

## 基于最佳平方逼近的 B 样条曲线降阶\*

张锐<sup>1+</sup>, 张彩明<sup>1,2</sup>, 杨兴强<sup>2</sup>, 梁秀霞<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(山东经济学院 计算机科学与技术学院, 山东 济南 250014)

<sup>2</sup>(山东大学 计算机科学与技术学院, 山东 济南 250061)

### Degree Reduction of B-Spline Curves Based on Least Squares Approximation

ZHANG Rui<sup>1+</sup>, ZHANG Cai-Ming<sup>1,2</sup>, YANG Xing-Qiang<sup>2</sup>, LIANG Xiu-Xia<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(School of Computer Science and Technology, Shandong Economic University, Ji'nan 250014, China)

<sup>2</sup>(School of Computer Science and Technology, Shandong University, Ji'nan 250061, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-531-88395773, E-mail: zccplay@mail.sdu.edu.cn, http://www.cs.sdu.edu.cn

Zhang R, Zhang CM, Yang XQ, Liang XX. Degree reduction of B-spline curves based on least squares approximation. *Journal of Software*, 2006,17(Suppl.):78-84. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/s78.htm>

**Abstract:** A method for reducing the degree of B-spline curves based on constrained least squares approximation is presented, which preserves endpoints of the B-spline curves. To make the degree reduced B-spline curve has better approximation, and its number of the control points and the knot vector are also discussed. It is presented that the method based on constrained least squares approximation, which adds a weight function to the object function for reducing the error of approximation. Furthermore, for the interval whose error is larger than the given tolerance, a method of knot insertion is presented so that the degree reduction is controlled under the tolerance. The new method is compared with the existing ones via examples.

**Key words:** B-spline curve; degree reduction; constrained least square approximation; preserve endpoint

**摘要:** 提出了一种基于带约束的最佳平方逼近的 B 样条曲线降阶的方法. 首先讨论了降阶后曲线控制顶点个数以及节点向量的取法、保端点的 B 样条曲线降阶方法, 并把带约束的最佳平方逼近技术引入到 B 样条曲线的降阶, 即误差大的区域施加较大的权函数以降低最大误差. 为满足给定误差限制下的降阶, 提出了对原曲线插入节点的准则, 即对不满足误差限制的区域插入节点. 并用实例对新方法和基于扰动约束技术的降阶方法进行了比较.

**关键词:** B 样条曲线; 降阶; 带约束的最佳平方逼近; 保端点

在计算机辅助几何设计中, B 样条曲线是一种最基本的造型工具, 有广泛的应用背景<sup>[1]</sup>. B 样条曲线的降阶是样条曲线和曲面造型中的关键技术之一, 为了实现不同 CAD 系统之间的数据交换, 常用到这一技术, 它已成为热点问题, 得到越来越多的研究.

一般而言, Bézier 曲线的降阶<sup>[2-6]</sup>比 B 样条曲线的降阶要简单一些. Pigel 和 Tiller<sup>[7]</sup>先将 B 样条曲线分解成

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60573180, 60533060, 60403036 (国家自然科学基金)

Received 2006-03-15; Accepted 2006-09-11

若干段 Bézier 曲线,然后对各段 Bézier 曲线进行降阶,最后删除多余的节点得到降阶后的 B 样条曲线. Wolters 等人先对 B 样条曲线分段用开花算法和最小二乘法进行降阶,然后再对所产生的多组控制顶点进行加权组合. 与之类似的一种方法<sup>[8]</sup>是首先利用 Chebyshev 多项式的最佳一致逼近性质以及近似最佳一致逼近性质,对各段 B 样条曲线分别降阶;再对各段降阶逼近曲线的控制顶点集中其下标相重的部分做一个加权平均来得到最终的一整条降阶逼近曲线.在这几种方法中,均有两步产生误差,因此,它们在应用上具有很大的局限性,实际降阶效果并不理想.另一类方法为基于扰动约束的降阶方法<sup>[9-12]</sup>.秦开怀<sup>[9]</sup>和雍俊海等人<sup>[10]</sup>通过在给定控制点上增加扰动项,极小化扰动项使高次 B 样条曲线退化为低次 B 样条曲线,再对退化的曲线通过分段解线性方程组进行降阶.雍俊海<sup>[11]</sup>和潘日晶等人<sup>[12]</sup>分别给出了基于扰动约束的均匀 B 样条曲线的降阶方法和 B 样条曲线的降阶公式.文献<sup>[13]</sup>从理论上证明了基于扰动约束的降阶方法得到的 B 样条曲线实际是一条整体多项式曲线.一般来说,合理的做法是用分段定义的曲线去逼近一条整体曲线,而基于扰动约束的 B 样条曲线降阶算法则是正好相反.因此,此类方法应用到 B 样条曲线降阶具有较大的局限性,在许多的情况下难以给出理想的结果.

