有理 Bézier 曲线离散终判准则的改进*

章仁江[1,2,3+], 王国瑾[1,2]

[1](浙江大学 计算机图象图形研究所,浙江 杭州 310027)
[2](浙江大学 CAG&CG 国家重点实验室,浙江 杭州 310027)
[3](中国计量学院 数学系,浙江 杭州 310034)

Improvement of the Termination Criterion for Subdivision of the Rational Bézier Curves

ZHANG Ren-Jiang[1,2,3+], WANG Guo-Jin[1,2]

[1](Institute of Computer Images and Graphics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)
[2](State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)
[3](Department of Mathematics, China Institute of Metrology, Hangzhou 310034, China)
+ Corresponding author: Phn: 86-571-88484332, E-mail: renjiang@mail.hz.zj.cn
Received 2002-04-09; Accepted 2002-08-14

Zhang RJ, Wang GJ. Improvement of the termination criterion for subdivision of the rational Bézier curves. *Journal of Software*, 2003,14(10):1813~1818.
http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/1813.htm

Abstract: By using some new ideas of form conversion and expression simplification for rational Bézier curves, also by using Cauchy's inequality, some new close estimates for the heights of degree n (n=2,3,4) rational Bézier curves which are in common use in geometric shape design are investigated. Thus the former termination criterions for subdivision of rational Bézier curves are improved. This work is very valuable for reducing computing time and increasing efficiency.
Key words: rational Bézier curves; subdivision; termination criterion

摘 要: 应用有理 Bézier 曲线形式转化和表达式简化的新思想,应用 Cauchy 不等式,对于几何外形设计中最常用的有理 n(n=2,3,4)次 Bézier 曲线的高度,作出了新的精密估计,从而进一步改进了以往有关有理 Bézier 曲线的离散终判准则.这些改进对减少机时、提高效率有着至关重要的作用.
关键词: 有理 Bézier 曲线;离散;终判准则
中图法分类号: TP391 **文献标识码**: A

求两条参数曲线的交点是计算机辅助几何设计(CAGD)及加工的一个基本问题.由于 CAGD 中大多数曲线是用多项式或有理多项式来表示的,它们的交就是这些多项式或有理多项式的方程组的解集,从而求交从数学

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60173034 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.2002CB312101 (国家重点基础研究发展规划(973))

第一作者简介: 章仁江(1967-),男,浙江黄岩人,博士生,副教授,主要研究领域为计算机辅助几何设计,逼近论.

上来说属于非线性问题,是一个难题[1].解决这一难题的方法之一是离散(subdivision algorithm)求交.因而曲线离散的算法和终判准则是离散求交的两个关键问题.离散求交的基本思想是"分割"、"化直".所谓"分割",是指用中点离散算法把曲线分割成小段曲线;所谓"化直",是指对分割所得到的每一小段曲线用连接其两端点的线段来近似代替.那么,在什么条件下"分割"才停止,而"化直"就开始呢?这个条件就是所谓曲线离散终判准则.这一准则的优劣是决定计算量大小的关键.对于如下的 n 次 Bézier 曲线:

$$\boldsymbol{P}_n(t)=\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\boldsymbol{P}_i,\ \boldsymbol{P}_i\in R^3, B_i^n(t)=C_n^i t^i(1-t)^{n-i}, 0\le t\le 1, \tag{1}$$

Lane 与 Riesenfeld[2]于 1980 年提出如下的"化直"准则:

$$d_i := d(P_i, l(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_n))\le\varepsilon,\ i=1,2,...,n-1. \tag{2}$$

这里,$l(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_n)$ 表示 $\boldsymbol{P}_0$ 与 $\boldsymbol{P}_n$ 两点相连的直线段,$d(\cdot,-)$ 表示欧氏距离,ε是预给精度.这一条件比较简单、粗糙.1991 年,文献[3]对此作了很大的改进.让 $h_n(t)$ 表示 n 次有理 Bézier 曲线在参数为 t 处的高度,即

$$h_n(t)=d(\boldsymbol{P}_n(t), l(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_n)),\ 0\le t\le 1. \tag{3}$$

文献[3]给出了以下定理:

