b>a$,则有$\mathfrak{R}(a,\max(1-b,a))=\mathfrak{R}(a,1-b)=1\geqslant\lambda$;若 $1-b\leqslant a$,则有$\mathfrak{R}(a,\max(1-b,a))=\mathfrak{R}(a,a)=1\geqslant\lambda$;如果 $a>b$,则$\mathfrak{R}(a,\mathfrak{R}(b,a))=\mathfrak{R}(a,1)=1\geqslant\lambda$.所以,公理(A1)是$\lambda$-重言式.

对于公式(16),根据定义 6,只需证明$\mathfrak{R}(a,\mathfrak{R}(a,b))\leqslant\mathfrak{R}(a,b)$.因 $a\leqslant b$ 时$\mathfrak{R}(a,\mathfrak{R}(a,b))\leqslant\mathfrak{R}(a,b)$成立,所以,只需证

明 $a>b$ 时 $\mathfrak{R}(a,\mathfrak{R}(a,b))\leqslant\mathfrak{R}(a,b)$成立.

当 $a>b$ 时,假设 $\mathfrak{R}(a,\mathfrak{R}(a,b))>\mathfrak{R}(a,b)$,则由公式(14)有 $\mathfrak{R}(a,b)>b$,即,$\mathfrak{R}(a,b)=\max(1-a,b)>b$,所以有 $\mathfrak{R}(a,b)=1-a>b$.代入假设,得到 $\mathfrak{R}(a,1-a)>1-a$.但当 $a>1-a$ 时,由公式(11)得到 $\mathfrak{R}(a,1-a)=\max(1-a,1-a)>1-a$,因而矛盾.因此,$\mathfrak{R}(a,\mathfrak{R}(a,b))\leqslant\mathfrak{R}(a,b)$成立.所以,(A2)是$\lambda$-重言式.

对于公式(17),根据定义 6,只需证明 $\mathfrak{R}(a,b)\leqslant\mathfrak{R}(\mathfrak{R}(b,c),\mathfrak{R}(a,c))$.

假设 $\mathfrak{R}(a,b)>\mathfrak{R}(\mathfrak{R}(b,c),\mathfrak{R}(a,c))$,则 $\mathfrak{R}(\mathfrak{R}(b,c),\mathfrak{R}(a,c))\neq 1$,由定义 6,即是:

$$\mathfrak{R}(b,c)>\mathfrak{R}(a,c) \tag{*}$$

对此,根据公式(13)得到 $a>b$.由于 $\mathfrak{R}(a,c)\neq 1$,由公式(11)有 $a>c$,则根据公式(12)有 $\mathfrak{R}(a,c)=\max(1-a,c)$.代入公式(*)得到 $\mathfrak{R}(b,c)>\max(1-a,c)$.即:无论是 $b>c$ 还是 $b\leqslant c$ 时,均有 $\mathfrak{R}(b,c)>\max(1-a,c)$.当 $b\leqslant c$ 时,根据公式(11)有 $\mathfrak{R}(b,c)=1$,所以 $\mathfrak{R}(b,c)>\max(1-a,c)$成立.当 $b>c$ 时,根据公式(12)有 $\mathfrak{R}(b,c)=\max(1-b,c)$;又由于 $a>b$,即 $1-a<1-b$,所以有 $\mathfrak{R}(b,c)=\max(1-b,c)>\max(1-a,c)$.然而,其中若 $1-b\leqslant c$,则有 $\max(1-b,c)=c>\max(1-a,c)=c$,矛盾.所以,只有在 $b>c$ 且 $1-b>c$ 时,$\mathfrak{R}(b,c)>\max(1-a,c)$成立.

将 $a>b,b>c$ 和 $1-b>c$ 代入假设:$\mathfrak{R}(a,b)>\mathfrak{R}(\mathfrak{R}(b,c),\mathfrak{R}(a,c))$.根据公式(13),得到 $\max(1-a,b)>\max(1-\max(1-b,c),\max(1-a,c))=\max(b,\max(1-a,c))$.然而,当 $1-a<b$ 时,有 $\max(1-a,b)=b>\max(b,\max(1-a,c))=b$,矛盾;当 $1-a\geqslant b$ 时,有 $\max(1-a,b)=1-a>\max(b,\max(1-a,c))=1-a$,矛盾.所以,假设 $\mathfrak{R}(a,b)>\mathfrak{R}(\mathfrak{R}(b,c),\mathfrak{R}(a,c))$不成立.因此,(A3)是$\lambda$-重言式.

类似地,可以验证在 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^0$ 时,其余的公理(M)~公理($Y_{\sim}$)也都是λ-重言式.

定理 7(可靠性定理). FLcom 中的每个形式定理是λ-重言式.

证明:令 A 是 FLcom 的一形式定理,对在 FLcom 中 A 的证明的公式序列 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 的长度 n 进行归纳:

(i) 若 $n=1$,则根据定义 3,A_1(即 A)是 FLcom 的一公理.由定理 6,FLcom 的所有公理都是λ-重言式,所以 A 是λ-重言式.

(ii) 假设 $k<n$ 时定理成立,即 A 的证明的小于 n 步的序列公式都是λ-重言式,我们证明 $n=k$ 时定理成立.根据定义 3,存在两种情形:(a) A_n 是 FLcom 的公理;(b) A_n(即 A)是由 A_i 与 $A_j(i<n,j<n)$通过 MP 推导出的公式.

若情形(a),则情形(i)得证;若情形(b),A_i 与 A_j 必为 B 和 $B\rightarrow A$ 的形式,而根据归纳假设,B 和 $B\rightarrow A$ 是λ-重言式,因此由定理 5,A(即 A_n)是λ-重言式.

根据数学归纳原理,FLcom 的每个形式定理是λ-重言式.