本文是对基于最佳平方逼近的 B 样条曲线降阶方法的进一步研究(有关最佳平方逼近的理论见文献<sup>[14,15]</sup>).本文给出了降阶后曲线的控制顶点个数、节点向量的取法,并把带约束的最佳平方逼近技术引入到 B 样条曲线的降阶.对端点插值的 B 样条曲线,可以满足保端点条件.而且,通过对原曲线插入节点,还可满足给定误差限制下的降阶.实例和计算表明,新方法能应用到一般 B 样条曲线的降阶,并且逼近效果在一般情况下要明显好于已有的方法.本文的结果表明,基于约束的最佳平方逼近理论应用到 B 样条曲线降阶也能得出理想的结果.

## 1 B 样条曲线降阶问题的描述

给定  $n+1$  个数据点  $P_i$  ( $i=0,1,2,\dots,n$ ) 为曲线的控制顶点,  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+k}\}$  为节点向量,由这些点和节点向量定义的  $k$  阶(或  $k-1$  次)B 样条曲线  $P_k(t)$  为

$$P_k(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_{n+1}.$$

其中

$$N_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t), \quad -\infty < t < +\infty.$$

要求找到一条  $m$  ( $m < k$ ) 阶 B 样条曲线  $P_m(t)$ ,

$$P_m(t) = \sum_{i=0}^l \bar{P}_i \bar{N}_{i,m}(t), \quad \bar{t}_{m-1} \leq t \leq \bar{t}_{l+1},$$

使其在某种意义下与原曲线的逼近误差最小.例如,在本文中,降阶误差在最小二乘意义下最小,相应的目标函数为

$$\int_0^1 [P_k(t) - P_m(t)]^2 dt \quad (1)$$

曲线  $P_m(t)$  的节点向量为  $\bar{t}_0, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{l+m}$ . 有些情况下,降阶需要满足保端点条件,即

$$P_k^{(r)}(t_{k-1}) = P_m^{(r)}(\bar{t}_{m-1}), \quad P_k^{(r)}(t_{n+1}) = P_m^{(r)}(\bar{t}_{l+1}), \quad r=0,1,2 \quad (2)$$

曲线  $P_m(t)$  与原曲线  $P_k(t)$  在首末端点分别具有相同的  $r$  阶导矢,  $r=0,1,2$ .

## 2 降阶后 B 样条曲线的控制顶点数以及节点向量的取法

B 样条曲线是分段多项式曲线,降阶后的 B 样条曲线的段数影响曲线的降阶效果,本节首先给出了降阶后 B 样条曲线的段数的取法,曲线的控制顶点数也随之确定,然后讨论了如何确定降阶后 B 样条曲线的节点向量.

