

一类平面参数曲线的保单调插值*

潘永娟^{1,2,3}, 王国瑾^{1,2+}

¹(浙江大学 计算机图像图形研究所, 浙江 杭州 310027)

²(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

³(浙江工业大学 应用数学系, 浙江 杭州 310032)

Monotonicity-Preserving Interpolation with a Kind of Plane Parameter Curve

PAN Yong-Juan^{1,2,3}, WANG Guo-Jin^{1,2+}

¹(Institute of Images and Graphics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

²(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

³(Department of Applied Mathematics, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, China)

+ Corresponding author: E-mail: amawgj@mail.hz.zj.cn

<http://www.zju.edu.cn>

Received 2002-12-30; Accepted 2003-03-05

Pan YJ, Wang GJ. Monotonicity-Preserving interpolation with a kind of plane parameter curve. *Journal of Software*, 2003,14(8):1439~1447.

<http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/1439.htm>

Abstract: In the geometric shape design, shape preserving interpolation of curve/surface is an important and difficult subject in which both monotonicity-preserving and convexity-preserving interpolation are two basic contents. In this paper, the monotonicity-preserving interpolation of a kind of plane parameter curve with a shape control parameter is investigated. The basic idea is as follows: first, a kind of plane α -B-spline interpolation curve with a shape control parameter α is constructed; then, by converting the first derivatives of the curve into Bernstein polynomial, the positive conditions of Bernstein polynomial can be used to get the necessary and sufficient conditions for the monotonicity of α -B-spline interpolation curves, i.e., the range of the parameter α . Therefore, monotone-preserving interpolating curves can be obtained succinctly. Numerical examples illustrate the correctness and the validity of theoretical reasoning. In virtue of its convenience and efficiency, this method is hopeful to be widely applied to engineering and practice.

Key words: interpolation; α -B-spline; shape parameter; monotonicity-preserving; Bernstein polynomial

摘要: 曲线、曲面的保形插值是几何外形设计的一个重点和难点课题,而保单调和保凸是保形的两个基本内容.研究了一类带有形状可调参数的平面参数曲线的保单调插值方法.其基本思想是:首先构造带有形状可调参数 α 的一类平面 α -B样条插值曲线,再把其一阶导矢的两个分量分别转化为 Bernstein 多项式,从而利用 Bernstein

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60173034 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.2002CB312101 (国家重点基础研究发展规划(973))

第一作者简介: 潘永娟(1975-),女,浙江丽水人,博士生,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学,数值逼近.

多项式的正性条件,得到此曲线为单调的充要条件,即形状参数 α 的取值范围,简单、快捷地实现此参数样条曲线的保单调插值.实例计算及绘图验证了理论推导的正确性与有效性.该方法的方便、有效使其易于在工程实践中获得广泛应用.

关键词: 插值; α -B 样条曲线;形状参数;保单调;Bernstein 多项式

中图分类号: TP391 文献标识码: A

在自由型曲线曲面的设计中,保形具有重要的意义.保形中最基本的内容是保单调和保凸,即给定一个单调或凸的数据集,希望找到同样也是单调或凸的曲线曲面来插值或逼近给定的数据集.

