

二维黎曼流形的 Voronoi 图生成算法*

程丹¹⁺, 杨钦¹, 李吉刚¹, 蔡强²

¹(北京航空航天大学 计算机学院, 北京 100191)

²(北京工商大学 计算机学院, 北京 100048)

Algorithm for Creating Voronoi Diagrams for Two-Dimensional Riemannian Manifolds

CHENG Dan¹⁺, YANG Qin¹, LI Ji-Gang¹, CAI Qiang²

¹(School of Computer Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

²(College of Computer Science and Engineering, Beijing Technology & Business University, Beijing 100048, China)

+ Corresponding author: E-mail: chengdan@cse.buaa.edu.cn

Cheng D, Yang Q, Li JG, Cai Q. Algorithm for creating Voronoi diagrams for two-dimensional Riemannian manifolds. Journal of Software, 2009,20(9):2407-2416. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3471.htm>

Abstract: This paper describes objects by Riemannian manifolds and creates Voronoi diagrams based on charts. Difficulties in studying Voronoi diagrams for Riemannian manifolds are discussed. A theorem in existence is given, which demonstrates the present condition of Voronoi diagrams for Riemannian manifolds in a chart. According to the idea and theorem, this paper describes the algorithm of creating charts for two-dimensional Riemannian manifolds and presents the definitions of transition and blend functions. Finally, the algorithm of creating Voronoi diagrams based on charts is given, and some examples are provided.

Key words: two-dimensional Riemannian manifold; chart; Voronoi diagram; Delaunay triangulation; existence

摘要: 提出采用黎曼流形描述研究对象和基于坐标卡生成 Voronoi 图的算法思路. 讨论了黎曼流形上研究 Voronoi 图的难点, 并给出了存在定理, 该定理说明了坐标卡上 Voronoi 图的存在条件. 按照算法思路和存在定理, 详细描述了二维黎曼流形上创建坐标卡的算法, 并给出流形上转换函数和混合函数的定义方法. 最后描述了基于坐标卡生成 Voronoi 图的算法, 并给出了具体实例.

关键词: 二维黎曼流形; 坐标卡; Voronoi 图; Delaunay 三角化; 存在性

中图法分类号: TP391 **文献标识码:** A

Voronoi 图在数值分析和空间分析等领域具有十分重要的作用. 对于复杂的研究对象, 欧氏空间中一个坐标系难以分析问题, 如油藏数值模拟中复杂断裂的地层面. 因此, 采用黎曼流形描述复杂对象成为解决问题的最好途径. 随之而来, 如何生成黎曼流形的 Voronoi 图成为工程应用的主要问题. 二维黎曼流形的 Voronoi 图生成方法研究在近 10 年间取得了重要进展, 而高维黎曼流形的 Voronoi 图生成方法却很少. 二维黎曼流形 Voronoi 图的生成算法主要将黎曼流形整体映射到参数空间, 并在研究区域内指定黎曼度量, 然后在参数空间中按照给定的黎曼度量生成 Delaunay 三角化(通过对偶得到 Voronoi 图)或 Voronoi 图, 其要解决的核心问题就是计算研究区域

* Supported by the Beijing Municipal Natural Science Foundation of China under Grant No.4062010 (北京市自然科学基金)

Received 2008-03-01; Accepted 2008-10-07; Published online 2009-01-04

的测地距离.

Borouchaki^[1],Jurczyk^[2]和 Zhao^[3]给出了由黎曼度量控制的参数空间的 Delaunay 三角化算法,该算法是 Delaunay 三角化增量(空洞)算法在黎曼空间的扩展.Borouchaki^[4]则在指定的黎曼度量下,采用网格前沿法在参数空间中生成 Delaunay 三角网格.Du^[5]给出了在指定的黎曼度量下,生成重心 Voronoi 图和各项异性 Delaunay 三角化的迭代算法,文中采用合理简化的方向距离(directional distance)计算测地距离.由于黎曼度量可以人为指定,所以这类算法经常用于生成各向异性网格.在参数空间生成网格避免了黎曼流形上计算的复杂性,但是,当黎曼流形整体到参数空间的映射不存在时,该类方法则不适用.例如,多值和多亏格的复杂黎曼流形.Kunze^[6]采用分治的方法生成 Voronoi 图,主要解决中轴如何用数值方法解出.此方法只能计算具有单一解析式的参数曲面,不能直接用在初始数据为离散网格或离散点的情况,并且对于需要多个解析式描述的复杂黎曼流形也不适用.以上文献在生成网格时,基本上都只在参数空间中用到黎曼度量,而没有运用流形的基本概念,因此不能处理多亏格、多值的复杂黎曼流形.本文算法将从黎曼流形的观点出发,采用坐标卡、转换函数和混合函数等工具,研究黎曼流形并生成 Voronoi 图.