### 2.1 降阶后 B 样条曲线的控制顶点个数

无论降阶后 B 样条曲线的段数增加(但  $l \neq an, a=2,3,\dots$ )或者减少,都会出现某一低次 B 样条曲线段来逼近两段相邻的高次 B 样条曲线段.如图 1(b)所示,降阶后 B 样条曲线的段数增加,此时它的第 2 段逼近原曲线的第

1 段的后一部分和第 2 段的前一部分. 无论是理论还是在实际应用中, 合理的做法一般都是用分段定义的曲线去逼近一条整体曲线, 而上述情况则是用一条低次的多项式曲线段去逼近两段相邻的高次多项式曲线段, 所以逼近效果不佳. 因此, 降阶后 B 样条曲线的段数应保持不变. 根据 B 样条曲线的基本性质<sup>[1]</sup>, 降阶后 B 样条曲线的控制顶点个数为

$$l = n - k + m \quad (3)$$

下面用实例对降阶后 B 样条曲线的不同控制顶点数对降阶结果的影响进行了比较, 如图 1 所示. 用于比较的实例是一条 7 阶均匀 B 样条曲线, 曲线的 8 个控制点分别是: (800, 1000), (1473, 770), (1527, 291), (912, 6), (194, 174), (32, 641), (576, 980), (1325, 876). 图 1(a) 是降一阶后曲线的控制顶点数减少一得到的结果, 图 1(b) 是降阶后曲线控制顶点数不变得到的结果; 大圆圆心为降阶前曲线的分段连接点, 小圆圆心为降阶后曲线的分段连接点. 容易看出, 在图 1(a) 中降阶前后曲线的分段连接点基本重合, 曲线分段一一对应, 而图 1(b) 中降阶后曲线增加了一段, 降阶效果不理想. 图 1(a) 和图 1(b) 中上面曲线的实线部分为降阶前的 B 样条曲线及其控制多边形, 虚线部分为降阶后的 B 样条曲线及其控制多边形, 下面的曲线为误差曲线, 本文中其他的图实线虚线意义相同. 图 1(a) 和图 1(b) 中的误差曲线分别放大了 112 倍和 84 倍.

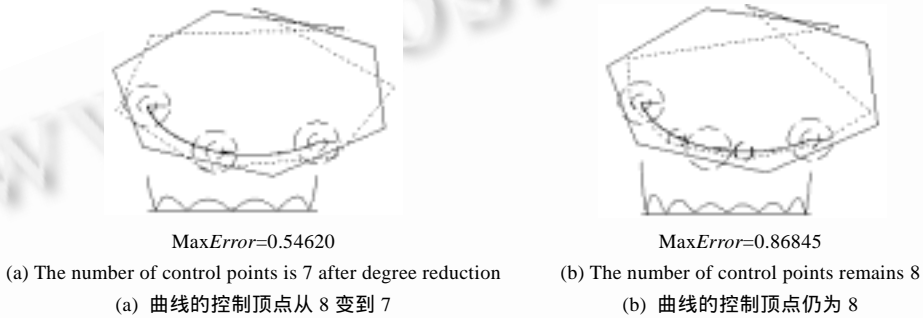


Fig.1 The number of control points of the degree reduced B-spline curve influences on the result of degree reduction

图 1 降阶后曲线控制顶点的个数对降阶结果的影响

## 2.2 降阶后 B 样条曲线的节点向量

下面给出 B 样条曲线降阶后取什么样的节点向量. 将 B 样条曲线的定义域  $[t_{k-1}, t_{n+1}]$  规范为  $[0, 1]$ ,  $k$  阶 B 样条曲线的节点向量可写成

$$\{t_0, t_1, \dots, t_{k-1} = 0, t_k, \dots, t_n, t_{n+1} = 1, \dots, t_{n+k}\},$$

其中  $t_i (k \leq i \leq n)$  是内节点, 且是非递减的. 由 B 样条曲线性质<sup>[1]</sup>可知,  $l$  个控制顶点的  $m$  阶 B 样条曲线的内节点个数为  $l - m + 1$ , 将式(3)代入, 得到降阶后 B 样条曲线的内节点个数  $n - k + 1$ , 这与降阶前曲线的内节点个数相等, 因此它们的内节点是一一对应的, 故降阶后  $m$  阶 B 样条曲线的节点向量可写成

$$\{\bar{t}_0, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{m-1} = 0, \bar{t}_m, \dots, \bar{t}_l, \bar{t}_{l+1} = 1, \dots, \bar{t}_{l+m}\},$$

