ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.17, Supplement, November 2006, pp.70−77
© 2006 by *Journal of Software*. All rights reserved.
E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

基于距离比值的迭代分形图*

张锡哲[1,2+], 吕天阳[1,2,3], 王钲旋[1,2]

[1](吉林大学 计算机科学与技术学院,吉林 长春 130012)
[2](符号计算与知识工程教育部重点实验室(吉林大学),吉林 长春 130012)
[3](哈尔滨工程大学 计算机科学与技术系,黑龙江 哈尔滨 150001)

Iterated Fractal Based on Distance Ratio

ZHANG Xi-Zhe[1,2+], LÜ Tian-Yang[1,2,3], WANG Zheng-Xuan[1,2]

[1](College of Computer Science and Technology, Jilin University, Changchun 130012, China)
[2](Key Laboratory of Symbolic Computation and Knowledge Engineering of Ministry of Education (Jilin University), Changchun 130012, China)
[3](Department of Computer Science and Technology, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)
+ Corresponding author: Phn: +86-24-82072060, E-mail: zxzok@163.com

Zhang XZ, Lü TY, Wang ZX. Iterated fractal based on distance ratio. *Journal of Software*, 2006,17(Suppl.): 70−77. http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/s70.htm

Abstract: The escape time algorithm cannot render the convergence region of mapping, so there are some black regions in escape time fractal. In this paper, a novel method is presented to construct fractal image, which is named the distance ratio iteration method. This method performs iteration on two points and render fractal image by using their distance ratio convergence times. Taking complex mapping $z\leftarrow z^{\alpha}+c$ as example, the generalized Mandelbrot and Julia sets are constructed based on distance ratio and their visual properties are analyzed. The result fractal image has complex and self-similarity structure in inner convergence region. It is proved that the boundary of distance ratio fractal is the same as M-J set when $\alpha>0$, and some visual structure of it with various exponent α are discussed. When $\alpha<0$, the generalized Mandelbrot and Julia set based on distance ratio have some complex structures which M-J set does not have.
Key words: fractal; complex mapping; Julia set; Mandelbrot set; distance ratio

摘 要: 由于逃逸时间算法不能绘制函数收敛区域,所以现有的分形图大都存在大片的黑色区域.提出一种新的构造分形图的方法:距离比值迭代法.该方法采用两点迭代,利用其距离比值的收敛次数来绘制分形图.利用距离比值迭代法绘制了复映射 $z\leftarrow z^{\alpha}+c$ 的广义 M-J 集并分析其构图性质.距离比值广义 M-J 集的内部收敛区域具有复杂的细节和自相似结构,当 $\alpha>0$ 时其外部边界与经典 M-J 集一致,当 $\alpha<0$ 时能够绘制出经典 M-J 集所没有的复杂结构.
关键词: 分形;复映射;Julia 集;Mandelbrot 集;距离比值

自从 Mandelbrot[1]用计算机绘制出第一张 M 集图后,分形图就以其复杂、美丽的结构吸引了许多科学家的注意[2].人们对于 Mandelbrot 集以及与之密切相关的多项式的 Julia 集进行了广泛的研究[3−5].王兴元等人讨论

* Received 2006-03-15; Accepted 2006-09-11

了负实数阶广义 M-J 集的构图性质[6,7]并将其推广至复指数映射[8];陈宁等人探讨了复指数映射构造的 M-J 集性质[9,10]并提出了快速绘制算法[11].目前绘制 M-J 集图的主要方法是逃逸时间算法,但其很难绘制某些复映射的迭代分形图,如指数小于 0 的多项式映射等.因此需要改进或寻找新的绘制算法对其迭代性质进行深入的研究.