坐标卡是描述黎曼流形的基本工具,当复杂的黎曼流形与欧氏空间不存在统一映射时,坐标卡能够将黎曼流形分解,并在黎曼流形局部与欧氏空间之间建立光滑映射.因此,采用坐标卡研究黎曼流形的 Voronoi 图具有很多优势:① 坐标卡定义了黎曼流形局部与欧氏空间的光滑映射,使复杂的流形问题可以借助欧氏空间来解决;② 黎曼流形的所有坐标卡之间具有连接覆盖关系,流形上任意曲线的一个端点可以通过一系列坐标卡找到另一个端点,这样可以处理任意亏格的黎曼流形;③ 坐标卡之间的光滑转换函数和混合函数可以将黎曼流形的局部性质拓展到整个流形上,以便研究黎曼流形的全局问题.例如,计算流形上一条大范围的测地线长度或大范围的面积.因此,本文算法的思路是采用黎曼流形的观点来描述研究对象,根据初始数据建立研究对象的坐标卡,并在坐标卡的基础上生成 Delaunay 三角网格,从而生成 Delaunay 三角网格的对偶 Voronoi 图.

首先介绍黎曼流形和黎曼流形上网格剖分的基本概念,然后,给出坐标卡上 Voronoi 图存在的条件,该条件是本文建立坐标卡算法的基础.最后详细描述二维黎曼流形的 Voronoi 生成算法,该算法包括两部分内容:一是根据初始模型数据建立坐标卡及流形函数,二是在坐标卡和流形函数的基础上,生成初始模型的 Voronoi 图.

1 基础知识

1.1 微分流形基本概念

定义 1. 设 M 是一个非空的 Hausdorff 空间,如果对于每一点 $p \in M$,都存在 p 点的开邻域 $U \subset M$ 以及从 U 到 n 维欧氏空间 R^n 的某个开集上的同胚 $\varphi: U \rightarrow R^n$,则称 M 为一个 n 维拓扑流形,其中 (U, φ) 称为 M 的一个坐标卡.

定义 2. 设 M 是一个拓扑流形, $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in I\}$ 是由 M 的若干坐标卡构成的集合, I 为指标集.如果 A 满足下列 3 个条件,则称 (M, A) 是一个 n 维 C^r 微分流形:

- (1) $\{U_\alpha; \alpha \in I\}$ 是 M 的一个开覆盖;
- (2) $\forall \alpha, \beta \in I, (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 与 (U_β, φ_β) 是 C^r 相关的;
- (3) A 是极大的;即对于 M 的任意一个坐标卡 (U, φ) , 如果它和 A 中的每一个成员都是 C^r 相关的,则它一定属于 A .

设 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和 (U_β, φ_β) 是流形 M 上的两个坐标卡,如果 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和 (U_β, φ_β) 重叠,便会形成一个重叠区域 $U_{\alpha\beta}$,如图 1 所示, $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, 映射 φ_α 和 φ_β 将区域 $U_{\alpha\beta}$ 分别映射到各自的欧氏空间中,分别记作 $u_{\alpha\beta}$ 和 $u_{\beta\alpha}$, 即 $u_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$, $u_{\beta\alpha} = \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$, 则转换函数 $\Psi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是从 $u_{\alpha\beta}$ 到 $u_{\beta\alpha}$ 的映射.转换函数将坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和 (U_β, φ_β) 的重叠部分在欧氏空间的区域黏合起来.

设 p 是 n 维流形 M 上的一点, $B'_\alpha: \alpha \rightarrow R^n$ 是坐标卡 α 的混合函数, $E_\alpha: \alpha \rightarrow R^n$ 是坐标卡 α 的嵌入函数.那么, M 的混合函数和嵌入函数为

$$B_\alpha(p) = \frac{B'_\alpha(\varphi_\alpha(p))}{\sum_{\alpha \in A} B'_\alpha(\varphi_\alpha(p))} \tag{1}$$

$$E(p) = \sum_{\alpha \in A} B_\alpha(p) E_\alpha(\varphi_\alpha(p)) \tag{2}$$

如果坐标卡 α 不包含点 p ,则定义 $B'_\alpha=0$.除以混合函数的和是一个归一化的步骤,确保混合函数构成一个单位分解.同时,为了确保混合函数的分母不为 0,我们要求每个坐标卡上的混合函数不为 0.混合函数是将流形的局部性质和整体性质联系起来的一个有力工具.

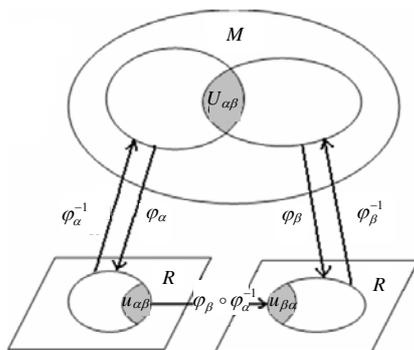


Fig.1 Transition functions between two charts
图 1 两个坐标卡的转换函数

1.2 黎曼度量

定义 3. 设 M 是一个 n 维光滑流形, g 是 M 上一个光滑的二阶协变张量场,如果 g 是对称且正定的,即对于每一点 $p \in M, g(p)$ 是切空间 $T_p M$ 上一个对称、正定的二阶协变张量,则称 g 是 M 上的一个黎曼度量,指定了黎曼度量的光滑流形称为黎曼流形,记为 (M, g) .当 $n=2$ 时, M 则为二维黎曼流形.