其中  $\bar{t}_i (\bar{t}_i = t_{i+k-m}, m \leq i \leq l)$  是内节点, 且是非递减的. 同样, 端节点可按照下式选取:

$$\bar{t}_i = t_{i+k-m}, i = 0, 1, \dots, m-1, l+1, l+2, \dots, l+m.$$

## 3 最佳平方逼近的 B 样条曲线保端点降阶

上一节确定了降阶后 B 样条曲线的控制顶点个数和节点向量, 下面求解 B 样条曲线的控制顶点. 对于  $k$  阶端点插值 B 样条曲线  $P_k(t)$ , 它的首末端节点为  $k$  重节点, 定义域  $[t_{k-1}, t_{n+1}]$  规范成  $[0, 1]$ , 降阶后 B 样条曲线的定义域  $[\bar{t}_{m-1}, \bar{t}_{l+1}]$  按照第 2 节中的取法, 其他节点为

$$\bar{t}_i = 0, i = 0, 1, \dots, m-1; \bar{t}_i = 1, i = l+1, l+2, \dots, l+m.$$

考虑保一阶端点降阶问题,即  $\bar{P}_0 = P_0, \bar{P}_l = P_n$ , 则目标函数式(1)可写成

$$d(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_{l-1}) = \int_0^1 [P_k(t) - P_m(t)]^2 dt = \int_0^1 \left( \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t)P_i - \sum_{i=0}^l N_{i,m}(t)\bar{P}_i \right)^2 dt.$$

$(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_{l-1})$  由下列线性方程组决定:

$$\frac{\partial d(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_{l-1})}{\partial \bar{P}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l-1.$$

也就是说,

$$\frac{\partial d(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_{l-1})}{\partial \bar{P}_i} = \frac{\partial \int_0^1 \left( \sum_{j=0}^n N_{j,k}(t)P_j - \sum_{j=0}^l N_{j,m}(t)\bar{P}_j \right)^2 dt}{\partial \bar{P}_i} = 2 \int_0^1 \left( \sum_{j=0}^n N_{j,k}(t)P_j - \sum_{j=0}^l N_{j,m}(t)\bar{P}_j \right) N_{i,m}(t) dt = 0,$$

其中,  $i = 1, 2, \dots, l-1$ , 即

$$\sum_{j=0}^l \left( \int_0^1 N_{i,m}(t)N_{j,m}(t) dt \right) \bar{P}_j = \sum_{j=0}^n \left( \int_0^1 N_{i,m}(t)N_{j,k}(t) dt \right) P_j, \quad i = 1, 2, \dots, l-1.$$

可写成:

$$\sum_{j=0}^l a_{ij} \bar{P}_j = \sum_{j=0}^n b_{ij} P_j, \quad i = 1, 2, \dots, l-1 \tag{4}$$

$$\text{其中: } a_{ij} = \begin{cases} \int_{\max(\bar{\tau}_i, 0)}^{\min(\bar{\tau}_{i+m}, 1)} N_{i,m}(t)N_{j,m}(t) dt, & 1-m \leq i-j \leq 0 \\ \int_{\max(\bar{\tau}_i, 0)}^{\min(\bar{\tau}_{i+m}, 1)} N_{i,m}(t)N_{j,m}(t) dt, & 0 < i-j \leq m-1, \\ 0, & |i-j| > m-1 \end{cases}, \quad b_{ij} = \begin{cases} \int_{\max(\bar{\tau}_{j-k+m}, 0)}^{\min(\bar{\tau}_{i+m}, 1)} N_{i,m}(t)N_{j,k}(t) dt, & -k < i-j \leq m-k \\ \int_{\max(\bar{\tau}_i, 0)}^{\min(\bar{\tau}_{i+m}, 1)} N_{i,m}(t)N_{j,k}(t) dt, & m-k < i-j \leq 0 \\ \int_{\max(\bar{\tau}_i, 0)}^{\min(\bar{\tau}_{i+m}, 1)} N_{i,m}(t)N_{j,k}(t) dt, & 0 < i-j < m \\ 0, & i-j \leq -k, \quad i-j \geq m \end{cases}.$$

通过解上面的线性方程组(4)可得到  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_{l-1}$ , 从而得到降阶后的曲线  $P_m(t)$ . 同理可得到式(2)中保二阶和三阶端点条件的目标函数和降阶曲线.