众所周知,在外形设计和逆向工程中最传统和广泛应用的多项式样条插值曲线/曲面^[1-3]对给定点集的插值往往不是保形的.事实上,对于函数式样条插值曲线/曲面而言,至多只需保证给定插值点处的一阶或二阶导数值,一般不包含保形条件;同样,大多数参数式样条插值曲线/曲面是通过反求控制网格得到的,反求方程的建立只依赖于插值信息,一般不包含保形条件;因而按这两种传统方法得到的曲线/曲面只保证插值给定的点集,不保证与给定的点集形状或单调性一致,且其形状由插值点集唯一确定,无法加以调整.这给外形设计与几何造型带来了种种困惑和不便.为了克服这种局限性,众多学者创造了带有形状控制参数的样条形式,试图通过调节形状参数来控制曲线曲面的形状,进一步达到保形插值.例如,文献[4]中引进偏移(biases)参数 β_1 和张力(tension)参数 β_2 得到 β -样条曲线/曲面,通过调整 β_1 和 β_2 ,对曲线/曲面的形状进行控制.文献[5]中取每段曲线的次数作为参数,通过调节曲线次数来调整曲线的形状,得到满足一定连续性条件(C^k)的保形插值曲线.文献[6,7]通过在每相邻的两个节点之间插入两个新节点,再调整新节点的位置和原节点处的一阶、二阶导数值得到保单调的 C^2 插值曲线.文献[8]引进 $L_p(1 \leq p < \infty)$ 样条,通过使插值曲线的二阶导数的 L_p 范数最小来获得保形的插值曲线.在此基础上,文献[9]又引进基于曲率的3次 L_1 样条,通过使插值曲线曲率的 L_1 范数最小来获得保形的插值曲线.另一方面,由于细分方法研究的不断深入,采用一定的细分格式也可得到保形的细分插值曲线曲面^[10-12].然而,所有这些方法都有一定的局限性:首先,按这些方法得到的保形或保单调的条件都只是充分条件,而非必要条件,从而失去了理论上的完备性和严密性;其次,有些方法虽能保证产生的插值曲线为保形的,但一般不能达到 C^2 ^[4,10-12],从而失去了应用上的通用性和广泛性;而另外一些方法虽能产生光滑的保形插值曲线,但呈现出计算上的复杂性.

为克服上述种种局限性,本文构造出一类能够保单调的均匀 α -B样条插值曲线,以满足外形设计与逆向工程中对曲线插值的保形要求. α -B样条曲线是由B样条曲线和一个重新参数化的多边形按混合因子 α 进行混合得到的^[13],它以 α 作为形状参数,并且和原B样条曲线具有相同的参数连续性.本文首先基于 α -B样条逼近的思想,在无须求解反求方程组的情况下构造出一类均匀 α -B样条插值曲线;进一步,把平面均匀 α -B样条插值曲线的一阶导矢的两个分量分别转化为Bernstein多项式,从而利用Bernstein多项式的正性条件,轻松地而简捷地得到这两个分量都为非负的充要条件;对整条 α -B样条插值曲线,找到形状参数 α 的取值范围,使得当且仅当参数 α 在该范围内时,相应的整条 α -B样条插值曲线都是保单调的,且为 C^2 ;其次,为了实际使用上的方便并提高算法效能,对 α -B样条插值曲线的每段曲线选取不同的参数,使整条曲线也是保单调的,并达到 G^1 .最后,用实例及图形显示表明,我们构造和引进的 α -B样条保单调插值曲线,其理论推导及算法设计是正确而有效的,可望在工程实践中获得广泛应用.

1 预备知识

1.1 单调点列和单调曲线

给定平面点列 $\{P_i\}_{i=1}^n$, $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$,若满足

$$x_i \leq x_{i+1}, y_i \leq y_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{或 } x_i \leq x_{i+1}, y_i \geq y_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (1.1)$$

则称 $\{P_i\}_{i=1}^n$ 为单调上升(或单调下降)点列;若满足

$$x_i < x_{i+1}, y_i < y_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{或 } x_i < x_{i+1}, y_i > y_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (1.2)$$

则称 $\{P_i\}_{i=1}^n$ 为严格单调上升(或下降)点列.对 $x_i \geq x_{i+1}$, 或 $x_i > x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1$ 的情况,有类似的定义.

相应地,对于平面曲线 $r(t) = (x(t), y(t)), t \in I$ (I 为区间),若满足

$$x(t_1) \leq x(t_2), y(t_1) \leq y(t_2), \forall t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2 \text{ (或 } x(t_1) \leq x(t_2), y(t_1) \geq y(t_2), \forall t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2), \quad (1.3)$$

则称 $r(t)$ 为单调上升(或单调下降)曲线;若满足

$$x(t_1) < x(t_2), y(t_1) < y(t_2), \forall t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2 \text{ (或 } x(t_1) < x(t_2), y(t_1) > y(t_2), \forall t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2), \quad (1.4)$$

则称 $r(t)$ 为严格单调上升(或严格单调下降)曲线.对 $x(t_1) \geq x(t_2)$, 或 $x(t_1) > x(t_2), \forall t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2$ 的情况,有类似的定义.