在二维黎曼流形中,黎曼度量可以定义成一个二阶正定矩阵 $G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$,其中 $a>0, c>0$,并且 $ac-b^2>0$.通过正规化,可以得到 $G=E^T U E$,其中 $E = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. λ_1 和 λ_2 是矩阵 G 的两个特征值, E 是相应的特征向量.令 $h_1 = \sqrt{1/\lambda_1}, h_2 = \sqrt{1/\lambda_2}$,那么 h_1, h_2 和 θ 可以解释成椭圆的两个轴长和旋转角度,如图 2 所示.

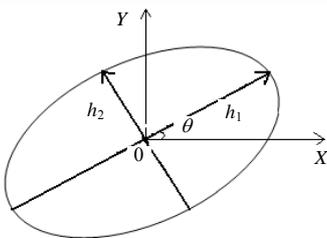


Fig.2 Riemannian metric ellipse of two-dimensional Riemannian manifolds
图 2 二维黎曼流形的黎曼度量椭圆

黎曼度量与欧氏度量含义相近,是欧氏度量在黎曼流形上的推广.给定流形上的两个点,在黎曼度量的作用下便可以得到一个测地线长度.黎曼度量可以根据流形的内蕴几何特征(如曲面的曲率)来确定,也可以人为地根据实际需要来指定.

1.3 二维黎曼流形的Voronoi图定义

黎曼流形中最值得研究的曲线是测地线,测地线是黎曼流形上两点之间的局部最短距离,它是黎曼流形的内蕴几何特征.黎曼流形上测地线和测地距离的定义如下:

定义 4. 仿射联络空间 (M,D) 中的一条光滑曲线 $\gamma:I \rightarrow M$ 称为测地线,如果它的切向量 $\gamma'(t)$ 沿 γ 是平行的切向量场,即

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = D_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = 0.$$

定义 5. 设 (M,g) 是一个二维黎曼流形, p,q 分别为 M 上的两点,则 p 到 q 的测地距离为 M 上连接 p,q 两点的最短测地线长度,记为 $d(p,q)$.若用 $\gamma[a,b] \rightarrow M$ 表示 M 上连接 p,q 两点的最短测地线,则

$$d(p,q) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt \quad (3)$$

本文研究的Delaunay三角化和Voronoi图是以测地距离为度量标准的,下面给出二维黎曼流形的Delaunay三角化和Voronoi图的定义.

定义 6. 设 M 是一个二维黎曼流形, S 为 M 上的有限点集, $T(S)$ 是 S 的一个三角网格,如果对于任意一个 $t, t \in T(S)$,都存在外接测地圆 D ,并且满足 $D \cap S = \emptyset$,则 $T(S)$ 是点集的一个Delaunay三角化.

定义 7. 设 M 是一个二维黎曼流形, $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ 为 M 上的有限点集, S 中任意一点 s_i 的邻域 V_i 由其邻近点组成,并满足 $V_i = \{x \in M | d(s_i, x) \leq d(s_j, x), \forall j\}$, V_i 为 M 上的一个Voronoi单元,所有 V_i 构成 M 的一个划分,称为 M 的Voronoi图.

2 Voronoi图在坐标卡上的存在条件

与欧氏空间相比,黎曼流形的Delaunay三角化和Voronoi图要复杂一些:①黎曼流形上的过任意两点的测地线不唯一;②过 n 维黎曼流形上 $n+1$ 个点的球不唯一^[7].这些都对黎曼流形上的研究造成了困难,因为这些情况会造成黎曼流形上Delaunay三角化甚至三角化不存在.

Leibon^[7]首先给出了黎曼流形上Delaunay三角化的存在条件,即当黎曼流形上点足够密时,点集的Delaunay三角化存在,并且与Voronoi图对偶,从而Voronoi图存在.其实质就是,黎曼流形上的足够小空间内的性质与欧氏空间相似,这个足够小的范围被限定在测地凸邻域内,Klingenberg^[8]给出了计算黎曼流形上一点测地凸邻域半径的方法.在测地凸邻域内,不仅能够保证任意两点之间的测地线唯一,而且区域内的 $n+1$ 个点能够确定一个外接球.此外,Leibon通过限定黎曼流形上布点的密度和质量来保证Delaunay三角化的存在性.

Leibon的存在条件说明了黎曼流形上Delaunay三角化和Voronoi图存在的实质问题,但是文中提出的密度控制方法在实际应用时稍有不便.本文采用坐标卡生成黎曼流形的Voronoi图,因此可以通过限定坐标卡的范围来控制流形上的研究区域,即限定坐标卡的范围在其局部坐标(局部坐标系的定义见第3.1节)原点的测地凸邻域内.将坐标卡限制在测地凸邻域内,可以保证坐标卡内的测地线唯一且最短.此外,坐标卡内的点要满足一定的质量,即布点要均匀^[7].如果坐标卡内存在一个质量差的单纯形(二维黎曼流形中是三角形),那么它的外接球的球心有可能落在当前坐标卡之外,这样会破坏Delaunay三角化的存在性.