定理 A. 对 n 次有理 Bézier 曲线:

$$\boldsymbol{P}_n(t)=\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\omega_i\boldsymbol{P}_i\Big/\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\omega_i,\ \boldsymbol{P}_i\in R^3, \omega_i>0, 0\le t\le 1, \tag{4}$$

有

$$h_n\le\left\{1-\left[1+\frac{(\max\limits_{i=0,n}\omega_i)(\max\limits_{1\le i\le n-1}\omega_i)}{\omega_0\omega_n}(2^{n-1}-1)\right]^{-1}\right\}d. \tag{5}$$

这里,

$$d=\max_{1\le i\le n-1}d_i. \tag{6}$$

由此定理可以得出以下推论:

推论. 对 n 次 Bézier 曲线(1)有

$$h_n(t)\le d(2^n-2)/2^n. \tag{7}$$

由此,曲线(1)的"化直"准则可改为

$$d(2^n-2)/2^n<\varepsilon. \tag{8}$$

运用不等式的技巧,文献[4]对定理 A 的结果作了改进,但是没有给出当 $n=2,3,4$ 时,有理 Bézier 曲线更精密的高度估计.文献[5]对 2 次和 3 次有理 Bézier 曲线的导矢界给出了新的估计.考虑到低次有理 Bézier 曲线在外形设计应用中占据主要地位,本文利用有理 Bézier 曲线形式转化和表达式简化的新思想,应用 Cauchy 不等式的新工具,再给出 $n=2,3,4$ 时有理 Bézier 曲线高度的精密估计,这些估计对减少机时、提高效率有着至关重要的作用.

1 一些预备知识

借助于如下的预备知识,我们可把本文的研究目标进行适当的改造.对于有理 Bézier 曲线(4),我们可以作一个保持形状不变的分式变换:

$$t=\frac{u}{u+\sqrt[n]{\dfrac{\omega_n}{\omega_0}}(1-u)},\ 0\le u\le 1.$$

将其化为标准形式(以下为讨论方便,仍将新参数 u 记为 t):

$$\boldsymbol{P}_n(t)=\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\omega_i^*\boldsymbol{P}_i\Big/\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\omega_i^*,\ \boldsymbol{P}_i\in R^3, \omega_i^*>0, 0\le t\le 1. \tag{9}$$

其中

$$\omega_i^* = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\omega_n}\right)^i \left(\frac{1}{\omega_0}\right)^{n-i}}\,\omega_i, i=1,2,\ldots,n. \tag{10}$$

特别地,

$$\omega_0^* = 1, \omega_n^* = 1.$$

以下定理已由文献[4]给出.

定理 1. 对 n 次有理 Bézier 曲线(4),若 d_i(如式(2)所定义)已给定,则当控制顶点 $\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\ldots,\boldsymbol{P}_n$ 共面,且 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\ldots,\boldsymbol{P}_{n-1}$ 位于直线 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_n$ 的同侧时,曲线在对应参数 t 处有最大的高度.

由定理 1 可知,我们可将空间有理 Bézier 曲线(9)的高度估计转化为平面有理 Bézier 曲线的高度估计.进一步地,由 Bézier 曲线的几何不变性,不妨选取 $\boldsymbol{P}_0$ 与 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_n$ 分别为原点与 x 轴,则曲线在对应参数 t 处的高度为

$$h_n(t) \le \frac{\sum_{i=1}^{n-1} B_i^n(t)\omega_i^* d_i}{\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\omega_i^*}, 0 \le t \le 1. \tag{11}$$

这里,d_i 与 ω_i^* 分别如式(2)与式(10)所定义,以下同.这里指出,当控制顶点 $\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\ldots,\boldsymbol{P}_n$ 共面,且 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\ldots,\boldsymbol{P}_{n-1}$ 位于直线 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_n$ 的同侧时,式(11)等号成立.