本文只讨论满足式(1.1)和式(1.2)的平面单调上升点列的保单调插值问题,其他情况的讨论很容易由此得到,因而从略.本文还将用到下面的引理,其证明见文献[14].

引理 1. 二次 Bernstein 多项式 $B^2(f; x) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(x) f_i, 0 \leq x \leq 1$, 在 $[0, 1]$ 上非负, 当且仅当

$$f_0 \geq 0, f_2 \geq 0, f_1 + \sqrt{f_0 f_2} \geq 0;$$

在 $[0, 1]$ 上全正, 当且仅当

$$f_0 > 0, f_2 > 0, f_1 + \sqrt{f_0 f_2} > 0.$$

1.2 均匀 α -B 样条插值曲线的导出

已知单调的型值点列 $\{P_i\}_{i=1}^n, n \geq 4$, 为使相邻型值点的连线段数与 B 样条曲线的段数一致, 需设置辅助型值点 P_0, P_{n+1} , 考虑到应使 $\{P_i\}_{i=0}^{n+1}$ 为单调点列, 不妨令

$$P_0 = 2P_1 - P_2, P_{n+1} = 2P_n - P_{n-1}. \quad (1.5)$$

取节点参数 $u_i = i (i = -2, -1, 0, 1, \dots, n, n+1, n+2, n+3)$. 再对每个型值点 P_i 设置对应的节点参数 $u_i \leftrightarrow P_i (i = 0, 1, \dots, n, n+1)$.

以 $\{u_i\}_{i=-2}^{n+3}$ 为节点向量, $\{P_i\}_{i=0}^{n+1}$ 为控制顶点, $N_{i,4}(u)$ 为 3 次(4 阶)均匀 B 样条基, 构造 B 样条曲线

$$C(u) = \sum_i N_{i,4}(u) P_{i+2} = \sum_{i=-2}^{n-1} N_{i,4}(u) P_{i+2}, u_1 \leq u \leq u_n.$$

记 $L(u, \alpha)$ 为参数化的多边形, 也称为奇异多边形, 其待定的顶点序列 $\{V_i\}_{i=1}^n$ 将由已知的型值点列和插值条件确定; 它的每一条边是定义在节点区间 $[u_j, u_{j+1}]$ 上, 连接两相邻顶点 V_j 和 V_{j+1} 的直线段, 记为 $L_j(u, \alpha)$, 即

$$L(u, \alpha) = L_j(u, \alpha) = (1 - S_j(u))V_j + S_j(u)V_{j+1}, u_j \leq u \leq u_{j+1}.$$

其中 $S_j(u)$ 为 $[u_j, u_{j+1}]$ 上的奇异混合函数:

$$S_j(u) = \begin{cases} \frac{9}{2} \left(\frac{u - u_j}{u_{j+1} - u_j} \right)^3, & u_j \leq u \leq \frac{2}{3}u_j + \frac{1}{3}u_{j+1}, \\ \frac{9}{2} \left[\left(\frac{u - u_j}{u_{j+1} - u_j} \right)^3 - 3 \left(\frac{u - u_j}{u_{j+1} - u_j} - \frac{1}{3} \right)^3 \right], & \frac{2}{3}u_j + \frac{1}{3}u_{j+1} \leq u \leq \frac{1}{3}u_j + \frac{2}{3}u_{j+1}, \\ 1 - \frac{9}{2} \left(\frac{u_{j+1} - u}{u_{j+1} - u_j} \right)^3, & \frac{1}{3}u_j + \frac{2}{3}u_{j+1} \leq u \leq u_{j+1}; \end{cases} \quad (1.6)$$

定义均匀 α -B 样条插值曲线

$$Q(u, \alpha) = (1 - \alpha)C(u) + \alpha L(u, \alpha), u_1 \leq u \leq u_n; \quad (1.7)$$