基于以上论述给出定理1,该定理是本文建立坐标卡的一个依据,它保证了黎曼流形上Delaunay三角化及Voronoi图的存在.为了叙述方便,这里给出一些表示方法:设 p 为黎曼流形上的一点,则 p 点处的高斯曲率表示为 K_p ,可推出 p 点的测地凸邻域 $CR(p) = \frac{\pi}{2\sqrt{K_p}}$ ^[8];设 P 为黎曼流形上的点集,则 P 的个数表示为 N_p ;设 c 为黎曼流形上的一个坐标卡,从 c 局部坐标系原点到 c 边界的最大测地距离表示为 $\text{Max}(c)$;设 q 为黎曼流形上的一点,则 $\text{rad}(q)$ 表示 q 点处的密度半径, $B(q, \text{rad}(q))$ 表示 q 点处半径为 $\text{rad}(q)$ 的嵌入球^[7].

定理 1. 设 α 为 n 维黎曼流形 M 的一个坐标卡, o 为 α 局部坐标系的原点, $S = \{s_1, \dots, s_m, m > n\}$ 为 α 上的点集,如果 α 及 S 满足条件:

$$(1) \quad \text{Max}(\alpha) \leq CR(o);$$

- (2) $N_S \geq n+1$;
 (3) $\forall s_j (j=1, \dots, n+1) \subset B(z, rad(z)) \cap S, z \in \alpha$,

则坐标卡上点集 S 的 Delaunay 三角化和 Voronoi 图存在.

证明:因为 $\text{Max}(\alpha) \leq CR(o)$, 即坐标卡完全位于点 o 的测地凸邻域内, 则有坐标卡上的任意两点之间存在唯一的测地线; 因为 $N_S \geq n+1, \forall s_j (j=1, \dots, n+1) \subset B(z, rad(z)) \cap S$, 根据 Leibon 在文献[7]中的推论 3.5 可知, S 中构成网格的 $n+1$ 个点(二维黎曼流形中为三角形的 3 个点)能够确定一个外接圆(球), 根据 Leibon 在文献[7]中的定理 3.4 可知, 黎曼流形上点集 S 的 Delaunay 三角化和 Voronoi 图存在. 因为坐标卡 α 为黎曼流形的一个子流形, 因此我们可以将定理中的 3 个条件引入到 α 中, 使 α 的范围满足条件(1), 并且 α 上的点集 S 满足条件(2)、条件(3), 那么, 坐标卡上点集 S 的 Delaunay 三角化和 Voronoi 图存在. \square

在 α 内研究 Delaunay 三角化和 Voronoi 图, 完全可以忽略流形上坐标卡之外区域的情况, 其性质与欧氏空间相似. 需要说明的是, 该定理是黎曼流形上 Delaunay 三角化和 Voronoi 图存在的一个充分条件, 而非必要条件. 当 $n=2$ 时, 该定理适用于二维黎曼流形.

3 建立坐标卡

建立坐标卡有很多种方法. Grimm^[9,10]把控制网格的点、边、面做成坐标卡, 并建立这些坐标卡的转换函数, 该方法的坐标卡非常多, 计算效率比较低. Navau 等人^[11,12]提出了另一种建立坐标卡的方法, 该方法需要将控制网格运用 Catmull-Clark 细分规则进行重新剖分, 这使得控制网上的点大量增加. 王青等人^[13]针对建立光滑曲面的需求, 运用最短距离构造基函数, 从整体上直接构造出任意拓扑结构的光滑流形曲面. 下面给出本文建立坐标卡的方法: 设初始数据网格为 TN (可以为离散点), 最小二乘曲面拟合误差控制值为 E' , 根据 TN 建立二维黎曼流形 M 的坐标卡, 使坐标卡覆盖整个 M 区域, 其中 TN 所描述的流形可以带有任意亏格.

3.1 坐标卡的几何形态

本文采用 TN 上局部点集的最小二乘曲面来描述坐标卡的几何形态, 最小二乘曲面采用距离加权法生成. 设点集为 $PS \{p_1 \{u_1, v_1, z_1\}, \dots, p_n \{u_n, v_n, z_n\}\}$, 以其中一点 $p_i (1 \leq i \leq n)$ 为原点、点集 PS 的最小二乘面为 uv 平面, 建立局部坐标系 LC . 在 LC 内最小二乘曲面的表达式为 $F(u, v) = a_1 u^2 + a_2 v^2 + a_3 uv + a_4 u + a_5 v + a_6$; 点集 PS 与曲面拟合的误差 $E = \sum w_i ((F(u_i, v_i) - z_i)^2)$, 其中 $\sum w_i = 1$, 为距离权值. 为求 E 的极值, 分别取 E 对系数 $a_k (k=1, \dots, 6)$ 的偏导数, 得到关于系数的方程组 $E_k(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = 0$, 解方程组得到点集 PS 的最小二乘曲面, 从而得到坐标卡的几何形态. 在局部坐标系 LC 中, 坐标卡与欧氏空间的映射取 F^{-1} , 为光滑映射.

3.2 坐标卡的范围

坐标卡在欧氏空间的范围采用椭圆 B 描述, 其长轴记为 a_B , 短轴记为 b_B . 设坐标卡局部坐标系 LC 原点 p_o 处的黎曼度量确定的椭圆为 B' , 其长轴记为 $a_{B'}$, 短轴记为 $b_{B'}$, 原点 p_o 处的测地凸邻域半径记为 δ , 则坐标卡的范围满足条件:

- (1) a_B 与 $b_{B'}$ 方向一致, b_B 与 $a_{B'}$ 方向一致;
 (2) $a_B/b_B = a_{B'}/b_{B'}$;
 (3) $a_B \leq \delta$;
 (4) B 在拟合点集 PS 所决定的范围内.