逃逸时间算法是常用的分形绘制方法,该方法根据迭代点的轨道随时间变化是否逃逸出指定范围来绘制分形图.逃逸时间算法一般仅可以绘制收敛区域和逃逸区域的边界,还不能较好地表现收敛区域和逃逸区域的必要细节或所关心的性质,不利于对分形的多方面观察和深入理解.由于逃逸时间算法不能绘制映射的稳定区域,所以其绘制的 M-J 集图中存在着很多空白.为了研究这些空白区域的迭代性质,Hooper[12]提出ε正交法和星迹法绘制 M 集内部结构;Philip[13]提出区域分解和角度分解方法,用来研究 Mandelbrot 集的外部结构.王兴元推广了以上两种方法,提出了等势线法和色彩调配法[6],并研究了 M-J 集非边界区域的结构特征[14];同时还讨论了 Lyapunov 指数和周期点查找技术构造广义 M 集的方法[15],避免了逃逸时间算法中结果图依赖于逃逸半径选取的缺点.但以上这些方法大多基于逃逸时间算法,对迭代点采用简单函数进行分类,从而绘制映射稳定区域,其缺陷在于不能结合到迭代过程中去,不能反映点的迭代特性.绘制的分形图缺乏自相似性和细节,与分形边界很不协调.

本文提出了一种构造分形图的新方法:距离比值迭代法.该方法采用两点迭代,利用其距离比值的迭代收敛速度来绘制分形图.不同于逃逸时间算法,距离比值迭代法绘制的广义 M-J 集在映射稳定区域内具有丰富的细节,并且能够绘制一些逃逸时间算法无法绘制的映射分形图.将采用距离比值迭代方法生成的广义 Mandelbrot 集和 Julia 集称为距离比值广义 M 集和距离比值广义 J 集,如图 1 和图 2 所示.与逃逸时间算法相比,距离比值迭代方法绘制的广义 M-J 集的内部区域也具有分形性质,其边界和逃逸时间算法绘制的 M-J 集一致,所以该算法可以作为逃逸时间算法的替代,是复映射迭代性质的更好的可视化方法.

本文首先给出了距离比值的定义及其迭代性质,然后研究了生成距离比值分形图的迭代算法.采用该算法,我们以复映射 $z\leftarrow z^{\alpha}+c$ 为例,绘制了若干典型指数的距离比值分形图并研究其构图性质.本文讨论了距离比值广义 J 集的构图性质及其与 Julia 集的区别;研究了距离比值分形广义 M 集的性质和构图特征,说明其与逃逸时间算法生成的 M 集之间的联系和区别.

Fig.1 DRJ for $z\leftarrow z^3+0.4+0.5i$

图 1 复映射 $z\leftarrow z^3+0.4+0.5i$ 的距离比值广义 J 集

Fig.2 DRM for $z\leftarrow z^{-3}+c$

图 2 复映射 $z\leftarrow z^{-3}+c$ 的距离比值广义 M 集

本文第 1 节给出距离比值的定义及其迭代性质.第 2 节讨论距离比值广义 J 集的绘制方法及其性质,并与经典 Julia 集作比较.第 3 节讨论距离比值广义 M 集的绘制方法及其性质,说明与 M 集的联系和区别.第 4 节总结全文.

1 距离比值及其迭代

令 $f:C\to C$ 为复解析函数,记 $f^n(x)=f\circ f^{n-1}(x)$, $f^0(x)=x$,n 为正整数.对于任意 $z_1\neq z_2\in C$,定义距离比值 $L(z_1,z_2)$为

$$L(z_1,z_2)=\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|} \tag{1}$$

对初始点 z_1,z_2 进行迭代,定义迭代后的距离比值为

$$L^n(z_1,z_2)=\frac{\left|f^n(z_1)-f^n(z_2)\right|}{\left|f^{n-1}(z_1)-f^{n-1}(z_2)\right|} \tag{2}$$

如果映射 f 是压缩的,由压缩映射定理可知对初始点 z 进行迭代会收敛到映射的不动点 z^*.同样地,对距离比值进行迭代也会收敛,如下列命题所述:

命题 **1**. 如果映射 f 存在不动点 z^*,吸引域为 $A(z^*)$,那么 $\forall z_1,z_2\in A(z^*)$,有 $\lim\limits_{k\to\infty}L^k(z_1,z_2)=\left|f'(z^*)\right|$.

命题 **2**. 令 ε 为一个任意小实数, $\forall z_1,z_2\in A(z^*)$,存在自然数 k^*,如果 $k>k^*$,则 $\left|L^k(z_1,z_2)-\left|f'(z^*)\right|\right|<\varepsilon$.