2 当 n=2 时的估计

定理 2. 对 2 次有理 Bézier 曲线(4)(n=2),设 ω_1^* 如式(10)所示,则

$$\max_{0\le t\le 1} h_2(t) = \frac{\omega_1^* d_1}{1+\omega_1^*} = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \sqrt{\omega_0\omega_2}} d_1. \tag{12}$$

证明:因为 2 次有理 Bézier 曲线的控制顶点共面,故式(11)恒取等号,得到

$$h_2(t) = \frac{2\omega_1^* d_1 t(1-t)}{(1-t)^2 + 2\omega_1^* t(1-t) + t^2} = f_2[2t(1-t)].$$

这里

$$f_2(u) = \frac{\omega_1^* d_1 u}{1+(\omega_1^*-1)u}.$$

所以

$$\max_{0\le t\le 1} h_2(t) = \max_{0\le u\le 0.5} f_2(u).$$

直接计算得出

$$f_2'(u) = \frac{\omega_1^* d_1}{[1+(\omega_1^*-1)u]^2} > 0,$$

所以有

$$\max_{0\le t\le 1} h_2(t) = f_2(0.5).$$

这就是式(12),定理证毕. □

这里指出,式(12)优于当 $n=2$ 时由式(5)给出的估计式.这是因为

$$\frac{\omega_1}{\omega_1+\min(\omega_0,\omega_2)} d_1 \ge \frac{\omega_1}{\omega_1+\sqrt{\omega_0\omega_2}} d_1.$$

3 当 n=3 时的估计

定理 3. 对 3 次有理 Bézier 曲线(4)(n=3),设 ω_1^*,ω_2^* 如式(10)所示,记 $m=\min(\omega_1^*,\omega_2^*)$,则有如下 3 种估计式:

(a)

$$h_3(t) \le \frac{3}{1+3m} \max(\omega_1^* d_1, \omega_2^* d_2); \tag{13}$$

(b)

$$h_3(t) \le \frac{3\sqrt{\omega_1^{*2}+\omega_2^{*2}}}{\sqrt{2}+3\sqrt{\omega_1^{*2}+\omega_2^{*2}}}\max(d_1,d_2); \tag{14}$$

(c) 分两种情况:

(1) 当 $0<m\le\frac{7}{3}$ 时,

$$h_3(t) \le \frac{3}{1+3m}\sqrt{\frac{(\omega_1^* d_1)^2+(\omega_2^* d_2)^2}{2}}; \tag{15}$$

(2) 当 $m\ge\frac{7}{3}$ 时,

$$h_3(t) \le \frac{6}{6m+\sqrt{12m-3}-3}\sqrt{\frac{\sqrt{12m-3}-1}{\sqrt{12m-3}+3}}\sqrt{(\omega_1^* d_1)^2+(\omega_2^* d_2)^2}\,. \tag{16}$$

证明:由式(11)可知

$$h_3(t) \le \frac{3t(1-t)}{(1-t)^3+3m(1-t)^2t+3m(1-t)t^2+t^3}\max(\omega_1^* d_1,\omega_2^* d_2) \le \frac{3t(1-t)}{1+3(m-1)t(1-t)}\max(\omega_1^* d_1,\omega_2^* d_2).$$

由此,我们立即获得估计式(13).

其次,因为

$$h_3(t) \le \left\{1-\frac{(1-t)^3+t^3}{(1-t)^3+3m(1-t)^2t+3m(1-t)t^2+t^3}\right\}\max\,(d_1,d_2)$$
$$\le \left\{1-[1+\frac{3\omega_1^* t(1-t)^2+3\omega_2^*(1-t)t^2}{t^3+(1-t)^3}]^{-1}\right\}\max\,(d_1,d_2),$$

由 Cauchy 不等式有

$$3\omega_1^* t(1-t)^2+3\omega_2^*(1-t)t^2 \le 3\sqrt{\omega_1^{*2}+\omega_2^{*2}}\sqrt{t^2(1-t)^4+t^4(1-t)^2} \le \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\omega_1^{*2}+\omega_2^{*2}}{2}},\ 0\le t\le 1.$$

再联合显然的不等式

$$t^3+(1-t)^3 \ge \frac{1}{4},\ 0\le t\le 1,$$

我们可获得估计式(14).