这里的条件(3)满足定理 1 的条件(1), 确保坐标卡内的测地线唯一且最短. 坐标卡在黎曼流形上的范围 U 由函数 $F(B)$ 决定, 参数域为 B . 坐标卡在欧氏空间的范围取作椭圆的优势在于: ① 欧氏空间的椭圆体现了黎曼流形的各向异性, 如果流形是一个圆面, 那么它的范围是圆; ② 坐标卡能够更精确地拟合原始数据.

3.3 转换函数和混合函数

黎曼流形 M 的全局坐标系为 GC , 设全局坐标系 GC 到局部坐标系 LC 的映射为 T , 局部坐标系 LC 到全局

坐标系 GC 的映射为 T^{-1} . 可以推出, M 上坐标卡覆盖的区域 U 到欧氏空间区域 B 的映射 $\varphi = F^{-1} \circ T$, 欧氏空间区域 B 到黎曼流形上区域 U 的映射为 $\varphi^{-1} = T^{-1} \circ F$. 坐标卡 $\{U_i, \varphi_i\}$ 与 $\{U_j, \varphi_j\}$ 之间的转换函数定义为 $\Psi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$, 且 Ψ_{ij} 是光滑的.

设 q 为 M 上一点, M 的混合函数 $B_\alpha(q)$ 由公式(1)确定, 其中, 坐标卡 α 的混合函数 $B'_\alpha(q)$ 定义如下: 椭圆 B 为 α 在欧氏空间的范围, B 圆心处取值为 1, 线性地逐渐向外过渡减小, 直到边缘处取值为 0. 如果 q 点不在坐标卡 α 的范围内, 则定义 $B'_\alpha(q)$ 为 0. 这样取值保证了混合函数的连续性.

3.4 算法描述

算法 1. 建立坐标卡 $CreateCharts(TN, E')$.

1. 在初始网格 TN 上取一点 p_o , 作为生成坐标卡的一个起始点, 如图 3 所示;
2. 在网格 TN 上, 根据 p_o 所连接的三角形及拓扑关系找到 p_o 周围的点, 与 p_o 组成点集 PS . 以 p_o 为原点, 点集 PS 的最小二乘面为 uv 平面, 建立局部坐标系 LC . 在 LC 内采用距离加权法生成点集 PS 的最小二乘曲面 F . 如果 $E \geq E'$, 则删掉权值误差 $w_i((F(u_i, v_i) - z_i)^2)$ 最大的一点 p_i , 剩下的点集 $PS = \{PS - p_i\}$ 重新计算, 直到 $E < E'$; 如果 $E < E'$, 则执行第 3 步;
3. 根据满足误差条件的点集 PS 及最小二乘曲面 F 建立 M 的一个坐标卡 α , 按照第 3.1 节和第 3.3 节中的方法定义它的映射函数、混合函数, 并按照第 3.2 节中的方法计算它的范围;
4. 采用一个数据结构 UC_i (i 为坐标卡) 记录一个坐标卡边界未被覆盖范围的起始位置, UC_i 是一个集合, 可以记录多段坐标卡边界上未被覆盖的范围, 第 1 个建立的坐标卡边界未被覆盖的范围为全部. 在已存在坐标卡 α 的 UC_α 中选出一段未被覆盖边界, 取其起点记为 p_k , 令 $p_o = p_k$. 执行第 2 步、第 3 步, 建立的新坐标卡记为 β , 更新 UC_α 和 UC_β . 将坐标卡 α 和 β 互设为连接卡, 并按照第 3.3 节中的方法定义两卡之间的转换函数;
5. 检测所有坐标卡的 UC_i , 如果 UC_i 均为空, 则执行第 6 步; 如果 UC_i 中有一个不为空, 则表示有坐标卡还未被覆盖, 则执行第 4 步;
6. 生成 M 的一组坐标卡 $\{U_i, \varphi_i\}$, 按照第 3.3 节中的方法定义 M 的混合函数.

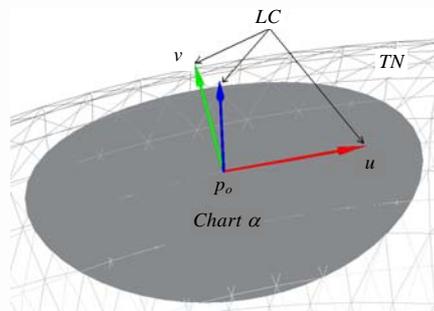


Fig.3 Sketch map of creating chart

图 3 建立坐标卡示意图

4 生成网格

以坐标卡为基础, 采用弹性力学模型在 M 上均匀布点, 并按照空洞扩展算法生成点集的 Delaunay 三角化网格, 进而生成其对偶的 Voronoi 图.