当限于节点区间 $[u_j, u_{j+1}]$ 时, 该曲线每一段的表示式为

$$Q(u, \alpha) = Q_j(u, \alpha) = (1 - \alpha)C_j(u) + \alpha L_j(u, \alpha) = (1 - \alpha)C_j(u) + \alpha[(1 - S_j(u))V_j + S_j(u)V_{j+1}], u_j \leq u \leq u_{j+1}, j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.8)$$

由插值条件 $Q(u_j, \alpha) = P_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 和 $S_j(u)$ 的性质可以确定:

$$\begin{cases} \alpha V_j = P_j - (1 - \alpha)C_j(u_j), & j = 1, 2, \dots, n-1, \\ \alpha V_n = P_n - (1 - \alpha)C_{n-1}(u_n), & j = n. \end{cases} \quad (1.9)$$

则

$$Q(u, \alpha) = \underline{Q}_j(u, \alpha) = (1 - \alpha)C_j(u) + (1 - S_j(u))[P_j - (1 - \alpha)C_j(u_j)] + S_j(u)[P_{j+1} - (1 - \alpha)C_j(u_{j+1})], \quad (1.10)$$

$$u_j \leq u \leq u_{j+1}, j = 1, 2, \dots, n - 1,$$

这里,

$$C_j(u) = \sum_{i=j-3}^j N_{i,4}(u)P_{i+2}, u_j \leq u \leq u_{j+1}, j = 1, 2, \dots, n - 1.$$

易知 $Q(u, \alpha) \in C^2[u_1, u_n]$, 且在节点 $u_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 处,

$$\frac{\partial}{\partial u} Q(u_j, \alpha) = (1 - \alpha)C'(u_j), \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} Q(u_j, \alpha) = (1 - \alpha)C''(u_j). \quad (1.11)$$

从外形设计的实际需要出发,我们仅讨论 $\alpha \in (0, 1)$ 的标准 α -B 样条曲线;而当 $\alpha = 0$ 时, α -B 样条曲线退化为 3 次 B 样条曲线,此时不存在奇异多边形;当 $\alpha = 1$ 时, α -B 样条曲线退化为奇异多边形,即为已知的多边形 $P_1P_2 \dots P_n$.

2 α -B 样条曲线保单调插值的充要条件

本节将求出参数 α 的取值范围,使得对应的 α -B 样条插值曲线 $Q(u, \alpha) (u_1 \leq u \leq u_n)$ 是保单调的.注意到曲线 $Q(u, \alpha) (u_1 \leq u \leq u_n)$ 的单调性等价于其全部子曲线 $\underline{Q}_j(u, \alpha) (u_j \leq u \leq u_{j+1}) (j = 1, 2, \dots, n)$ 的单调性,我们先讨论在节点区间 $[u_j, u_{j+1}]$ 上曲线段 $\underline{Q}_j(u, \alpha)$ 的单调性.

作参数变换

$$t = \frac{u - u_j}{u_{j+1} - u_j}, u \in [u_j, u_{j+1}], \quad (2.1)$$

则 $t \in [0, 1]$, 这时记曲线 $\underline{Q}_j(u, \alpha)$ 为 $\bar{Q}_j(t, \alpha)$, $C_j(u)$ 为 $\bar{C}_j(t)$, 则式(1.8)、式(1.10)分别变为

$$\underline{Q}_j(u, \alpha) = \bar{Q}_j(t, \alpha) = (1 - \alpha)\bar{C}_j(t) + \alpha[(1 - \bar{S}_j(t))V_j + \bar{S}_j(t)V_{j+1}] \quad (2.2)$$

$$= (1 - \alpha) \sum_{i=j-3}^j \bar{N}_{i,4}(t)P_{i+2} + (1 - \bar{S}_j(t))[P_j - (1 - \alpha)\bar{C}_j(0)] + \bar{S}_j(t)[P_{j+1} - (1 - \alpha)\bar{C}_j(1)], 0 \leq t \leq 1. \quad (2.3)$$