由上可见,在 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_0$ 时,FLcom 的所有公理都是λ-重言式,可靠性定理成立.对于其他的 $\mathfrak{R}$,可以验证可靠性定理不一定成立.如:对于 Łukasiewicz 的 $\mathfrak{R}_{Lu}$ 而言($\mathfrak{R}_{Lu}$:$a\leqslant b$ 时,$\mathfrak{R}_{Lu}(a,b)=1$;$a>b$ 时,$\mathfrak{R}_{Lu}(a,b)=\min(1,1-a+b)$),可靠性定理成立;但对于 Gődel 的 $\mathfrak{R}_G$($a\leqslant b$ 时,$\mathfrak{R}_G(a,b)=1$;$a>b$ 时,$\mathfrak{R}_G(a,b)=b$)、Gaines-Recher 的 $\mathfrak{R}_{GR}$($a\leqslant b$ 时,$\mathfrak{R}_{GR}(a,b)=1$;$a>b$ 时,$\mathfrak{R}_{GR}(a,b)=0$)以及 Mamdani 的 $\mathfrak{R}_M$($a\leqslant b$ 时,$\mathfrak{R}_M(a,b)=1$;$a>b$ 时,$\mathfrak{R}_M(a,b)=\min(a,b)$),可靠性定理都不成立.

对于上述的 $\mathfrak{R}$ 和 $\mathfrak{R}_{Lu}$,可以验证 FLcom 完备性定理不成立;但对于某特定的 $\mathfrak{R}$ 而言,FLcom 完备性定理是否成立,我们将在另文中讨论.

2.4 FLcom中否定与其他模糊逻辑中否定的对比和关系

对模糊概念中"否定"的认知,Zadeh 模糊逻辑、直觉模糊逻辑、Hájek 基础逻辑以及王国俊的模糊命题系统等理论仅认识一种否定(即矛盾否定),它们对该否定的定义只是表达不同.Lcom 从概念层面上区分了模糊概念中存在的 3 种否定关系即矛盾否定关系、对立否定关系和中介否定关系,认识并确定了模糊概念中存在 3 种不同的否定(即矛盾否定、对立否定与中介否定).因而,我们认为:FLcom 与其他模糊逻辑对于模糊概念中"否定"的认识与处理在概念本质上是不同的,其他模糊逻辑中的否定,即为 FLcom 中的矛盾否定;Wagner 等人提出的弱否定与强否定、Ferré 提出的外延否定与内涵否定以及 Kaneiwa 提出的经典否定与强否定,即为 FLcom 中的矛盾否定与对立否定.对此,我们可用表 1 归纳比较.

Table 1 Various views and handling for negation of the fuzzy concept *A*

表 1 关于模糊概念 *A* 的否定的认知处理的比较

对否定的认知处理	*A* 的否定 1	*A* 的否定 2	*A* 的否定 3
Zadeh 模糊逻辑	矛盾否定:$\neg A$	×	×
直觉模糊逻辑	矛盾否定:$\neg A$	×	×
Hájek 基础逻辑	矛盾否定:$\neg A$	×	×
王国俊模糊逻辑	矛盾否定: $\neg A$	×	×
G. Wagner	弱否定:$-A$	强否定:$\sim A$	×
S. Ferré	外延否定:$\neg A$	内涵否定:mal-A	×
K. Kaneiwa	经典否定:$\neg A$	强否定:$\sim A$	×
FLcom	矛盾否定:$\neg A$	对立否定:╕A	中介否定:$\sim A$

我们知道:在模糊逻辑中,一个模糊否定是真值为 0 与 1 的传统否定的一种扩充,是[0,1]到[0,1]上的一个映射.定义[19]如下:

定义 7. 一个函数 N:[0,1]→[0,1]是一种模糊否定,如果:

$$N(1)=0 \text{ 并且 } N(0)=1 \tag{18}$$

$$\text{若 } x\leqslant y, \text{则 } N(y)\leqslant N(x), \forall x,y\in[0,1] \tag{19}$$

我们在定义 4 中对 FLcom 中公式给出了真值域为[0,1]的一种λ-赋值,目的为形式系统 FLcom 给出一种语义解释.基于定义 4,我们进一步定义 FLcom 中的矛盾否定¬、对立否定╕与中介否定~如下:

定义 8. 对于任意 $x\in[0,1]$,一个映射╕:[0,1]→[0,1]为 FLcom 中对立否定,如果:

$$╕x=1-x \tag{20}$$

定义 9. 设 $\lambda\in(0,1)$.$\forall x\in[0,1]$,一个映射~:[0,1]→[0,1]为 FLcom 中介否定,如果:

$$\sim x=\begin{cases}\lambda-\dfrac{2\lambda-1}{1-\lambda}(x-\lambda), & \text{当}\lambda\geqslant 1/2\text{且}x\in(\lambda,1] \quad (21)\\ \lambda-\dfrac{2\lambda-1}{1-\lambda}x, & \text{当}\lambda\geqslant 1/2\text{且}x\in[0,1-\lambda) \quad (22)\\ 1-\dfrac{1-2\lambda}{\lambda}(x+\lambda-1), & \text{当}\lambda\leqslant 1/2\text{且}x\in(1-\lambda,1] \quad (23)\\ 1-\dfrac{1-2\lambda}{\lambda}+\lambda, & \text{当}\lambda\leqslant 1/2\text{且}x\in[0,\lambda) \quad (24)\\ x, & \text{其他} \quad (25)\end{cases}$$

并且,基于定义 2 与定义 4 中的情形(c),FLcom 中的矛盾否定¬可定义如下:

定义 10. $\forall x\in[0,1]$,一个映射¬:[0,1]→[0,1]为 FLcom 中矛盾否定,如果:

$$\neg x=\max(╕x,\sim x) \tag{26}$$

由上述定义,易证 x,╕x,$\sim x$ 具有下列关系和性质:

命题 2. 若$\lambda\geqslant 1/2$,则:

$$x\geqslant\sim x\geqslant ╕x, \text{当且仅当 } x\in(\lambda,1) \tag{27}$$

$$╕x\geqslant\sim x\geqslant x, \text{当且仅当 } x\in[0,1-\lambda) \tag{28}$$

命题 3. 若$\lambda\leqslant 1/2$,则:

$$x\geqslant\sim x\geqslant ╕x, \text{当且仅当 } x\in(1-\lambda,1) \tag{29}$$

$$╕x\geqslant\sim x\geqslant x, \text{当且仅当 } x\in[0,\lambda) \tag{30}$$

上述定义的 FLcom 中的矛盾否定¬、对立否定╕与中介否定~,我们将证明分别是不同的模糊否定.

命题 4. FLcom 中的对立否定╕是一种模糊否定.