4.1 坐标卡上两点的测地距离

设 p, q 为坐标卡 α 上的两点, 求它们之间的测地距离. 由于在普通二次曲面上很难利用测地线微分方程求出测地线路径的解析解, 因此, 采用公式(3)无法算出 p, q 两点的测地距离. 在实际算法中, 通常采用数值解的方法求

出两点之间的测地路径,从而得到测地距离^[14],但是运算速度会很慢.本文将采用一种简化计算方法^[1],即两点之间的测地距离:

$$d(p, q) = \left(\sqrt{\overline{pq}g_p\overline{pq}} + \sqrt{\overline{pq}g_q\overline{pq}} \right) / 2,$$

其中, \overline{pq} 表示 p, q 两点之间的列向量; \overline{pq} 表示向量 \overline{pq} 的转置; g_p 和 g_q 分别表示 p 和 q 点处的黎曼度量.在下面的布点和生成网格算法中,距离均指测地距离.

4.2 布点

布点是生成网格的前提条件,需要满足两个要求:一是满足指定黎曼度量 $g(M)$,二是点分布要均匀,即定理 1 中的条件(3).首先,按照指定黎曼度量的要求在每个坐标卡的参数空间布满椭圆^[15],即初始布点,然后通过椭圆之间的相互作用力达到一个平衡状态^[15],力学模型方程为

$$f(w) = \begin{cases} k_0(1.25w^3 - 2.375w^2 + 1.125)/l_0, & 0 \leq w \leq 1.5 \\ 0, & 1.5 < w \end{cases} \quad (4)$$

其中, l_0 是两个椭圆之间的平衡距离, k_0 是平衡状态下的弹性系数.采用力学模型计算点的位置可以达到均匀的目的^[15],如果黎曼度量是各向同性的,则易于形成等边三角形网格.

算法 2. 在黎曼流形上布点 $DistributePoints(M, g(M))$.

1. 根据上一段中提到的初始布点方法,按照度量 $g(M)$ 的要求,在坐标卡 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ 的局部坐标系参数空间中初始布点.布点时检查该点附近是否已存在点(计算该点到本坐标卡上其他点的测地距离是否小于某个给定值,这样可以防止布点过密),如果不存在,则布点,如果存在,则放弃;
2. 根据第 3.3 节中定义的转换函数 $\Psi_{\alpha k}$,将坐标卡 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ 中的点映射到它的连接卡 $\{U_k, \varphi_k\}$ 中,其中 $k=1, \dots, n$,表示 n 个连接卡;
3. 对所有的坐标卡 $\{U_i, \varphi_i\}$ 执行第 1 步、第 2 步,直到初始布点结束, M 上的点集记为 \mathcal{PS} ;
4. 采用力学模型公式(4),计算坐标卡 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ 上点的平衡位置.对于坐标卡 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ 上任一点 p ,找到它的影响范围内($\leq 1.5l_0$)的点集 ps ,计算 p 点在 ps 作用力下的平衡位置,依次计算坐标卡上的所有点;
5. 对所有的坐标卡 $\{U_i, \varphi_i\}$ 执行第 4 步并迭代,直到 M 上的点平衡.

4.3 生成 Voronoi 图

经过布点后,黎曼流形上点分布是均匀的,我们需要根据这些点生成 Delaunay 网络.欧氏空间中,根据点集生成 Delaunay 三角化,最常用的是空洞算法.由于空洞算法首先要构建一个包含所有点的三角形,而本文的黎曼流形采用坐标卡描述,无法建立这样一个三角形.因此,本文对空洞算法进行了扩展,称为空洞扩展算法.该算法的判断准则与空洞算法相似,采用黎曼流形上的空圆准则^[1].空洞扩展算法在一个坐标卡内生成点集的 Delaunay 三角网格,适用于坐标卡描述的黎曼流形.空洞扩展算法的思路是:① 在一个坐标卡的点集中任取 3 点,构成初始 $\Delta a_0 b_0 c_0$, $\Delta a_0 b_0 c_0$ 为凸包;② 设已生成网格为 $T = \{\Delta a_i b_i c_i\}$,在点集中任取一点(已构点除外) s ,判断 s 与 T 中所有三角形的关系,如果 s 在 $\Delta a_i b_i c_i$ 的外接圆内,则采用空洞算法中的方法删除 $\Delta a_i b_i c_i$,形成空洞,并加入 s 重新构建网格;如果 s 不在 T 中任意三角形的外接圆内,则将 s 与已存在网格的所有可见边分别构成三角形,更新 T ,这时 T 为凸包;③ 重复执行②,直到三角网格生成完毕.在一个坐标卡中,采用空洞扩展算法生成的三角网格为 Delaunay 三角网格,证明略.

生成 Delaunay 三角网格后,通过对偶得到 Voronoi 图.在欧氏空间中,通过计算每个三角形的外心得到 Voronoi 图的顶点,连接相邻三角形的外心得到 Voronoi 图.在黎曼流形上,不能直接算出三角形的外心,需要通过数值方法得到一个近似外心^[5].如果需要,则可以通过数值方法^[6]得到 Voronoi 图的边,而在只关心 Voronoi 图拓扑的情况下则不用算出 Voronoi 边.

算法 3. 生成 Voronoi 图 $CreateVoronoi(M, \mathcal{PS})$.