其中

$$\begin{cases} \bar{N}_{j-3,4}(t) = \frac{1}{6}(1-t)^3 \\ \bar{N}_{j-2,4}(t) = \frac{1}{2}t^3 - t^2 + \frac{2}{3} \\ \bar{N}_{j-1,4}(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6} \\ \bar{N}_{j,4}(t) = \frac{1}{6}t^3 \end{cases}, \bar{S}_j(t) = \begin{cases} \frac{9}{2}t^3, & 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{9}{2}\left[t^3 - 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^3\right], & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, \\ 1 - \frac{9}{2}(1-t)^3, & \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

记

$$a_i = P_i - P_{i-1} = (r_i, s_i), r_i = x_i - x_{i-1}, s_i = y_i - y_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n + 1. \quad (2.5)$$

由 $\{P_i\}_{i=1}^n$ 为单调上升点列的条件可知:

$$r_i \geq 0, s_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n + 1. \quad (2.6)$$

容易求得

$$\bar{C}'_j(t) = (1-t)^2/2a_j + (1+2t-2t^2)/2a_{j+1} + t^2/2a_{j+2}, \bar{C}_j(1) - \bar{C}_j(0) = 1/6a_j + 4/6a_{j+1} + 1/6a_{j+2}, \quad (2.7)$$

所以,

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{Q}_j(t, \alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{X}_j(t, \alpha), \frac{\partial}{\partial t} \bar{Y}_j(t, \alpha) \right) = (1 - \alpha)\bar{C}'_j(t) + \bar{S}'_j(t)[(P_{j+1} - P_j) - (1 - \alpha)(\bar{C}_j(1) - \bar{C}_j(0))]$$

$$= [(1-\alpha)(1-t)^2/2 - (1-\alpha)\overline{S}'_j(t)/6] \mathbf{a}_j + [(1-\alpha)(1+2t-2t^2)/2 + \overline{S}'_j(t) - 2(1-\alpha)\overline{S}'_j(t)/3] \mathbf{a}_{j+1} + [(1-\alpha)t^2/2 - (1-\alpha)\overline{S}'_j(t)/6] \mathbf{a}_{j+2}.$$

先考虑上述向量的第 1 个分量,记 $\beta = 1 - \alpha$, 且记

$$\overline{M}_j(t, \beta) = \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial t} \overline{X}_j(t, \alpha) = [3\beta(1-t)^2 - \beta\overline{S}'_j(t)]r_j + [3\beta(1+2t-2t^2) + 6\overline{S}'_j(t) - 4\beta\overline{S}'_j(t)]r_{j+1} + [3\beta t^2 - \beta\overline{S}'_j(t)]r_{j+2}, \tag{2.8}$$

则由 $\alpha \in (0,1)$ 可知 $\beta \in (0,1)$, 下面只需在 $[0,1]$ 的 3 个子区间分别讨论,使 $\overline{M}_j(t, \beta) \geq 0, \forall t \in [0,1]$ 成立的 β 取值范围.

(A) 由式(2.4)和式(2.8)得

$$\overline{M}_j(t, \beta) = F_1^{(j)}(t) = (1, t, t^2) \begin{pmatrix} 0 & 3(r_j + r_{j+1}) \\ 0 & 6(-r_j + r_{j+1}) \\ 81r_{j+1} & -3(7r_j + 40r_{j+1} + 7r_{j+2})/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}, t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]. \tag{2.9}$$

作变量代换 $v = 3t$, 并由幂基与 Bernstein 基的关系式

$$(1, v, v^2) = (B_0^2(v), B_1^2(v), B_2^2(v)) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

将 $F_1^{(j)}(t)$ 化为 Bernstein 多项式得

$$\begin{aligned} F_1^{(j)}(t) &= \overline{F}_1^{(j)}(v) = (B_0^2(v), B_1^2(v), B_2^2(v)) \begin{pmatrix} 0 & 3(r_j + r_{j+1}) \\ 0 & 2r_j + 4r_{j+1} \\ 9r_{j+1} & -(r_j + 10r_{j+1} + 7r_{j+2})/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= (B_0^2(v), B_1^2(v), B_2^2(v))(f_0^{(j)}, f_1^{(j)}, f_2^{(j)})^T, v \in [0,1]. \end{aligned}$$