命题 1 说明了对距离比值进行迭代必然收敛;命题 2 说明了对于给定的迭代阈值 ε,距离比值将在有限次数内收敛.基于上述命题,可以给出一个基于迭代点距离比值收敛特性的迭代算法.该方法有异于逃逸时间算法计算迭代点是否逃逸,而是计算迭代点的距离比值是否收敛于不动点处的导数值,从而能够体现映射稳定区域的迭代性质,称这种算法为距离比值迭代法.在 z 平面使用该方法可以得到与 Julia 集类似的分形,称为距离比值广义 J 集(distance ratio Julia set,简称 DRJ),其定义如下:

$$DRJ=\left\{z_1,z_2\in C:\left\{\lim_{k\to\infty}L^k(z_1,z_2)\to\left|f'(z^*)\right|\right\}\right\} \tag{3}$$

由于距离比值由两个点计算得出,所以等式(3)给出的是四维集合.为了在二维复平面上研究其构图性质,我们令其中一个点为 z^*,只研究另外一个点的变化规律,将等式(3)给出的定义修改如下:

$$DRJ=\left\{z\in C:\left\{\lim_{k\to\infty}L^k(z,z^*)\to\left|f'(z^*)\right|\right\}\right\} \tag{4}$$

下面给出迭代点的分类定义.

设 z 是一迭代点,ε 是迭代阈值,我们称 z 是 k 阶的,如果 z 满足以下条件:

$$\left|L^{k-1}(z,z^*)-\left|f'(z^*)\right|\right|>\varepsilon,\left|L^k(z,z^*)-\left|f'(z^*)\right|\right|\le\varepsilon \tag{5}$$

即 k 阶的点最快用 k 次迭代使距离比值收敛.我们将所有 k 阶的点归为一类,称为 k 区域,记为 $zone(k)$.那么,距离比值分形广义 J 集就由若干个 k 区域构成:

$$DRJ=\bigcup_{k=1}^{\infty}zone(k) \tag{6}$$

命题 **3**. 如果映射 f 存在逆映射,那么对于 $zone(k+1)$ 中任意点 z, $\exists z'\in zone(k)$, 使得 $f^{-1}(z')=z$.

证明:对于任何 $z\in zone(k+1)$,由定义可得:

$$\left|L^k(z,z^*)-\left|f'(z^*)\right|\right|=\left|L^k(f^{-1}(z'),z^*)-\left|f'(z^*)\right|\right|=\left|L^{k-1}(z',z^*)-\left|f'(z^*)\right|\right|>\varepsilon,$$

$$\left|L^{k+1}(z,z^*)-\left|f'(z^*)\right|\right|=\left|L^{k+1}(f^{-1}(z'),z^*)-\left|f'(z^*)\right|\right|=\left|L^k(z',z^*)-\left|f'(z^*)\right|\right|\le\varepsilon.$$

由此可见,z' 满足 $zone(k)$ 的定义,故 $z'\in zone(k)$. □

推论 **1**. $f^{-1}(zone(k))=zone(k+1)$.

命题 3 说明对 $zone(k)$ 中的点进行逆迭代后会生成 $zone(k+1)$ 中的点,这样,就可以由 $zone(k)$ 逆迭代求出 $zone(k+1)$.推论 1 说明了图像中存在嵌套拓扑分布结构,当 $k\to\infty$ 时,图像具有无穷嵌套的自相似几何结构.

2 距离比值广义 J 集

根据命题 3 及推论 1,可以由 $zone(k)$ 逆迭代求出 $zone(k+1)$.我们首先求出 $zone(1)$ 的范围,然后对其不断进行逆迭代,可以得到 $zone(2)$,$zone(3)$,…,直至 $zone(n)$,n 为最大迭代次数,所有这些区域合并起来就可以得到完整的距离比值广义 J 集图像.

根据式(5),$zone(1)$ 中的点满足不等式 $\left|\frac{\left|f(z)-f(z^*)\right|}{\left|z-z^*\right|}-\left|f'(z^*)\right|\right|\le\varepsilon$,解之即可得出 $zone(1)$ 的范围.