1. 在坐标卡 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ 的局部坐标系参数空间中,采用空洞扩展算法,生成该坐标卡内点集的 Delaunay 三

- 角网格.如果卡中已存在三角形,则在已存在三角形的基础上应用空洞扩展算法;
2. 根据第 3.3 节中定义的转换函数 $\Psi_{\alpha k}$,将坐标卡 $\{U_{\alpha}, \varphi_{\alpha}\}$ 中的三角形映射到它的连接卡 $\{U_k, \varphi_k\}$ 中,其中 $k=1, \dots, n$,表示 n 个连接卡;
 3. 对所有的坐标卡 $\{U_i, \varphi_i\}$ 执行第 1 步、第 2 步,直到生成 M 的 Delaunay 三角网格;
 4. 采用上一段中所叙述的方法,在坐标卡 $\{U_{\alpha}, \varphi_{\alpha}\}$ 的局部坐标系参数空间中计算三角形的外心,并运用黎曼流形的混合函数和嵌入函数计算出外心在流形上的值;
 5. 对所有坐标卡 $\{U_i, \varphi_i\}$ 上的全部三角形执行第 4 步,得到 M 的 Voronoi 图.

5 算法分析与实例

本文算法主要包括 3 种子算法:建立坐标卡、在黎曼流形上布点、生成 Voronoi 图.建立坐标卡算法的效率可以根据最终生成坐标卡的数量来估算,而坐标卡的数量取决于初始网格顶点的数量和最小二乘面的拟合误差,网格顶点数越少并且拟合误差越大,则最终需要的坐标卡数量越少,从而耗费时间就越少.在布点算法中,决定算法效率的因素是最终在流形上所布的点数,而点数是由给定的黎曼度量决定的,黎曼度量要求的点密度越小,该算法耗时越少.生成 Voronoi 图算法的效率主要受生成 Delaunay 三角网格的空洞扩展算法的影响,空洞扩展算法的效率取决于生成 Delaunay 三角网格的点数.

本文算法的开发环境为 VS2005,采用 C++语言实现,实验环境为微机平台,CPU 为 Intel P IV 3.0G,内存 1G.下面给出算法的应用实例,为了体现算法特点,人为指定了实例中的黎曼度量.图 4 为 Hose 模型的坐标卡,该模型初始网格顶点数为 2 080,三角形个数是 4 160,创建坐标卡的个数为 963,用时 5.9s,其中,图 4(a)为全部坐标卡,图 4(b)是部分坐标卡.与 Grimm^[9,10]的算法相比,坐标卡数量减少很多.



Fig.4 Charts of models

图 4 模型的坐标卡

图 5 为不同密度网格的模型实例.图 5(a)、图 5(b)同为 Kitten 模型,图 5(a)中模型最终 Voronoi 图个数为 1 620,按照黎曼度量的定义,矩阵 E 中 θ 取值为 0,矩阵 U 中 $\lambda_1=\lambda_2=1$,用时 49.7s;图 5(b)中模型最终 Voronoi 图个数为 6 432, θ 取值为 0, $\lambda_1=\lambda_2=4$,用时 218.9s.图 5(c)、图 5(d)同为 Eight 模型,图 5(c)中模型最终 Voronoi 图的个数为 1 266, θ 取值为 0, $\lambda_1=\lambda_2=1$,用时 36.2s;图 5(d)中模型最终 Voronoi 图的个数为 5 070, θ 取值为 0, $\lambda_1=\lambda_2=4$,用时 159.3s.

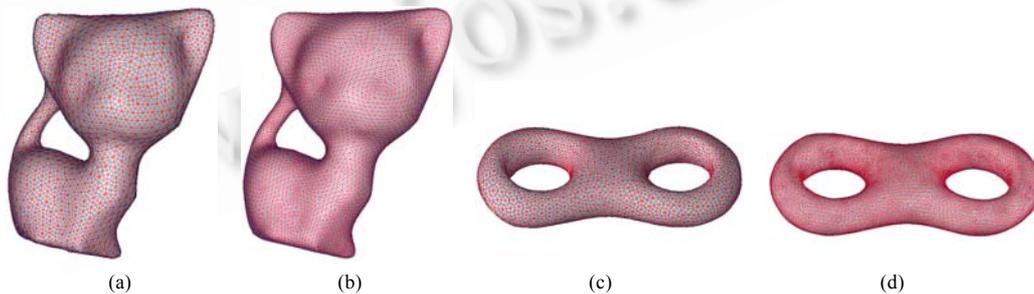


Fig.5 Delaunay triangulation and Voronoi diagrams of distinct density models

图 5 不同密度 Delaunay 三角化和 Voronoi 图的模型

图 6 是具有不同亏格的模型实例,其中,图 6(a)是亏格为 0 的模型,图 6(b)、图 6(c)模型的亏格为 1,图 6(d)模型的亏格为 2.