#### 4 带约束的最佳平方逼近技术、节点插入算法及降阶误差

在某些情况下,  $P_k(t)$  和  $P_m(t)$  的最大误差大于给定的误差, 本节给出了减小误差的方法. 第 4.1 节提出带约束的最佳平方逼近降阶, 第 4.2 节给出节点插入算法, 第 4.3 节指出降阶的误差表达式.

##### 4.1 带约束的最佳平方逼近降阶

引入权函数  $\|e(t)\|^2 = \left\| \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t)P_i - \sum_{i=0}^l N_{i,m}(t)\bar{P}_i \right\|^2$ , 其中  $\bar{P}_i$  为第 1 次降阶之后的求得的控制顶点. 显然,  $e(t)$  为第 1 次降阶后曲线的降阶误差. 这样误差大的区域施加较大的权函数从而减小最大误差. 设再次降阶后的控制顶点为  $\tilde{P}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, l$ ), 则新的目标函数为

$$d(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_{l-1}) = \int_0^1 [P_k(t) - P_m(t)]^2 \|e(t)\|^2 dt = \int_0^1 \left( \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t)P_i - \sum_{i=0}^l N_{i,m}(t)\tilde{P}_i \right)^2 \|e(t)\|^2 dt.$$

其中  $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_{l-1})$  为函数  $d(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_{l-1})$  的极小值点,  $\tilde{P}_0 = P_0, \tilde{P}_l = P_n$ .  $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_{l-1})$  由以下方程组决定:

$$\frac{\partial d(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_{l-1})}{\partial \tilde{P}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l-1.$$

##### 4.2 节点插入算法

第 4.1 节的加权方法可以减少降阶的最大误差, 但是有时原曲线的某一段在一定精度下不能用一段低阶曲线逼近, 那么这一段就应该用多于一段逼近. 通过节点插入, 这一段曲线可以分解成两段, 然后对经过节点插入

的曲线用带约束的最佳平方逼近降阶,此时原曲线的这一段曲线就由两段低阶曲线逼近,因此降阶效果更好.插入节点的算法如下:

算法 1. 给定误差限制下的 B 样条曲线的降阶.

输入:原曲线  $P_k(t)$  以及误差界限  $\varepsilon$ .

Step 1. 用带约束的最佳平方逼近的方法对  $P_k(t)$  降阶,得到曲线  $P_m(t)$ ,如果  $P_k(t)$  和  $P_m(t)$  之间的误差不大于给定的误差限制,转 Step 3.

Step 2. 对  $P_k(t)$  的每一曲线段,求出它与  $P_m(t)$  的相应曲线段的最大误差,如果大于误差界限  $\varepsilon$ ,找到这一曲线段对应的区间  $[t_i, t_j]$ ,其中  $t_i$  和  $t_j$  是曲线  $P_k(t)$  的节点,插入节点  $\frac{t_i+t_j}{2}$  作为  $P_k(t)$  的新节点,转 Step 1.

Step 3. 输出降阶后的曲线  $P_m(t)$ .

### 4.3 降阶误差

曲线的误差大致可以描述为

$$\|e(t)\| = \left\| \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t)P_i - \sum_{i=0}^l N_{i,m}(t)\tilde{P}_i \right\|,$$

其中,  $\tilde{P}_i (i=0,1,\dots,l)$  为降阶后曲线的控制顶点,但是实际的降阶误差小于  $\|e(t)\|$ ,因为对  $t$  的某一个值  $t_i$ ,  $\|e(t_i)\|$  不一定是原曲线和降阶后曲线间的最小距离.在本文的例子中,误差曲线都是按照  $\|e(t)\|$  所画,误差仍然要比其他文章的方法小得多.

## 5 降阶实例

本节对新方法和文献[10,11,12]中的方法分别比较,所有例子中的曲线都降一阶.