按照以上的讨论,从 $zone(1)$ 开始不断做逆迭代,将不同的 $zone(k)$ 按不同颜色绘制到复平面上,可以得到彩色

的距离比值分形图.我们称这种生成分形图的方法为逆向迭代算法,详细步骤如下:

(1) 令 $k=1,n=10\ 000$,计算 $zone(k)$;

(2) 对 $zone(k)$中所有的点作逆迭代得到 $zone(k+1)$;

(3) 如果 $k<n$,那么 $k=k+1$,转(2);

(4) 将 $zone(1),zone(2),\ldots,zone(n-1),\ldots,zone(n)$按照不同的颜色绘制到复平面上,即可得到距离比值广义 J 集.

图 3(c)是采用逆向迭代算法绘制的复映射 $z\leftarrow z^2-1.001-0.05i$ 的距离比值分形图,图 3(a)和图 3(b)分别为其局部放大区域.图 5(a)是相应的采用逃逸时间算法绘制的 Julia 集.对比二者可以看出,DRJ 和 Julia 集的边界轮廓一致,但采用距离比值迭代方法绘制的分形图在映射收敛区域有着丰富的细部结构,具有明显的自相似性,而 Julia 集由于不能绘制映射收敛区域,相应的部位是大片的黑色区域.

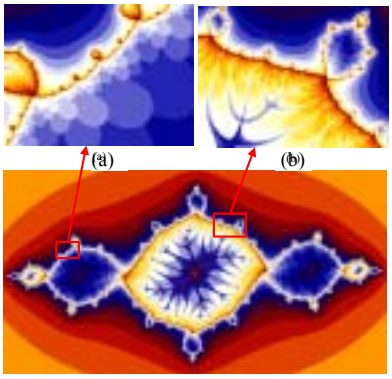


Fig.3 DRJ for complex mapping $f(z)=z^2-1.001-0.05i$

图 3 复映射 $f(z)=z^2-1.001-0.05i$ 的距离比值广义 J 集

由图 3 可以看出,DRJ 内部区域存在着明显的层次结构,越靠近边界,细节趋于复杂.图中存在两种结构特征,分叉和芽孢结构.分叉结构如图 3(b)所示,越靠近边界,其细节趋向于穷.图 3(c)沿边界生长着若干芽孢,具有层次自相似结构.这些层次对应着不同的 $zone(k)$,其中的点经过 k 次迭代收敛.这种层次覆盖结构也验证了推论 1 的结论,即不同区域之间存在着嵌套迭代的自相似结构.

采用距离比值迭代方法绘制的 DRJ 与逃逸时间算法绘制的 Julia 集边界一致,可以给出以下结论:

命题 **4**. 当 $\alpha>0$ 时,DRJ 为映射 f 的非无穷吸引不动点的吸引域,其边界是相应的 Julia 集,$zone(\infty)=J(f)$.

根据距离比值的定义,如果距离比值收敛,其必要条件是迭代点收敛到不动点,所以,距离比值分形中所有的点都在映射的吸引域中,而迭代发散的点显然不能使距离比值收敛,所以,DRJ 与映射的吸引域相同.由于 Julia 集为映射吸引域的边界,所以 DRJ 的边界与 Julia 集完全相同.二者的区别在于迭代方式的不同,DRJ 能够按照收敛次数绘制图像,从而构造出收敛区域的复杂结构.

从这个角度来看,当 $\alpha>0$ 时,距离比值迭代方法可以看作是一种绘制 Julia 集内部结构的方法.与以往绘制内部结构的方法[12−14]相比,距离比值迭代算法能够生成具有无限细节和自相似性的内部结构,该结构与 Julia 集边界共同构成距离比值分形结构.

当 $\alpha<0$ 时,复映射 $z\leftarrow z^{\alpha}+c$ 的吸引域发生了改变,所以迭代图形也有很大的变化.文献[16,17]分析了当 $\alpha<0$ 时 Julia 集的特性.采用逃逸时间算法并不能很好的绘制出这种情况下的迭代图像,原因在于绘制结果强烈依赖于逃逸半径,当逃逸半径增加时,图像逐渐稀疏,所以逃逸时间算法绘制的 Julia 集并不稳定.