证明:对于对立否定╕,因╕(1)=1−1=0,╕(0)=1−0=1,所以满足公式(18).对于 $x,y\in[0,1]$,若 $x\leqslant y$,有╕$(y)=1-y\leqslant$ ╕$(x)=1-x$,所以满足公式(19).因此,根据定义 7,对立否定╕是一种模糊否定.

命题 5. FLcom 中的中介否定~是一种模糊否定.

证明:对于中介否定~,根据定义 9:

① x=1 只有情形(21)或情形(23):

- 若是情形(21),则$\sim 1=\lambda-\dfrac{2\lambda-1}{1-\lambda}(1-\lambda)=1-\lambda$,因$\lambda\in[1/2,1)$,所以当$\lambda$趋于 1 时,有$\sim 1=0$;
- 若是情形(23),则$\sim 1=1-\dfrac{1-2\lambda}{\lambda}(1+\lambda-1)-\lambda=\lambda$,因$\lambda\in(0,1/2]$,所以当$\lambda$趋于 0 时,有$\sim 1=0$;

② x=0 只有情形(22)或情形(24):

- 若是情形(22),则$\sim 0=\lambda-\dfrac{2\lambda-1}{1-\lambda}\times 0=\lambda$,因$\lambda\in[1/2,1)$,所以当$\lambda$趋于 1 时,有$\sim 0=1$;
- 若是情形(24),则$\sim 0=1-\dfrac{1-2\lambda}{\lambda}\times 0+\lambda=1-\lambda$,因$\lambda\in(0,1/2]$,所以当$\lambda$趋于 0 时,有$\sim 0=1$.

由情形①与情形②,中介否定~满足公式(18).若 $x\leqslant y$,根据定义 9,显然有$\sim y\leqslant\sim x$.所以,中介否定~满足公式(18)和公式(19).因此,根据定义 7,中介否定~是一种模糊否定.

命题 6. FLcom 中的矛盾否定¬是一种模糊否定.

证明:根据定义 10,$\neg x=\max\{\text{╕}x,\sim x\}$,由命题 4 和命题 5,╕与~是模糊否定,因此,矛盾否定¬是一种模糊否定.

在 Zadeh 模糊集(模糊逻辑)中,模糊否定(即矛盾否定)¬被定义为$\neg x=1-x$.定义 10 表明,$\neg x$ 在 FLcom 中由对立否定╕x 和中介否定$\sim x$ 共同确定,即,$\neg x=\max(\text{╕}x,\sim x)$.由命题 2 与命题 3 可知:当 $x<1/2$ 时,有╕$x\geqslant\sim x\geqslant x$,所以$\neg x=\max(\text{╕}x,\sim x)=\text{╕}x$,即,对立否定与矛盾否定相同;当 $x>1/2$ 时,有 $x\geqslant\sim x\geqslant\text{╕}x$,所以$\neg x=\max(\text{╕}x,\sim x)=\sim x$,即,中介否定与矛盾否定相同.由定义 8 与定义 9 可知:当 $x=1/2$ 时,有 $x=\neg x=\text{╕}x=\sim x=1/2$,即,矛盾否定、对立否定和中介否定三者相同.因此,FLcom 中的矛盾否定¬、对立否定╕和中介否定~与 Zadeh 模糊否定¬具有如下关系:

命题 7. 在 FLcom 中,x 的矛盾否定$\neg x$、对立否定╕x 和中介否定$\sim x$ 与 Zadeh 模糊否定$\neg x$ 具有如下关系:

- 当 $x<1/2$ 时,FLcom 中 x 的对立否定╕x 与 Zadeh 模糊否定$\neg x$ 相同;
- 当 $x>1/2$ 时,FLcom 中 x 的中介否定$\sim x$ 与 Zadeh 模糊否定$\neg x$ 相同;
- 当 $x=1/2$ 时,FLcom 中 x 的矛盾否定$\neg x$、对立否定╕x、中介否定$\sim x$ 与 Zadeh 模糊否定$\neg x$ 相同.

3 FLcom 的应用

如何将 FLcom 用于对实际中的模糊知识及其不同否定进行区分、表示、推理与计算,我们以 FLcom 处理如下一个模糊决策问题为例.

实例:在现实生活中,个体(人、家庭)是把每月剩余的钱存入银行还是购买股票,投资方案取决于他目前的月收入和银行存款以及决策规则.设个体的月收入为 x 元,银行存款有 y 元,决策规则为:

a) 如果 y 是低存款,则个体将剩余的钱存入银行;

b) 如果 x 是高收入且 y 是高存款,则个体将剩余的钱购买股票;

c) 如果 x 是高收入且 y 是中等存款,则个体将大部分剩余的钱购买股票,少部分存入银行;

d) 如果 x 是中等收入且 y 是中等存款,则个体将大部分剩余的钱存入银行,少部分购买股票.

注:如果 x 是低收入,则视个体每月无剩余的钱.

假设个体 M 每月收入是 5 000 元,存款是 120 000 元,根据上述决策规则,如何确定 M 的投资策略?

3.1 决策规则中的模糊命题及其不同否定的区分与形式表示

在实际生活中,人们关于“高收入(或收入高)”、“低收入(或收入低)”、“高存款(或存款多)”以及“低存款(或存款少)”的认识,其观点受多方面因素影响,其中,地区差异影响最为明显.对此,我们对生活在中国一些地区的人们进行随机调查[15],结果见表 2.