其中, Bézier 纵标

$$(f_0^{(j)}, f_1^{(j)}, f_2^{(j)}) = (3\beta(r_j + r_{j+1}), 2\beta(r_j + 2r_{j+1}), 9r_{j+1} - \beta(r_j + 10r_{j+1} + 7r_{j+2})/6).$$

记

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_1^{(j)} &= \frac{54r_{j+1}}{r_j + 10r_{j+1} + 7r_{j+2}}, \\ \beta_2^{(j)} &= \frac{54r_{j+1}}{7r_j + 10r_{j+1} + r_{j+2}}, \\ \beta_3^{(j)} &= \frac{54r_{j+1}}{7r_j + 22r_{j+1} + 7r_{j+2}}, \\ \beta_{4,5}^{*(j)} &= \frac{18r_{j+1} \left(8r_j + 26r_{j+1} + 8r_{j+2} \pm \sqrt{(r_j + 8r_{j+1} + r_{j+2})^2 + 4(4r_j r_{j+1} + 3r_j r_{j+2} + 4r_{j+1} r_{j+2})} \right)}{21r_j^2 + 204r_{j+1}^2 + 21r_{j+2}^2 + 128r_j r_{j+1} + 38r_j r_{j+2} + 128r_{j+1} r_{j+2}}, (\beta_4^{*(j)} \leq \beta_5^{*(j)}), \\ \beta_4^{(j)} &= \max\{\beta_3^{(j)}, \beta_4^{*(j)}\}, \\ \beta_5^{(j)} &= \min\{\beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)}, \beta_5^{*(j)}\}, \end{aligned} \right. \tag{2.11}$$

经计算可得 $\beta_4^{*(j)} \leq \beta_3^{(j)}, \beta_3^{(j)} \leq \beta_5^{*(j)}$, 又因 $\beta_3^{(j)} \leq \beta_1^{(j)}$ 和 $\beta_3^{(j)} \leq \beta_2^{(j)}$, 故有

$$\beta_4^{(j)} = \max\{\beta_3^{(j)}, \beta_4^{*(j)}\} = \beta_3^{(j)}, \beta_5^{(j)} = \min\{\beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)}, \beta_5^{*(j)}\}, \tag{2.12}$$

则由引理 1 及式(2.6)可知,

$$\overline{F}_1^{(j)}(v) \geq 0, v \in [0,1]. \Leftrightarrow f_2^{(j)} \geq 0. \Leftrightarrow \beta \leq \beta_1^{(j)}. \tag{2.13}$$

(B) 由式(2.4)和式(2.8)得到

$$\overline{M}_J(t, \beta) = F_2^{(j)}(t) = (1, t, t^2) \begin{pmatrix} -27r_{j+1} & 3(5r_j + 14r_{j+1} + 3r_{j+2})/2 \\ 162r_{j+1} & -3(11r_j + 34r_{j+1} + 9r_{j+2}) \\ -162r_{j+1} & 6(5r_j + 17r_{j+1} + 5r_{j+2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}, t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]. \quad (2.14)$$

作变量代换 $v = 3t - 1$, 并由幂基与 Bernstein 基的关系式(2.10), 将上式化为 Bernstein 多项式得到

$$F_2^{(j)}(t) = \overline{F}_2^{(j)}(v) = (B_0^2(v), B_1^2(v), B_2^2(v)) \begin{pmatrix} 9r_{j+1} & -(r_j + 10r_{j+1} + 7r_{j+2})/6 \\ 18r_{j+1} & -(7r_j + 22r_{j+1} + 7r_{j+2})/3 \\ 9r_{j+1} & -(7r_j + 10r_{j+1} + r_{j+2})/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \\ = (B_0^2(v), B_1^2(v), B_2^2(v))(f_0^{(j)}, f_1^{(j)}, f_2^{(j)})^T, \quad v \in [0, 1].$$

其中, Bézier 纵标

$$(f_0^{(j)}, f_1^{(j)}, f_2^{(j)})^T = (9r_{j+1} - \beta(r_j + 10r_{j+1} + 7r_{j+2})/6, 18r_{j+1} - \beta(7r_j + 22r_{j+1} + 7r_{j+2})/3, 9r_{j+1} - \beta(7r_j + 10r_{j+1} + r_{j+2})/6).$$