当 $\alpha<0$ 时,距离比值方法能够绘制出丰富的图像.图 4 是复映射 $z\leftarrow z^{-2}+0.001+0.3i$ 的距离比值广义 J 集及其放大图像.与图 5(b)中相应的 Julia 集相比,二者形状基本一致,但 DRJ 具有更加细腻的细节,可以绘制整个复平面上的迭代结构,而 Julia 集只能粗糙地表现逃逸区和稳定区的边界.在这种意义上,DRJ 是对 Julia 集的细化和

精化,能够表现 Julia 集无法绘制的细节.距离比值迭代方法克服了逃逸时间算法的缺点,其迭代图形保持稳定,不随着迭代阈值的变化而变化.

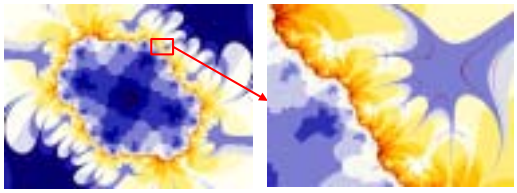


Fig.4 DRJ for $z\leftarrow z^{-2}+0.001+0.3i$ and zoomed image

图 4 复映射 $z\leftarrow z^{-2}+0.001+0.3i$ 距离比值广义 J 集及其部分放大图像

(a) $z\leftarrow z^{2}-1.001-0.05i$ (b) $z\leftarrow z^{-2}+0.001+0.3i$

Fig.5 Julia sets generated by escape time algorithm

图 5 采用逃逸时间算法绘制的 Julia 集

3 距离比值广义 M 集

对于含参映射 f_c,不同的参数 c 使映射 f 有不同的迭代性质.将所有能够使映射 f_c 的距离比值收敛的参数 c 归为一个集合,称为距离比值广义 M 集(distance ratio Mandelbrot set,简称 DRM),其定义如下:

$$DRM=\left\{c\in C:\left\{\lim_{k\to\infty}L_c^k(0,z^*)\to\left|f'(z^*)\right|\right\}\right\} \tag{7}$$

注意等式(7)中距离比值迭代的初始点选为点(0,0)和不动点 z^*,这是因为点(0,0)是复映射 $f_c(z)=z^{\alpha}+c$ 的临界点,不动点 z^*在迭代过程中保持不变,这样就可以绘制出完整的距离比值广义 M 集的结构.

距离比值迭代收敛,等价于每次迭代后距离比值不断缩小,最终得到一个稳定值.所以可以给出 DRM 的等价定义:

$$DRM=\left\{c\in C:\left\{\exists k\in N,\left|L_c^{k+1}(0,z^*)-L_c^k(0,z^*)\right|\le\varepsilon\right\}\right\} \tag{8}$$

按照等式(8)可以得出绘制 DRM 的方法,其基本思想是搜索要绘制的区域,计算其中迭代点的距离比值的收敛次数 k,根据 k 选择相应的颜色在复平面上绘制迭代点,最终得到一个彩色分形图.令绘制区域 D 为中心在原点的长方形区域,算法的具体步骤如下:

1. 令最大迭代次数 n=10000;迭代阈值ε=0.0000001;k=1.
2. 在要绘制的区域 D 中选取迭代点 c,构造映射 $f(z,c)$;令 $z_1=(0,0)$,z_2 为映射 $f(z,c)$的不动点 z^*.
3. 如果 $k<n$,做迭代 $f^k(z_1)=f(f^{k-1}(0,c))$,$f^k(z_2)=f(f^{k-1}(z^*,c))$,否则转步骤 6.
4. 计算距离比值: $L^k(z_1,z_2)=\dfrac{\left|f^{k+1}(0)-f^{k+1}(z^*)\right|}{\left|f^k(0)-f^k(z^*)\right|}$.
5. 如果$|L^k(0,z^*)-L^{k-1}(0,z^*)|>\varepsilon$,$k=k+1$,转步骤 3.
6. 根据迭代次数 k 获取相应的颜色,在复平面上绘制点 c.
7. 重复过程 2~6,直到穷尽区域 D 内的所有点,即可获得映射 f 的距离比值广义 M 集.