Table 2 People's viewpoints on the high (or low) income and the high (or low) savings in the yangtse delta

表 2 长江三角洲及附近地区人们关于高(低)收入和高(低)存款的观点

观点	省/市	高收入(元/月)	低收入(元/月)	高存款(元)	低存款(元)
1	上海市区	≥15000	≤2000	≥200000	≤100000
2	上海浦东	≥20000	≤2500	≥250000	≤150000
3	上海徐汇	≥10000	≤2000	≥200000	≤80000
2	江苏南京	≥10000	≤1500	≥200000	≤80000
3	江苏无锡	≥12000	≤1200	≥150000	≤100000
4	江苏苏州	≥15000	≤1500	≥150000	≤100000
5	安徽合肥	≥6000	≤1000	≥100000	≤80000
6	安徽阜阳	≥5000	≤1000	≥100000	≤50000
7	安徽黄山	≥4000	≤800	≥100000	≤50000
8	山东济南	≥7000	≤1200	≥150000	≤80000
9	山东烟台	≥6000	≤1000	≥120000	≤50000
10	山东威海	≥10000	≤1500	≥150000	≤80000

表 2 中只列出 10 个地区的调查数据,这些地区分别属于 4 个不同的省/市.我们取同省/市数据的平均值,综合同一个省/市的数据.显然,被调查地区的人数越多,综合数据越准确.为增进综合数据的准确性,我们进一步对每类综合数据各取一个“弹性值”.其中,关于“高收入”的综合数据的弹性值为±500/月,关于“低收入”的综合数据的弹性值为±100/月,关于“高存款”的综合数据的弹性值为±20000/月,关于“低存款”的综合数据的弹性值为±10000/月.如此,我们得到各省的综合数据(见表 3).

Table 3 Integrative data on the high (or low) income and the high (or low) savings in each province/city

表 3 各省/市关于高(低)收入和高(低)存款的综合数据

省/市	高收入(±500)	低收入(±100)	高存款(±20000)	低存款(±10000)
上海	≥14400	≤2000	≥210000	≤100000
江苏	≥11000	≤1340	≥160000	≤82000
安徽	≥5000	≤920	≥100000	≤56000
山东	≥7000	≤1100	≥124000	≤68000

显然,在决策规则 a)~决策规则 d)中:

- “y 是低存款”、“y 是高存款”、“y 是中等存款”、“x 是高收入”、“x 是中等收入”以及“x 是低收入”都是不同的模糊命题,并且决策规则 b)~决策规则 d)中的前提是它们中的一些模糊命题组成的复合模糊命题.其中,“低存款”、“高存款”、“存款中等”、“高收入”、“收入中等”以及“低收入”是这些模糊命题中的不同模糊集.

特别需要指出的是:

(1) 基于 FLCOM,这些模糊命题还具有如下关系:

- 模糊命题“y 是低存款”是模糊命题“y 是高存款”的对立否定,模糊命题“y 是中等存款”是对立模糊命题“y 是高存款”和“y 是低存款”的中介否定;
- 模糊命题“x 是低收入”是模糊命题“x 是高收入”的对立否定,模糊命题“x 是中等收入”是对立模糊命题“x 是高收入”和“x 是低收入”的中介否定.

(2) 现有模糊逻辑理论处理这些模糊命题及其关系存在局限性:

- 如果用现有的模糊逻辑理论与方法处理这些模糊命题及其不同否定、以及否定之间的关系,由于它们没有区分矛盾否定、对立否定以及中介否定,处理过程将是更加复杂甚至是困难的.

基于 FLCOM,上述模糊命题我们可形式表示如下:

- $MUCHincome(x)$:表示模糊命题“x 是高收入”,$MUCHsavings(y)$:表示模糊命题“y 是高存款”;
- $\urcorner MUCHincome(x)$:表示模糊命题“x 是低收入”,$\urcorner MUCHsavings(y)$:表示模糊命题“y 是低存款”;

- $\sim MUCHincome(x)$:表示模糊命题“x 是中等收入”,$\sim MUCHsavings(y)$:表示模糊命题“y 是中等存款”.

其中,

- $\neg MUCHincome(x)$和$\sim MUCHincome(x)$分别是 $MUCHincome(x)$的对立否定和中介否定;
- $\neg MUCHsavings(y)$和$\sim MUCHsavings(y)$分别是 $MUCHsavings(y)$的对立否定与中介否定.

对于决策规则 a)~决策规则 d)中的结论,我们可形式表示如下:

- $INVESTMENT(stocks)$:表示个体将每月剩余的钱买股票;
- $INVESTMENT(savings)$:表示个体将每月剩余的钱存入银行;
- $MORE(savings,stocks)$:表示个体存入银行的钱超过买股票.

至此,实例中的决策规则 a)~决策规则 d)可形式表示如下:

a) $\neg MUCHsavings(y)\rightarrow INVESTMENT(savings)$;
b) $MUCHincome(x)\wedge MUCHsavings(y)\rightarrow INVESTMENT(stocks)$;
c) $MUCHincome(x)\wedge\sim MUCHsavings(y)\rightarrow INVESTMENT(stocks)\wedge INVESTMENT(savings)\wedge MORE(stocks,savings))$;
d) $\sim MUCHincome(x)\wedge\sim MUCHsavings(y)\rightarrow INVESTMENT(stocks)\wedge INVESTMENT(savings)\wedge MORE(savings,stocks))$.

3.2 决策规则中模糊命题的真值度量

在实例中,如何在决策规则 a)~决策规则 d)下确定个体 M 的投资策略?由于决策规则 a)~决策规则 d)的前提由上述模糊命题构成,因而,确定这些模糊命题的真值是投资决策的基础.根据上述λ-赋值定义(定义 11)以及表 3,我们给出一种关于决策规则 a)~决策规则 d)中模糊命题的真值度量方法如下:

由表 3 可以看出,综合数据具有以下特征:对于个体的月收入数据 a 来说,如果 a 在上海属于高收入范围(即 $a\geqslant 14400$),则 a 在其他地区肯定也属于高收入范围;如果 a 在安徽属于低收入范围(即 $a\leqslant 920$),则 a 在其他地区也肯定属于低收入范围;若 a 是个体的一个存款数据,同样具有如此特征.根据数据的这一特征,我们采用一维欧式距离 $d(x,y)=|x-y|$以及“距离比率函数”定义[20−22],在定义 4(λ-赋值)基础上,定义模糊命题“x 是高收入”和“y 是高存款”的真值函数如下:

定义 11. 对于任意的月收入数据 x 和存款数据 y,在λ-赋值∂下,模糊命题“x 是高收入”和“y 是高存款”的真值$\partial(MUCHincome(x))$与$\partial(MUCHsavings(y))$为

$$\partial(MUCHincome(x))=\begin{cases}0, & \text{当}x\leqslant\alpha_F+\varepsilon_F\\ \dfrac{d(x,\alpha_F+\varepsilon_F)}{d(\alpha_F+\varepsilon_F,\alpha_T-\varepsilon_T)}, & \text{当}\alpha_F+\varepsilon_F<x<\alpha_T-\varepsilon_T\\ 1, & \text{当}x\geqslant\alpha_T-\varepsilon_T\end{cases}\tag{31}$$

$$\partial(MUCHsavings(y))=\begin{cases}0, & \text{当}y\leqslant\alpha_F+\varepsilon_F\\ \dfrac{d(y,\alpha_F+\varepsilon_F)}{d(\alpha_F+\varepsilon_F,\alpha_T-\varepsilon_T)}, & \text{当}\alpha_F+\varepsilon_F<y<\alpha_T-\varepsilon_T\\ 1, & \text{当}y\geqslant\alpha_T-\varepsilon_T\end{cases}\tag{32}$$

其中,α_T 为表 3 中关于“高收入”(或“高存款”)的最大值,ε_T 为其弹性值;α_F 为“低收入”(或“低存款”)的最小值,ε_F 为其弹性值.