例 1:用于比较的实例是一条 6 阶均匀 B 样条曲线,曲线的 7 个控制点分别是:(0,0),(40,380),(130,250),(320,60),(560,140),(650,340),(330,390).为方便起见,文献[11]中的方法称为方法 1.比较结果如图 2 所示,其中图 2(a)是文献[11]中方法得到的结果,图 2(b)是新方法的结果.图 2(a)和图 2(b)中的误差曲线分别放大了 4.5 倍和 360 倍.

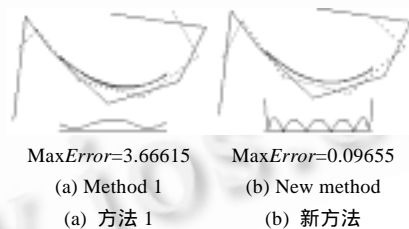


Fig.2 The error curves of two methods

图 2 两种方法的误差曲线

例 2:对于一条 5 阶的一般 B 样条曲线,它的 8 个控制顶点分别是:(150,250),(180,300),(250,310),(230,240),(315,200),(375,260),(390,320),(340,330),节点向量为:{0,1,1,2,2.5,4.2,5.5,5.6,6.5,7,8,9}.比较结果如图 3 所示,其中图 3(a)是文献[12]中方法得到的结果,文献[12]中的方法称为方法 2,图 3(b)是新方法的结果.图 3(a)和图 3(b)中的误差曲线分别放大了 4.5 倍和 45 倍.

例 3:第 3 个实例是一条 5 阶的端点插值 B 样条曲线的保端点降阶.原曲线的节点向量为{0,0,0,0,0,0.15,0.35,0.50,0.65,0.85,1,1,1,1},控制顶点为(50,50),(250,50),(250,200),(50,200),(50,500),(650,500),(650,200),(450,200),(450,50),(650,50).比较结果如图 4 所示,其中图 4(a)是文献[10]中方法得到的结果,文献[10]中的方法称为方法 3;图 4(b)~图 4(d)是新方法得到的结果,图 4(b)为第 1 次降阶后的结果,图 4(c)是引入权函数的新方法得到的结果,图 4(d)是对原曲线插入节点后第 2 次降阶得到的结果.图 4(d)中原曲线放大了 1.2 倍,图 4(a)~图 4(d)中的误差曲

线分别放大了 5 倍、20 倍、60 倍和 280 倍。

基于最佳平方逼近理论已应用到许多逼近问题,本文把带约束的最佳平方逼近技术引入到 B 样条曲线的降阶.本节的例子表明,该技术能够给出理想的结果。

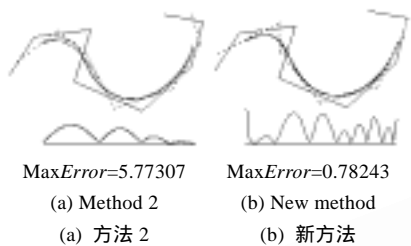
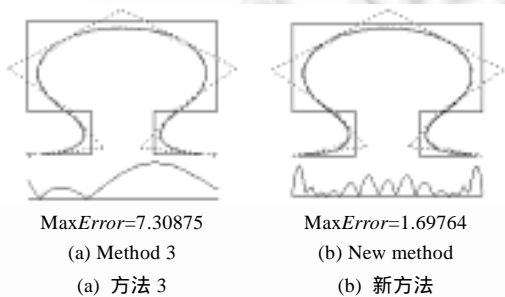


Fig.3 The degree reduction of the general B-spline curve

图 3 一般 B 样条曲线的降阶



(c) New method with the weight function      (d) Degree reduction of the B-spline curve after knot insertion  
(c) 增加权函数的新方法      (d) 经过节点插入的曲线的降阶

Fig.4 The degree reduction of the B-spline curve with endpoints interpolation

图 4 端点插值的 B 样条曲线的降阶

## 6 结 论

与基于扰动约束的降阶方法相比,用最佳平方逼近技术无论对均匀 B 样条曲线,一般 B 样条曲线还是端点插值的 B 样条曲线做降阶都是一个有效的方法.对于端点插值的 B 样条曲线还可满足保端点条件.但用带约束的最佳平方逼近技术对 B 样条曲线做降阶处理还有一些需进一步研究的问题.例如,如何给出两个 B 样条基函数乘积的积分的显示表示式以及如何选取更好的权函数进一步降低最大误差.这些都需要我们将来进一步加以研究。