则由引理 1 可知, $\overline{F}_2^{(j)}(v) \geq 0, v \in [0, 1]. \Leftrightarrow$ 下列 3 式同时成立:

- (1) $f_0^{(j)} \geq 0, \Leftrightarrow \beta \leq \beta_1^{(j)}.$
- (2) $f_2^{(j)} \geq 0, \Leftrightarrow \beta \leq \beta_5^{(j)}.$
- (3) $f_1^{(j)} + \sqrt{f_0^{(j)} f_2^{(j)}} \geq 0, \Leftrightarrow f_1^{(j)} \geq 0$, 或者 $f_1^{(j)} < 0$ 且 $f_0^{(j)} f_2^{(j)} \geq (f_1^{(j)})^2.$
 $\Leftrightarrow \beta \leq \beta_3^{(j)}$, 或者 $\beta > \beta_3^{(j)}$ 且 $A_1^{(j)}(\beta) = k_1^{(j)}\beta^2 + k_2^{(j)}\beta + k_3^{(j)} \leq 0.$

其中

$$k_1^{(j)} = (21r_j^2 + 204r_{j+1}^2 + 21r_{j+2}^2 + 128r_j r_{j+1} + 38r_j r_{j+2} + 128r_{j+1} r_{j+2})/4, \\ k_2^{(j)} = -18r_{j+1}(4r_j + 13r_{j+1} + 4r_{j+2}), k_3^{(j)} = 243r_{j+1}^2.$$

因二次三项式 $A_1^{(j)}(\beta)$ 的判别式 $\Delta^{(j)} = 81r_{j+1}^2[(r_j + 8r_{j+1} + r_{j+2})^2 + 4(4r_j r_{j+1} + 3r_j r_{j+2} + 4r_{j+1} r_{j+2})]$, 零点是 $\beta_4^{*(j)}, \beta_5^{*(j)}$, 再同时考虑上述条件表达式(1)与(2), 结合式(2.12), 立即得到

$$\overline{F}_2^{(j)}(v) \geq 0, v \in [0, 1]. \Leftrightarrow \beta \leq \beta_5^{(j)}. \quad (2.15)$$

(C) 由式(2.4)和式(2.8)得

$$\overline{M}_J(t, \beta) = F_3^{(j)}(t) = (1, t, t^2) \begin{pmatrix} 81r_{j+1} & -3(7r_j + 34r_{j+1} + 9r_{j+2})/2 \\ -162r_{j+1} & 3(7r_j + 38r_{j+1} + 9r_{j+2}) \\ 81r_{j+1} & -3(7r_j + 40r_{j+1} + 7r_{j+2})/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}, t \in \left[\frac{2}{3}, 1 \right]. \quad (2.16)$$

作变量代换 $v = 3t - 2$, 并由幂基与 Bernstein 基的关系式(2.10), 将上式化为 Bernstein 多项式得

$$F_3^{(j)}(t) = \overline{F}_3^{(j)}(v) = (B_0^2(v), B_1^2(v), B_2^2(v)) \begin{pmatrix} 9r_{j+1} & -(7r_j + 10r_{j+1} + r_{j+2})/6 \\ 0 & 2(2r_{j+1} + r_{j+2}) \\ 0 & 3(r_{j+1} + r_{j+2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \\ = (B_0^2(v), B_1^2(v), B_2^2(v))(f_0^{(j)}, f_1^{(j)}, f_2^{(j)})^T, \quad v \in [0, 1].$$

其中, Bézier 纵标

$$(f_0^{(j)}, f_1^{(j)}, f_2^{(j)}) = (9r_{j+1} - \beta(7r_j + 10r_{j+1} + r_{j+2})/6, 2\beta(2r_{j+1} + r_{j+2}), 3\beta(r_{j+1} + r_{j+2})),$$

则由引理 1 及式(2.6)可知

$$\overline{F}_3^{(j)}(v) \geq 0, v \in [0, 1] \Leftrightarrow f_0^{(j)} \geq 0 \Leftrightarrow \beta \leq \beta_2^{(j)}. \quad (2.17)$$