基于定义 11,由于模糊命题“x 是低收入”是“x 是高收入”的对立否定,根据定义 11,模糊命题“x 是低收入”的真值$\partial(\neg MUCHincome(x))$为

$$\partial(\neg MUCHincome(x))=1-\partial(MUCHincome(x))\tag{33}$$

同样地,由于模糊命题“y 是低存款”是“y 是高存款”的对立否定,根据定义 11,模糊命题“y 是低存款”的真值$\partial(\neg MUCHsavings(y))$为

$$\partial(\neg MUCHsavings(y))=1-\partial(MUCHsavings(y))\tag{34}$$

由于模糊命题"x 是中等收入"、"y 是中等存款"分别是模糊命题"x 是高收入"和"y 是高存款"的中介否定,根据定义 11,我们可由$\partial(MUCHincome(x))$与$\partial(MUCHsavings(y))$计算得到模糊命题"x 是中等收入"的真值$\partial(\sim MUCHincome(x))$以及"$y$ 是中等存款"的真值$\partial(\sim MUCHsavings(y))$.

3.3 决策规则中模糊命题的真值范围的阈值及意义

由定义 4(λ-赋值)可知,$\lambda(\in(0,1))$是在 FLCOM 中为了确定模糊公式 A 的中介否定$\sim A$ 的真值而引入的一个参变量.λ的大小既反映了 A 的真值范围的大小,也反映了中介否定$\sim A$ 的真值范围以及对立否定$\urcorner A$ 的真值范围的大小.表明 FLCOM 中模糊公式的真值范围与λ值相关,λ是 FLCOM 中模糊公式的真值的一个"阈值".因此,对于一个收入(或存款)数据,要确定决策规则中不同模糊命题的真值范围,需要确定其相关的阈值.对此,我们给出一种阈值的确定方法如下:

在表 3 中,对于江苏省的收入数据来说,11 000 是关于模糊集"高收入"的最小(下限)收入数据,1 340 是关于模糊集"低收入"的最大(上限)收入数据.因此,对于在江苏省的任何收入数据 $a_1(a_1\geqslant 11000)$,模糊命题"x 是高收入"在 x 为 a_1 时的真值$\partial(MUCHincome(a_1))$都应有$\partial(MUCHincome(a_1))=1$;对于在江苏省的任何收入数据 $a_2(a_2\leqslant 1340)$,模糊命题"x 是低收入"在 x 为 a_2 时的真值$\partial(\urcorner MUCHincome(a_2))$都应有$\partial(\urcorner MUCHincome(a_2))=1$.然而,根据公式(31)与公式(33),有:

- $\partial(MUCHincome(11000))=\dfrac{d(11000,1020)}{d(1020,13900)}=0.775\neq 1$;
- $\partial(\urcorner MUCHincome(1340))=1-\partial(MUCHincome(1340))=0.975\neq 1$

  (因$\partial(MUCHincome(1340))=\dfrac{d(1340,1020)}{d(1020,13900)}=0.025$).

之所以$\partial(MUCHincome(11000))\neq 1$和$\partial(\urcorner MUCHincome(1340))\neq 1$,主要是由于数据不足以及数据失真等原因导致的.为了排除这一问题,我们将$\partial(MUCHincome(11000))$和$\partial(\urcorner MUCHincome(1340))$的平均值:

$$1/2(\partial(MUCHincome(11000))+\partial(\urcorner MUCHincome(1340)))=0.875$$

作为一个平衡量,其代表了衡量江苏省的任意一个收入数据 x 是否属于高收入范围的阈值.因而,我们将这一平衡量作为反映对于江苏省的模糊命题"x 是高收入"的真值$\partial(MUCHincome(x))$的范围的阈值λ.

对于表 3 中其他省/市的任意一个收入数据 x,同样方法我们可确定对于各省/市的模糊命题"x 是高收入"的真值$\partial(MUCHincome(x))$的范围的阈值λ.对于表 3 中各省/市的任意一个存款数据 y,同样方法我们可确定模糊命题"y 是高存款"的真值$\partial(MUCHsavings(y))$的范围的阈值λ(见表 4).

Table 4 Threshold λ of the truth value ranges of fuzzy propositions "*x is high income*" and "*y is high savings*"

表 4 对于任意收入(或存款)数据,模糊命题"x 是高收入"与"y 是高存款"的真值范围的阈值λ

模糊命题 \ 省/市	江苏	上海	安徽	山东
"x 是高收入"	0.875	0.962	0.655	0.729
"y 是高存款"	0.815	0.863	0.637	0.726

(I) 决策规则中模糊命题"x 是高收入"与"y 是高存款"的真值范围的阈值及意义

在表 4 中,只是几个省/市的关于模糊命题"x 是高收入"与"y 是高存款"的真值范围的阈值λ.为了得到具有一般意义的、决策规则中模糊命题"x 是高收入"与"y 是高存款"的真值范围的阈值,我们对表 4 中各省/市关于同一个模糊命题的真值的阈值取平均值,分别作为决策规则中模糊命题"x 是高收入"与"y 是高存款"的真值范围的阈值λ(见表 5).