最后证明估计式(15)和式(16).再利用 Cauchy 不等式,有

$$h_3(t) \le 3\sqrt{(\omega_1^* d_1)^2+(\omega_2^* d_2)^2}\sqrt{\frac{t^2(1-t)^4+t^4(1-t)^2}{\left[(1-t)^3+3\omega_1^*(1-t)^2t+3\omega_2^*(1-t)t^2+t^3\right]^2}}$$
$$\le 3\sqrt{(\omega_1^* d_1)^2+(\omega_2^* d_2)^2}\sqrt{\frac{t^2(1-t)^2[1-2t(1-t)]}{[1+3(m-1)t(1-t)]^2}}.$$

令

$$f_3(u)=\frac{u^2(1-u)}{[1+3(m-1)u]^2},\ u=t(1-t).$$

为求 $f_3(u)$ 在 $[0,1/4]$ 上的最大值,对 $f_3(u)$ 求导,得到

$$f_3'(u)=\frac{2u[1+3(m-1)u][1-3u-3(m-1)u^2]}{[1+3(m-1)u]^4}.$$

以下分两种情况:

(1) 当 $0 \le m \le \frac{7}{3}$ 时,容易证明 $f_3' \ge 0, 0 \le u \le \frac{1}{4}$,,从而

$$\max_{0\le u\le 1/4} f_3(u) = f_3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2(1+3m)^2},$$

这样就有式(15).

(2) 当 $m \ge \frac{7}{3}$ 时,容易证明 $u = \frac{2}{3+\sqrt{12m-3}}$ 是 $f_3(u)$ 在 $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ 上的驻点,且 $f_3(u)$ 在此驻点取得最大值,即

$$\max_{0\le u\le 1/4} f_3(u) = f_3\left(\frac{2}{3+\sqrt{12m-3}}\right) = \left(\frac{2}{6m+\sqrt{12m-3}-3}\right)^2 \frac{\sqrt{12m-3}-1}{\sqrt{12m-3}+3},$$

这样就获得式(16),定理证毕. □

这里指出,在一般情况下,估计式(14)优于当 $n=3$ 时由式(5)给出的估计式.这是因为,当 $n=3$ 时,式(5)给出

$$h_3(t) \le \frac{3\max(\omega_1,\omega_2)}{3\max(\omega_1,\omega_2)+\min(\omega_0,\omega_3)}\max(d_1,d_2),$$

同时又有

$$\frac{3\sqrt{\omega_1^{*2}+\omega_2^{*2}}}{\sqrt{2}+3\sqrt{\omega_1^{*2}+\omega_2^{*2}}} \le \frac{3\max(\omega_1,\omega_2)}{3\max(\omega_1,\omega_2)+\min(\omega_0,\omega_3)}.$$

估计式(13)、式(14)和式(16)在不同场合各有优劣,但是式(15)总比式(13)要好.建议在使用时比较它们的大小,取其中的较小值.

4 当 n=4 时的估计

定理 4. 对 4 次有理 Bézier 曲线(4)(n=4),设 $\omega_1^*,\omega_2^*,\omega_3^*$ 如式(10)所示,记 $m=\min(\omega_1^*,\omega_2^*,\omega_3^*)$,则有如下两个不等式:

$$h_4(t) \le \frac{7}{1+7m}\max(\omega_1^*d_1,\omega_2^*d_2,\omega_3^*d_3); \tag{17}$$

$$h_4(t) \le \frac{\sqrt{14\omega_1^{*2}+21\omega_2^{*2}+14\omega_3^{*2}}}{1+\sqrt{14\omega_1^{*2}+21\omega_2^{*2}+14\omega_3^{*2}}}\max(d_1,d_2,d_3) \tag{18}$$

证明:由式(11)可知:

$$\begin{aligned} h_4(t) &\le \frac{4\omega_1^*d_1(1-t)^3t+6\omega_2^*d_2(1-t)^2t^2+4\omega_3^*d_3(1-t)t^3}{(1-t)^4+4\omega_1^*(1-t)^3t+6\omega_2^*(1-t)^2t^2+4\omega_3^*(1-t)t^3+t^4} \\ &\le \frac{4(1-t)^3t+6(1-t)^2t^2+4(1-t)t^3}{(1-t)^4+4m(1-t)^3t+6m(1-t)^2t^2+4m(1-t)t^3+t^4}\max(\omega_1^*d_1,\omega_2^*d_2,\omega_3^*d_3) \\ &\le \frac{4(1-t)t-2(1-t)^2t^2}{1+4(m-1)(1-t)t-2(m-1)(1-t)^2t^2}\max(\omega_1^*d_1,\omega_2^*d_2,\omega_3^*d_3). \end{aligned} \tag{19}$$