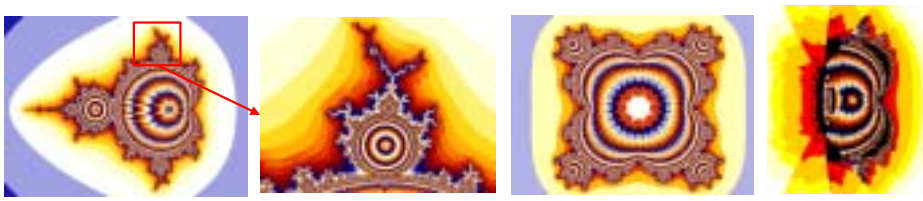
图 6(a)是复映射 $z\leftarrow z^{-2}+c$ 的距离比值广义 M 集,将其放大可以看出其中存在复杂的结构,如图 6(b)所示.图

6(c)和图 6(d)分别是α=5 和α=1.4 时的图像.观察这些图像,与 M 集图比较,其边界完全相同,但在内部收敛区域存在复杂的嵌套层次结构.这些层次代表了迭代点距离比值的收敛速度,内层收敛速度较快,外层收敛速度较慢,边界处的收敛次数趋向于无穷.每层由若干个类似花瓣的小区域构成,如图 6(a)的中心部分.内层芽孢尺寸较大,数目较小;外层芽孢数目逐渐增多,直至无穷.

DRM 的典型特征之一就是这种层次花瓣结构.该结构反映了参数平面上映射收敛性的分布情况,DRM 也可以看作是参数平面上非扩张映射的迭代收敛速度的可视化图像.

将图 6 与文献[18]所绘出的 M 集图相比,可以发现二者形状完全一致.所以,当α>1 时,距离比值迭代方法也可以作为一种绘制 M 集内部结构的方法.

由于 DRM 与 M 集存在着内在的联系性,所以对于 M 集构图性质的很多结论,如对称性,旋转性等,都可以适用于 DRM,详细关于这方面的资料可以参见文献[19,20].



(a) α=2 (b) Zoomed image for α=2 (c) α=5 (d) α=1.4

(a) α=2 (b) α=2 的放大图像 (c) α=5 (d) α=1.4

Fig.6 DRM for $z\leftarrow z^{\alpha}+c$

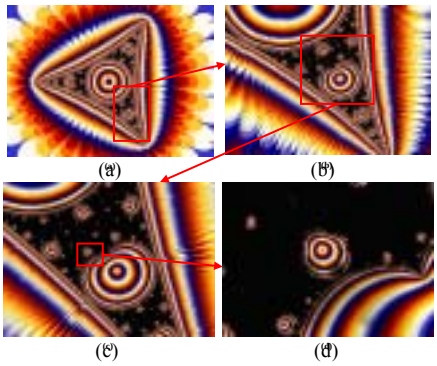
图 6 复映射 $z\leftarrow z^{\alpha}+c$ 的距离比值广义 M 集

当α<0 时,采用距离比值迭代法绘制的 DRM 克服了逃逸时间算法的缺点,能够生成稳定复杂的分形图.

采用距离比值迭代方法绘制的 DRM 图像克服了逃逸时间算法的缺点,能够生成稳定复杂的图像.图 7 给出了当α=–2 时的 DRM 及其局部放大图像.可以总结 DRM 的构图特征如下:

1. 稳定区域包含着不稳定区域.DRM 图中彩色部分是稳定区域,表示了距离比值的收敛速度.中心黑色的部分表示不稳定区域.不稳定区域被稳定区域包围在原点附近区域.

2. 稳定区域包括两种结构特征:外层的花瓣结构,内层的星群结构.



(a) (b) (c) (d)

Fig.7 Distance ratio fractal image for complex mapping $z\leftarrow z^{-2}+c$

图 7 α=–2 时的 DRM 及其局部放大图像 $z\leftarrow z^{-2}+c$

图像外部分布着层次覆盖的花瓣结构,并且向中心区域逐渐缩小,最终形成类似曲边 n 边形的结构,其中n=1+|α|.曲边 n 边形中心部位存在核心行星,在其外围依次分布着二级卫星以及更小的卫星.这些卫星逐级排列并逼近外围多边形的角点.中心行星的边界存在 n 个弧状突起,与外围多边形相切于各边中点.将图像放大可见,内部星群结构和外部花瓣结构并不接触,二者中间被不稳定区域分隔.