Table 5 Threshold λ of the truth value ranges of "*x is high income*" and "*y is high savings*" in Decision Rules

表 5 决策规则中模糊命题"x 是高收入"与"y 是高存款"的真值范围的阈值λ

模糊命题	"x 是高收入"	"y 是高存款"
阈值λ	0.805	0.760

阈值意义:对于任意一个收入数据 x,若模糊命题"x 是高收入"的真值$\partial(MUCHincome(x))\geqslant\lambda$,则表明 x 属于高收入范围;若$\partial(MUCHincome(x))\leqslant 1-\lambda$,则表明 x 属于低收入范围.对于任意一个存款数据 y,如果模糊命题"y 是高存款"的真值$\partial(MUCHsavings(y))\geqslant\lambda$,则表明 y 属于高存款范围;若$\partial(MUCHsavings(y))\leqslant 1-\lambda$,则表明 y 属于低存款范围.阈值意义如图 7 所示.

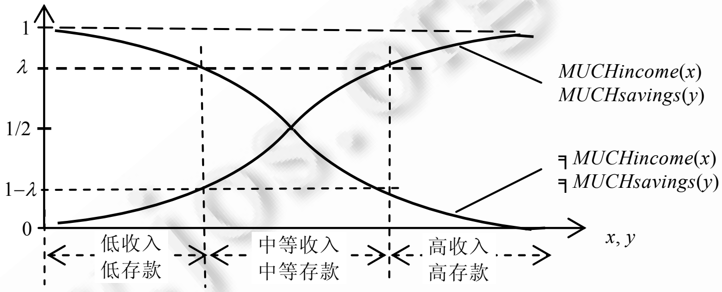


Fig.7 The meaning of the threshold λ of the truth-value range of fuzzy proposition in Decision Rules

图 7 决策规则中模糊命题的真值范围的阈值及其意义

(II) 决策规则中模糊命题"x 是低收入"与"y 是低存款"的真值范围的阈值及意义

因为模糊命题"x 是低收入"为"x 是高收入"的对立否定,模糊命题"y 是低存款"为"y 是高存款"的对立否定,根据公式(33)和公式(34),"x 是低收入"的真值$\partial(\text{╕}MUCHincome(x))$和"$y$ 是低存款"的真值$\partial(\text{╕}MUCHsavings(y))$:

$$\partial(\text{╕}MUCHincome(x))=1-\partial(MUCHincome(x)),\partial(\text{╕}MUCHsavings(y))=1-\partial(MUCHsavings(y)).$$

根据情形(I)中阈值的意义,若$\partial(MUCHincome(x))\leqslant 1-\lambda$,$\partial(MUCHsavings(y))\leqslant 1-\lambda$,则表明 x 属于低收入范围、y 属于低存款范围,因而得到结果:

- 当$\partial(\text{╕}MUCHincome(x))\geqslant\lambda$时,表明 x 属于低收入范围;
- 当$\partial(\text{╕}MUCHsavings(y))\geqslant\lambda$时,表明 y 属于低存款范围.

由此,我们得到决策规则中模糊命题"x 是低收入"的真值$\partial(\text{╕}MUCHincome(x))$的范围的阈值,以及模糊命题"$y$ 是低存款"的真值$\partial(\text{╕}MUCHsavings(y))$的范围的阈值$\lambda$(见表 6).

Table 6 Threshold λ of the truth value ranges of "*x is low income*" and "*y is low savings*" in Decision Rules

表 6 决策规则中模糊命题"x 是低收入"和"y 是低存款"的真值范围的阈值λ

模糊命题	"x 是低收入"	"y 是低存款"
阈值λ	0.805	0.760

阈值意义:对于任意一个收入数据x,若模糊命题"x 是低收入"的真值$\partial(\text{╕}MUCHincome(x))\geqslant\lambda$,则表明$x$属于低收入范围;对于任意一个存款数据$y$,若模糊命题"$y$ 是低存款"的真值$\partial(\text{╕}MUCHsavings(y))\geqslant\lambda$,则表明$y$属于低存款范围.阈值意义如图 7 所示.

(III) 决策规则中模糊命题"x 是中等收入"和"y 是中等存款"的真值范围的阈值及意义

表 5 表明,模糊命题"x 是高收入"的真值$\partial(MUCHincome(x))$的阈值λ=0.805>1/2,模糊命题"y 是高存款"的真值$\partial(MUCHsavings(y))$的阈值λ=0.760>1/2.根据命题 1,模糊命题"x 是中等收入"的真值$\partial(\sim MUCHincome(x))$与模糊命题"$y$ 是中等存款"的真值$\partial(\sim MUCHsavings(y))$满足下式:

$$\lambda\geqslant\partial(\sim MUCHincome(x))\geqslant 1-\lambda,\lambda\geqslant\partial(\sim MUCHincome(y))\geqslant 1-\lambda.$$

由此我们得到:决策规则中模糊命题"x 是中等收入"的真值$\partial(\sim MUCHincome(x))$的范围的阈值和模糊命题"$y$ 是中等存款"的真值$\partial(\sim MUCHsavings(y))$的范围的阈值 $1-\lambda$(见表 7).

阈值意义:对于任意一个收入数据 x,模糊命题"x 是中等收入"的真值$\partial(\sim MUCHincome(x))\geqslant 1-\lambda$,则表明 x 属于中等收入范围;对于任意一个存款数据 y,若模糊命题"y 是中等存款"的真值$\partial(\sim MUCHsavings(y))\geqslant 1-\lambda$,则表明 y 属于中等存款范围.阈值意义如图 7 所示.

Table 7 Threshold $1-\lambda$ of the truth value ranges of "*x is moderate income*" and "*y is moderate savings*" in Decision Rules

表 7 决策规则中模糊命题"x 是中等收入"和"y 是中等存款"的真值范围的阈值 $1-\lambda$

模糊命题	"x 是中等收入"	"y 是中等存款"
阈值 $1-\lambda$	0.195	0.240

3.4 实例的推理决策

在上述实例中,决策规则 a)~决策规则 d)是一种模糊推理.根据决策规则 a)~决策规则 d),如何确定实例中个体 M 的投资策略?对此,我们采用模糊产生式规则进行讨论.模糊产生式规则的一般形式[8]如下:

$$P_1,P_2,\ldots,P_m\rightarrow Q|\langle bd,(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\rangle.$$

其中,$P_i(i=1,2,\ldots,m)$是模糊命题,表示规则的前提或条件;Q 表示推理结论(或行动);$bd(0\leqslant bd\leqslant 1)$表示规则的信任度(belief degree of rule);$\tau_i(0\leqslant\tau_i\leqslant 1,i=1,2,\ldots,m)$表示 P_i 的真值$\partial(P_i)$的范围的阈值.