令
$$f_4(u) = \frac{4u-2u^2}{1+4(m-1)u-2(m-1)u^2}, u=(1-t)t.$$

下面我们来求 $f_4(u)$ 在 $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ 上的最大值.对 $f_4(u)$ 求导,得到

$$f_4' = \frac{4(1-u)}{[1+4(m-1)u-2(m-1)u^2]^2} > 0,$$

从而有

$$\max_{0\le u\le 1/4} f_4(u)=f_4\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{1+7m}.$$

这样就有式(17).再由式(19)有

$$h_4(t)\le\left\{1+\frac{(1+t)^4+t^4}{4\omega_1^*(1-t)^3t+6\omega_2^*(1-t)^2t^2+4\omega_3^*(1-t)t^3}\right\}^{-1}\max(d_1,d_2,d_3).$$

利用 Caucky 不等式可以得到

$$4\omega_1^*(1-t)^3t+6\omega_2^*(1-t)^2t^2+4\omega_3^*(1-t)t^3\le\frac{\sqrt{14\omega_1^{*^2}+21\omega_2^{*^2}+14\omega_3^{*^2}}}{8},0\le t\le 1.$$

联合显然的不等式

$$(1-t)^4+t^4\ge\frac{1}{8},0\le t\le 1,$$

即可得到式(18),证毕. □

这里指出,在一般情况下,估计式(18)优于当 $n=4$ 时由式(5)给出的估计式.现证明如下,当 $n=4$ 时,式(5)给出了

$$h_4(t)\le\frac{7\max\limits_{i=1,2,3}\omega_i}{\min\limits_{i=0,4}\omega_i+7\max\limits_{i=1,2,3}\omega_i}\max(d_1,d_2,d_3).$$

不妨假设 $\min\limits_{i=0,4}\omega_i=\omega_0$,则由式(10)得到

$$\omega_1^*\le\frac{\omega_1}{\omega_0};\omega_2^*\le\frac{\omega_2}{\omega_0};\omega_3^*\le\frac{\omega_3}{\omega_0}.$$

由上式有

$$\frac{\sqrt{14\omega_1^{*^2}+21\omega_2^{*^2}+14\omega_3^{*^2}}}{1+\sqrt{14\omega_1^{*^2}+21\omega_2^{*^2}+14\omega_3^{*^2}}}\le\frac{\sqrt{14\omega_1^2+21\omega_2^2+14\omega_3^2}}{\omega_0+\sqrt{14\omega_1^2+21\omega_2^2+14\omega_3^2}}\le\frac{7\max\limits_{i=1,2,3}\omega_i}{\min\limits_{i=0,4}\omega_i+7\max\limits_{i=1,2,3}\omega_i}.$$

至此,我们就完成了证明.这里指出,式(17)与式(18)在不同场合下各有优劣,建议将它们同时使用,取其中的较小者.

References:

[1] Sederberg TW, Parry SR. Comparison of three curve intersection algorithms. Computer Aided Design, 1986,18(1):58~63.

[2] Lane JM, Riesenfeld RF. A theoretical development for the computer generation and display of piecewise polynomial surface. IEEE Transactions on PAMI, 1980,PAMI-2(1):35~46.

[3] Wang GJ, Xu W. The termination criterion for subdivision of the rational Bézier curves. Graphical Models and Image Processing, 1991,53(1):93~96.

[4] Zhang RJ, Wang GJ. The improvement of the termination criterion for subdivision of the rational Bézier curves. Journal of Zhejiang University SCIENCE, 2003,4(1):47~52.

[5] Hermann T. On the derivatives of second and third degree rational Bézier curves. Computer Aided Geometric Design, 1999,16(3):157~163.