## References:

- [1] Pigel L, Tiller W. The NURBS Book. 2nd ed., Berlin: Springer-Verlag, 1997. 81-138.
- [2] Chen F, Wu Y. Degree reduction of disk Bézier curves. Computer Aided Geometric Design, 2004,21(3):263-280
- [3] Eck M. Least squares degree reduction of Bézier curves. Computer-Aided Design, 1995,27(11):845-851.

- [4] Hu SM, Sun JG, Jin TG, Wang GZ. Approximate degree reduction of Bézier curves. Tsinghua Science & Technology, 1998,3(2):977-1000.
- [5] Chen F, Lou W. Degree reduction of interval Bézier curves. Computer-Aided Design, 2000,32(10):571-582.
- [6] Sunwoo H. Matrix representation for multi-degree reduction of Bézier curves. Computer Aided Geometric Design, 2005,22(3):261-273.
- [7] Pigel L, Tiller W. Algorithm for degree reduction of B-spline curves. Computer-Aided Design, 1995,27(2):101-110.
- [8] Cheng M, Wang GJ. Multi-Degree reduction of NURBS curves based on their explicit matrix representation and polynomial approximation theory. Science in China (Series E), 2003,33(8):673-680 (in Chinese with English abstract).
- [9] Qin KH, Huang HK. New algorithm for degree reduction of B-spline curves. Chinese Journal of Computers, 2000,23(3):306-310 (in Chinese with English abstract).
- [10] Yong JH, Hu SM, Sun JG, Tan XY. Degree reduction of B-spline curves. Computer Aided Geometric Design, 2001,18(2):117-127.
- [11] Yong JH, Hu SM, Sun JG. Degree Reduction of uniform B-spline Curves. Chinese Journal of Computers, 2000,23(5):537-540 (in Chinese with English abstract).
- [12] Pan RJ, Yao ZQ, Pan RH. Degree reduction formula and approximate of degree reduction of B-spline curves. Chinese Journal of Computers, 2003,26(10):1254-1259 (in Chinese with English abstract).
- [13] Zhang CM, He J, Zhang R. Degree reduction of B-spline curves using perturbations constraint and least squares approximation. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2004,16(10):1392-1395 (in Chinese with English abstract).
- [14] Lutterkort D, Peters J, Reif U. Polynomial degree reduction in the  $L_2$ -norm equals best Euclidean approximation of Bézier coefficients. Computer Aided Geometric Design, 1999,16(7):607-612.
- [15] Zheng JM, Wang GZ. Perturbing Bézier coefficients for best constrained degree reduction in the  $L_2$ -norm. Graphical Model, 2003,65(6):351-368.

#### 附中文参考文献:

- [8] 成敏,王国瑾.基于显式矩阵表示和多项式逼近论的 NURBS 曲线降多阶.中国科学(E 辑),2003,33(8):673-680.
- [9] 秦开怀,黄海昆.B 样条曲线降阶新方法.计算机学报,2000,23(3):306-310.
- [11] 雍俊海,胡事昆,孙家广.均匀 B 样条曲线的降阶.计算机学报,2000,23(5):537-540.
- [12] 潘日晶,姚志强,潘日红.B 样条曲线的降阶公式及近似降阶方法.计算机学报,2003,26(10):1254-1259.
- [13] 张彩明,何军,张锐.扰动约束和最佳平方逼近的 B 样条曲线的降阶.计算机辅助设计与图形学学报,2004,16(10):1392-1395.



张锐(1979 - ),男,山东济宁人,助教,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学.



杨兴强(1964 - ),男,博士,副教授,主要研究领域为科学计算可视化,医学图像处理.



张彩明(1955 - ),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学,信息可视化,医学图像处理.



梁秀霞(1976 - ),女,博士,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学,信息可视化.