模糊产生式规则的意义如下:

"若每个$\partial(P_i)\geqslant\tau_i$,则以 bd 的信任度由 $P_1,P_2,\ldots,P_m$ 可推出(或执行)Q" (35)

假设规则的置信度 bd=0.9(可通过随机调查统计或领域专家决定等方法确定).关于实例中个体 M 的投资策略,我们讨论如下:

在实例中,因个体 M 的月收入是 5 000(元)、存款有 120 000(元),根据公式(31)与公式(32),模糊命题"x 是高收入"在 x 为 5 000 时的真值$\partial(MUCHincome(5000))$以及模糊命题"$y$ 是高存款"在 y 为 120 000 时的真值$\partial(MUCHsavings(120000))$:

$$\partial(MUCHincome(5000))=\frac{d(5000,1020)}{d(1020,13900)}=0.309,\partial(MUCHsavings(120000))=\frac{d(120000,66000)}{d(66000,190000)}=0.435.$$

根据公式(33)与公式(34),模糊命题"x 是低收入"在 x 为 5 000 时的真值$\partial(\urcorner MUCHincome(5000))$以及模糊命题"$y$ 是低存款"在 y 为 120 000 时的真值$\partial(\urcorner MUCHsavings(120000))$:

- $\partial(\urcorner MUCHincome(5000))=1-\partial(MUCHincome(5000))=0.691$;
- $\partial(\urcorner MUCHsavings(120000))=1-\partial(MUCHsavings(120000))=0.565$.

(1) 对于决策规则 a):因决策规则 a)的前提为模糊命题"y 是低存款",依表 6,它的真值$\partial(\urcorner MUCHsavings(y))$的范围的阈值为 0.760,所以决策规则 a)可形式表示为

$$\urcorner MUCHsavings(y)\rightarrow INVESTMENT(savings)|\langle 0.9,(0.760)\rangle.$$

因$\partial(\urcorner MUCHsavings(120000))=0.565<0.760$,表明$\partial(\urcorner MUCHsavings(120000))$不满足公式(35),因此,决策规则 a)不可采纳.

(2) 对于决策规则 b):因决策规则 b)的前提为模糊命题"x 是高收入且 y 是高存款",是由原子模糊命题"x 是高收入"与"y 是高存款"组成的复合模糊命题,根据表 5,它们的真值$\partial(MUCHincome(x))$与$\partial(MUCHsavings(y))$的范围的阈值分别为 0.805 和 0.760.从而,决策规则 b)可形式表示为

$$MUCHincome(x)\wedge MUCHsavings(y)\rightarrow INVESTMENT(stocks)|\langle 0.9,(0.805,0.760)\rangle.$$

因$\partial(MUCHincome(5000))=0.309<0.805$ 且$\partial(MUCHsavings(120000))=0.435<0.760$,故$\partial(MUCHincome(5000)$与$\partial(MUCHsavings(120000))$不满足公式(35),因此,决策规则 b)不可采纳.

(3) 对于决策规则 c):由于决策规则 c)的前提为模糊命题“x 是高收入且 y 是中等存款”,是由原子模糊命题“x 是高收入”与“y 是中等存款”组成的复合模糊命题,根据表 5 和表 7,它们的真值$\partial(MUCHincome(x))$与$\partial(\sim MUCHsavings(y))$的阈值分别为 0.805 和 0.240,从而,决策规则 c)可形式表示为

$$MUCHincome(x)\wedge\sim MUCHsavings(y)\rightarrow INVESTMENT(stocks)\wedge INVESTMENT(savings)\wedge MORE(stocks,savings)|\langle 0.9,(0.805,0.240)\rangle.$$

因$\partial(MUCHincome(5000))=0.309<0.805$,表明$\partial(MUCHincome(5000))$不满足公式(35),因此,决策规则 c)不可采纳.

(4) 对于决策规则 d):因决策规则 d)的前提为模糊命题“x 是中等收入且 y 是中等存款”,是由原子模糊命题“x 是中等收入”与“y 是中等存款”组成的复合模糊命题,根据表 7,它们的真值$\partial(\sim MUCHincome(x))$与$\partial(\sim MUCHsavings(y))$的阈值分别为 0.195 与 0.240,从而,决策规则 d)可形式表示为

$$\sim MUCHincome(x)\wedge\sim MUCHsavings(y)\rightarrow INVESTMENT(stocks)\wedge INVESTMENT(savings)\wedge MORE(savings,stocks)|\langle 0.9,(0.195,0.240)\rangle.$$

(i) 因为在表 5 中模糊命题“x 是高收入”的真值$\partial(MUCHincome(x))$的范围的阈值$\lambda=0.805>1/2$,而 $1-\lambda<\partial(MUCHincome(5000))=0.309<\lambda$,因此根据公式(5),有:

$$\partial(\sim MUCHincome(5000))=\partial(MUCHincome(5000))=0.309>0.195;$$

(ii) 同理,因为在表 5 中模糊命题“y 是高存款”的真值$\partial(MUCHsavings(y))$的阈值$\lambda=0.760>1/2$,而 $1-\lambda<\partial(MUCHsavings(120000))=0.435<\lambda$,因此根据公式(5),有:

$$\partial(\sim MUCHsavings(120000))=\partial(MUCHsavings(120000))=0.435>0.240.$$

由情形(i)和情形(ii),表明$\partial(\sim MUCHincome(5000))$和$\partial(\sim MUCHsavings(120000))$满足公式(35),因此,决策规则 d)可采纳.

至此表明,上述实例中,月收入为 5 000 元、存款有 120 000 元的个体 M 可采用决策规则 d)作为投资策略.