图 8 给出了当α=–2 时的 M 集图像,与图 7(a)相比,其外部轮廓与 DRM 中的曲边三角形一致.将 M 集和 DRM 绘制到一张图像上,得到图 9.可以看出,除中心卫星部分重叠外,逃逸时间算法生成的 M 集和距离比值迭代方法生成的广义 M 集完全吻合.如果将逃逸时间算法的逃逸半径增大,中心行星的尺寸会缩小.此时 DRM 与 M 集互为补集,完整的覆盖了复平面区域.从这种意义上说,当α<0 时,距离比值迭代方法可以作为绘制 M 集外部结构的方法.基于以上讨论,给出以下猜想:

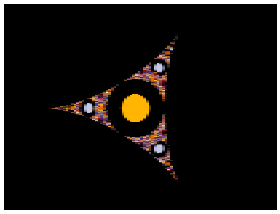


Fig.8 Mandelbrot set for α=–2

图 8 α=–2 时的 M 集图像

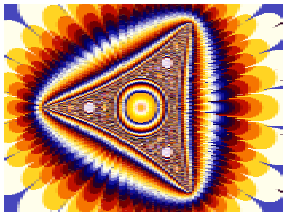


Fig.9 DRM and M-set for α=–2

图 9 α=–2 时 M 集与 DRM 混合图像

猜想:当α<0 时,DRM 图像有两部分组成:外层曲边多边形和中心行星.曲边多边形有$|\alpha|+1$ 条边,其外层覆盖着层次芽孢结构,并向外扩展;中心行星有$|\alpha|+1$ 个突起,与外层曲边逼近于其中点;中心行星周边有$|\alpha|+1$ 个卫星,卫星周围又由若干更小的卫星,形成自相似结构;DRM 与 M 集互为补集,二者共同覆盖了整个复平面.

4 结束语

本文提出了一种构造分形图的新方法:距离比值迭代方法,并使用该方法绘制了广义 M-J 集图.距离比值迭代方法采用两点的距离比值进行迭代,可以克服逃逸时间算法的缺陷,绘制复映射收敛区域的分形图.距离比值迭代方法可以绘制大多数解析复映射的迭代分形图,如三角函数、指数函数等,从而反映这些映射的迭代收敛性质.

采用距离比值迭代方法绘制的广义 M-J 集与逃逸时间算法绘制的 M-J 集既有联系又有区别.当α>1 时,距离比值广义 M-J 集在映射收敛区域有着复杂的自相似结构,可以作为绘制 M-J 集内部结构的算法;当α<0 时,距离比值广义 M 集是 M 集的补集,其内部轮廓与 M 集吻合,二者完整的覆盖了整个复平面.

本文仅讨论了复平面上的距离比值迭代分形.按照距离比值的定义,完整的距离比值分形应是四维集合.可以借鉴四元数三维 Julia 集的绘制方法,结合计算机图形学中的真实感绘制技术,研究高维距离比值迭代分形的绘制方法和构图性质,拓展三维分形物体的应用范围.

References:

[1] Mandelbrot BB. The Fractal Geometry of Nature. W.H. Freeman, 1982. 5–47.

[2] Spehar B, Clifford C, Newell B, Taylor R. Universal aesthetic of fractals. Computers & Graphics, 2003,27(5):813–820.

[3] Liaw SA. Find the mandelbrot-like sets in any mapping. Fractals, 2002,10(2):137–146.

[4] Buchanan W, Gomatam J, Steves B. Generalized Mandelbrot sets for meromorphic complex and quaternionic maps. Int'l Journal of Bifurcation and Chaos, 2002,12(8):1755–1777.

[5] Leys J. Sphere inversion fractals. Computers & Graphics, 2005,29(3):463–466.

[6] Wang XY. Researches on some internal structures of the general Mandelbrot sets for negative real index number. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2001,13(10):868–872 (in Chinese with English abstract).

[7] Wang XY, Liu XD, Zhu WY, Gu SS. Analysis of c-plane fractal images from $z\leftarrow -z^{\alpha}+c$ for (α<0). Fractals, 2000,8(3):307–314.