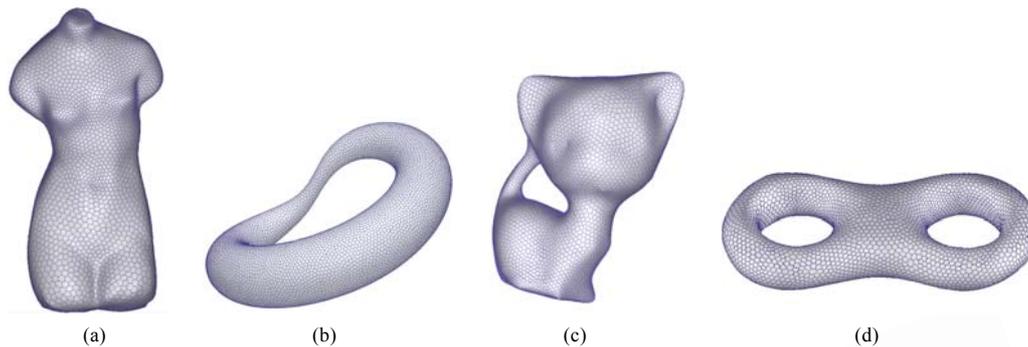


Fig.6 Voronoi of models of distinct genus

图 6 不同亏格模型的 Voronoi 图

6 结 论

本文从黎曼流形的基本理论出发,采用坐标卡、转换函数和混合函数等工具研究复杂的黎曼流形.创新之处在于,将流形概念引入到黎曼流形的 Voronoi 图生成算法中,并给出了基于流形概念生成 Voronoi 图的算法,解决了复杂二维黎曼流形 Voronoi 剖分这个一直被回避的问题.文中详细描述了创建二维黎曼流形坐标卡和 Voronoi 图的算法,它具有如下特点:

- (1) 适合任意亏格情况.由于坐标卡是根据二维黎曼流形的局部空间数据建立,坐标卡之间具有重叠区域,并且生成 Voronoi 图算法是在每个坐标卡基础上完成的,因此可以处理任意亏格的二维黎曼流形.
- (2) 方便生成各向异性 Voronoi 图.算法中,距离采用根据黎曼度量计算的测地距离,因此,在指定一个具有各向异性特征的黎曼度量后,很容易按照给定度量生成各向异性 Voronoi 图.
- (3) 方便考虑黎曼流形的整体性质.在定义坐标卡的基础上,可以根据转换函数、混合函数研究整个黎曼流形的性质.
- (4) 坐标卡数量少.与 Grimm^[9,10]的算法相比,坐标卡的数量减少了很多,提高了算法效率.

References:

- [1] Borouchaki H, George PL, Hecht F, Laug P, Saltel E. Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part I: Algorithms. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1997,25(1):61-83.
- [2] Jurczyk T, Glut B. Metric 3D surface mesh generation using Delaunay criteria. In: *Proc. of the Computational Science—ICCS 2006: The 6th Int'l Conf. LNCS 3992*, 2006. 302-309.
- [3] Zhao JJ, Wang QF, Zhong YF, Zhou J, Zhao Y. Delaunay triangulation method of curved surfaces based on Riemannian metric. *Chinese Journal of Mechanical Engineering (English Edition)*, 2003,16(1):91-93.
- [4] Houman B, Patrick L, Paul-Louis G. Parametric surface meshing using a combined advancing-front generalized Delaunay approach. *Int'l Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000,49(1):233-259.
- [5] Du Q, Wang DS. Anisotropic centroidal Voronoi tessellations and their applications. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 2005, 26(3):737-761.
- [6] Kunze R, Wolter FE, Thomas R. Geodesic Voronoi diagrams on parametric surfaces. In: *Proc. of the Computer Graphics Int'l Conf. (CGI)*. Los Alamitos: IEEE, 1997. 230-237.
- [7] Leibon G, Letscher D. Delaunay triangulations and Voronoi diagrams for Riemannian manifolds. In: *Proc. of the Annual Symp. on Computational Geometry*. New York: Association for Computing Machinery, 2000. 341-349.
- [8] Wilhelm K. *A Course in Differential Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1978. 123-161.

- [9] Grimm CM, Hughes JF. Modeling surfaces of arbitrary topology using manifolds. In: Proc. of the SIGGRAPH'95. New York: ACM, 1995. 359-368.
- [10] Grimm CM, Zorin D. Surface modeling and parameterization with manifolds. In: Proc. of the Siggraph 2006 Course Notes. New York: ACM, 2006.
- [11] Navau JC, Garcia NP. Modeling surfaces from planar irregular meshes. Computer Aided Geometric Design, 2000,17(1):1-15.
- [12] Navau JC, Garcia NP. Modeling surfaces from meshes of arbitrary topology. Computer Aided Geometric Design, 2000,17(7): 643-671.
- [13] Wang Q, Bao HJ. Construct smooth surfaces based on manifold. Journal of Software, 2006,17:64-69 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/s64.htm>
- [14] Wu MH, Mo GL, Yu YY. Numerical solution of geodesic through two given points on a simple surface. Journal of Zhejiang University: Science, 2006,7(Suppl. 2):187-192.
- [15] Shimada K, Yamada A, Itoh T. Anisotropic triangulation of parametric surfaces via close packing of ellipsoids. Int'l Journal Computational Geometry and Applications, 2000,10(4):417-440.

附中文参考文献:

- [13] 王青,鲍虎军.基于流形的光滑曲面构造.软件学报,2006,17:64-69.<http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/s64.htm>



程丹(1979-),女,辽宁沈阳人,博士生,主要研究领域为计算几何,科学计算可视化.



李吉刚(1975-),男,博士,讲师,主要研究领域为计算几何,科学计算可视化.



杨钦(1968-),男,博士,副教授,主要研究领域为计算机图形学,计算几何,科学计算可视化.



蔡强(1969-),男,博士,副教授,主要研究领域为科学计算可视化.