主要结论:

(1) 对于模糊知识中的否定,从概念层面上区分了模糊知识中存在 3 种不同的否定关系,即,矛盾否定关系 CFC、对立否定关系 OFC 以及中介否定关系 MFC;

(2) 为了建立起能够完全描述 3 种不同否定关系与规律的逻辑基础,定义了一种区分矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊命题逻辑形式系统 FLcom,研究了 FLcom 的基本运算和性质以及具有的特征,给出了 FLcom 的一种语义解释并证明了可靠性定理;

(3) 为了表明 FLcom 处理实际中的模糊信息及其不同否定的适用性,本文研究了 FLcom 的应用.具体对于一个模糊决策实例,基于 FLcom,讨论了实例中的模糊推理与决策,从而表明,FLcom 用来处理具有模糊性并且存在不同否定的实际问题是有效的.

致谢 非常感谢审稿人对本文提出了良好的建议与意见.

References:

[1] Zadeh LA. Fuzzy sets. Information and Control, 1965,8(3):338−353. [doi: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X]
[2] Atanassov KT. On the concept of intuitionistic fuzzy sets. STUDFUZZ, 2012,283:1−16.
[3] Pawlak Z. Rough sets. Int'l Journal of Computer and Information Sciences, 1982,11:341−356. [doi: 10.1007/BF01001956]
[4] Pelletier FJ. Metamathematics of fuzzy logic. The Bulletin of Symbolic, 2000,6(3):342−346. [doi: 10.2307/421060]
[5] Wang GJ. A formal deduction system for fuzzy proposition. Chinese Science Bulletin, 1997,42(10):1041−1045 (in Chinese with English abstract).
[6] Wagner G. Web rules need two kinds of negation. In: LNCS 2901. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. 33−50. [DOI: 10.1007/978-3-540-24572-8_3]
[7] Analyti A, Antoniou G, Damásio CV, Wagner G. Negation and negative information in the W3C resource description framework. Annals of Mathematics, Computing & Teleinformatics, 2004,1(2):25−34.

[8] Dung PM, Mancarella P. Production systems need negation as failure. IEEE Trans. on Knowledge and Data Engineering, 2002, 14(2):336−353. [doi: 10.1109/69.991720]

[9] Ferré S. Negation, opposition, and possibility in logical concept analysis. Lecture Notes in Artificial Intelligence 3874. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2006. 130−145. [doi: 10.1007/11671404_9]

[10] Kaneiwa K. Negations in description logic with contraries, contradictories, and subcontraries. New Generation Computing, 2007, 25(4):443−468. [doi: 10.1007/s00354-007-0028-2]

[11] Pan ZH, Zhu WJ. A new cognition and processing on contradictory knowledge. In: Proc. of the IEEE Int'l Conf. on Machine Learning and Cybernetics, Vol.3. Washington: IEEE-Computer Society, 2006. 1532−1537. [doi: 10.1109/ICMLC.2006.258823]

[12] Pan ZH, Zhang SL. Differentiation and processing on contradictory relation and opposite relation in knowledge. In: Proc. of the IEEE 4th Int'l Conf. on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD), Vol.4. Washington: IEEE-Computer Society, 2007. 334−338. [doi: 10.1109/FSKD.2007.254]

[13] Pan ZH, Zhang SL. Five kinds of contradictory relations and opposite relations in inconsistent knowledge. In: Proc. of the IEEE 4th Int'l Conf. on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD), Vol.4. Washington: IEEE-Computer Society, 2007. 761−764. [doi: 10.1109/FSKD.2007.292]

[14] Pan ZH. A logic description on different negation relation in knowledge. In: LNCS 5227. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 815−823. [doi: 10.1007/978-3-540-85984-0_98]

[15] Pan ZH, Wang C, Zhang LJ. Three kinds of negations of fuzzy knowledge and applications to decision making in financial investment. In: Lecture Notes in Artificial Intelligence 6422. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. 391−401. [doi: 10.1007/978-3-642-16732-4_42]

[16] Pan ZH. Fuzzy set with three kinds of negations in fuzzy knowledge processing. In: Proc. of the 2010 Int'l Conf. on Machine Learning and Cybernetics, Vol.5. Washington: IEEE-Computer Society, 2010. 2730−2735. [doi: 10.1109/ICMLC.2010.5580945]

[17] Pan ZH. Fuzzy set with three kinds of negation and its applications in fuzzy decision making. In: Lecture Notes in Artificial Intelligence 7002. 2011. 533−542. [doi: 10.1007/978-3-642-23881-9_69]

[18] Pan ZH. Three kinds of negation of fuzzy knowledge and their base of set. Chinese Journal of Computers, 2012,35(7):1421−1428 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3724/SP.J.1016.2012.01421]

[19] Mas M, Monserrat M, Torrens J. Modus ponens and modus tollens in discrete implications. Int'l Journal of Approximate Reasoning, 2008,49:422−435. [doi: 10.1016/j.ijar.2008.04.002]

[20] Hong L, Xiao XA, Zhu WJ. Measure of medium scale and its application (I). Chinese Journal of Computers, 2006,29(12): 2186−2193 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3321/j.issn.0254-4164.2006.12.016]

[21] Hong L, Xiao XA, Zhu WJ. Measure of medium scale and its application (II). Chinese Journal of Computers, 2007,30(9): 1551−1558 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3321/j.issn.0254-4164.2007.09.008]

[22] Zhang LZ, Pan ZH, Fuzzy comprehensive evaluation based on measure of medium truth scale. In: Proc. of the 2009 Int'l Conf. on Artificial Intelligence and Computational Intelligence, Vol.2. Washington: IEEE-Computer Society, 2009. 83−87. [doi: 10.1109/AICI.2009.400]

附中文参考文献:

[5] 王国俊.模糊命题的一种形式演绎系统.科学通报,1997,42(10):1041−1045.

[18] 潘正华.模糊知识的3种否定及其集合基础.计算机学报,2012,35(7):1421−1428. [doi: 10.3724/SP.J.1016.2012.01421]

[20] 洪龙,肖奚安,朱梧槚.中介真值程度的度量及其应用(I).计算机学报,2006,29(12):2186−2193. [doi: 10.3321/j.issn.0254-4164.2006.12.016]

[21] 洪龙,肖奚安,朱梧槚.中介真值程度的度量及其应用(II).计算机学报,2007,30(9):1551−1558. [doi: 10.3321/j.issn.0254-4164.2007.09.008]

潘正华(1957－),男,贵州兴义人,教授,CCF高级会员,主要研究领域为非经典逻辑理论,知识表示知识与知识推理.

E-mail: panzh@jiangnan.edu.cn