[8] Wang XY, Shi QJ. The generalized M-J sets of complex exponent mapping. Progress in Natural Science, 2004,14(8):934–940 (in Chinese with English abstract).

[9] Chen N, Zhu WY.M-Fractal image from complex mapping $z\leftarrow -z^{w}+c$ ($w=\alpha+i\beta$) in the complex C-plane. Journal of Computer Research and Development, 1997,34(12):899–907 (in Chinese with English abstract).

[10] Chen N, Zhu WY. J fractal image constructed from complex mapping $z \leftarrow z^w + c (w=\alpha+\mathrm{i}\beta)$. Journal of Computer Research and Development, 1998,35(11):1020−1023 (in Chinese with English abstract).

[11] Chen N, Zhu WY. General Mandelbrot set and Julia set constructed by complex mapping $\left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \overline{(z^m)} + c \right\}$. Journal of Computer Research and Development, 1997,34(5):393−396 (in Chinese with English abstract).

[12] Hooper KJ. A note on some internal structures of the Mandelbrot set. Computers & Graphics, 1991,15(2):295−297.

[13] Pickover CA. Chaos and Fractals: A Computer Graphical Journey. Elsevier Science, 1998. 367−374.

[14] Wang XY. Fractal structures of the non-boundary region of the generalized Mandelbrot set. Progress in Natural Science, 2001, 11(9):693−700 (in Chinese with English abstract).

[15] Wang XY, Chang PJ. Using lyapunov exponent and period points to analysis generalized M-J sets. Progress in Natural Science, 2005,15(4):472−480 (in Chinese with English abstract).

[16] Dhurandhar SV. Analysis of z-plane fractal images from $z \leftarrow z^\alpha + c$ for $\alpha<0$. Computers & Graphics, 1993,17(1):89−94.

[17] Gujar UG, Bhavsar VC, Vangala N. Fractal images from $z \leftarrow z^\alpha + c$ in the complex z-plane. Computers & Graphics, 1992,16(1): 45−49.

[18] Gujar UG, Bhavsar VC. Fractals from $z \leftarrow z^\alpha + c$ in the complex c-plane. Computers & Graphics, 1991,15(3):441−449.

[19] Sasmor JC. Fractals for functions with rational exponent. Computers & Graphics, 2004,28(4):601−615.

[20] Huang YN. Global analysis of the Mandelbrot set and the general Mandelbrot set. China Science (Series A), 1991,(8):823−830 (in Chinese with English abstract).

附中文参考文献:

[6] 王兴元.负实数阶广义 M 集内部结构的探讨.计算机辅助设计与图形学学报,2001,13(10):868−872.

[8] 王兴元,石其江.一类复指数映射的广义 M-J 集.自然科学进展,2004,14(8):934−940.

[9] 陈宁,朱伟勇.复映射 $z \leftarrow z^w + c$ $(w=\alpha+\mathrm{i}\beta)$构造 M 集.计算机研究与发展,1997,34(12):899−907.

[10] 陈宁,朱伟勇.复映射 $z \leftarrow z^w + c$ $(w=\alpha+\mathrm{i}\beta)$构造 J 分形图.计算机研究与发展,1998,35(11):1020−1023.

[11] 陈宁,朱伟勇.复映射 $\left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \overline{(z^m)} + c \right\}$.构造广义 Mandelbrot 集及 Julia 集.计算机研究与发展,1997,34(5):393−396.

[14] 王兴元.复 C 平面上广义 M 集非边界区域分形结构的探讨.自然科学进展,2001,11(9):693−700.

[15] 王兴元,常沛军.利用 Lyapunov 指数和周期点查找技术分析广义 M-J 集的分形特征.自然科学进展,2005,15(4):472−480.

[20] 黄永念.Mandelbrot 集及其广义情况的整体解析特性.中国科学(A 辑),1991,(8):823−830.

张锡哲(1978－),男,辽宁沈阳人,博士,副教授,主要研究领域为分形,数据挖掘.

吕天阳(1979－),男,博士生,讲师,主要研究领域为数据挖掘,分形.

王钲旋(1945－),男,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机图形学,计算几何,分形.