综合上述 3 个区间上的讨论结果, 并由式(2.12)及 $\beta \in (0, 1)$ 可知:

$$\overline{M}_J(t, \beta) \geq 0, t \in [0, 1]. \Leftrightarrow 0 < \beta \leq \min(\beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)}, \beta_5^{(j)}, 1) = \min(\beta_5^{(j)}, 1). \quad (2.18)$$

完全类似地,可以对 $\frac{\partial}{\partial t} \bar{Q}_j(t, \alpha)$ 的第 2 个分量作相应的分析,得到类似的结果.为方便起见,不妨将式(2.11)右端的数值 r_j, r_{j+1}, r_{j+2} 分别改为 s_j, s_{j+1}, s_{j+2} ;对应地,同时将式(2.11)左端的数值 $\beta_i^{(j)}$ ($i=1,2,3,4,5$), $\beta_4^{*(j)}, \beta_5^{*(j)}$ 分别改为 $\gamma_i^{(j)}$ ($i=1,2,3,4,5$), $\gamma_4^{*(j)}, \gamma_5^{*(j)}$.再记

$$\begin{cases} \alpha_x^{(j)} = 1 - \min(\beta_5^{(j)}, 1), \\ \alpha_y^{(j)} = 1 - \min(\gamma_5^{(j)}, 1), \end{cases} \quad (2.19)$$

则

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \bar{X}_j(t, \alpha) \geq 0, t \in [0, 1]. \Leftrightarrow \alpha_x^{(j)} \leq \alpha < 1; \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{Y}_j(t, \alpha) \geq 0, t \in [0, 1]. \Leftrightarrow \alpha_y^{(j)} \leq \alpha < 1. \end{cases} \quad (2.20)$$

于是我们有如下定理.

定理 1. 设 $\{P_i\}_{i=j-1}^{j+2}$ 为平面单调型值点列, $\bar{Q}_j(t, \alpha) (0 \leq t \leq 1)$ ($j=1,2,\dots,n$) 是由式(2.3)所示的 3 次均匀 α -B 样条插值曲线段,则此曲线段为单调的充要条件是 $\alpha_j \leq \alpha < 1$, 其中

$$\alpha_j = \max(\alpha_x^{(j)}, \alpha_y^{(j)}). \quad (2.21)$$

这样,每一段曲线 $Q_j(u, \alpha) (j=1,2,\dots,n-1)$, 对应着一个参数 α_j , 使得当 $\alpha_j \leq \alpha < 1$ 时, $Q_j(u, \alpha) (u_j \leq u \leq u_{j+1})$ 为单调曲线.故当且仅当取这些参数的最大值时,整条 α -B 样条插值曲线 $Q(u, \alpha) (u_1 \leq u \leq u_n)$ 为单调曲线.于是我们又得到定理 2.

定理 2. 设 $\{P_i\}_{i=1}^n$ 为给定的平面单调型值点列,按式(1.5)设置辅助型值点 P_0, P_{n+1} ,按式(1.10)构造插值点列 $\{P_i\}_{i=1}^n$ 的 3 次均匀 α -B 样条曲线 $Q(u, \alpha) (u_1 \leq u \leq u_n)$,再按式(2.21)取定数组 $\alpha_j (j=1,2,\dots,n-1)$,则当且仅当形状参数 α 满足

$$\alpha_0 = \max_{1 \leq j \leq n-1} \{\alpha_j\} \leq \alpha < 1 \quad (2.22)$$

时,整条曲线 $Q(u, \alpha) (u_1 \leq u \leq u_n)$ 为单调曲线.

定理 3. 设 $\{P_i\}_{i=1}^n$ 为给定的平面严格单调型值点列,按式(1.5)设置辅助型值点 P_0, P_{n+1} ,按式(1.10)构造插值点列 $\{P_i\}_{i=1}^n$ 的 3 次均匀 α -B 样条曲线 $Q(u, \alpha) (u_1 \leq u \leq u_n)$,再按式(2.21)取定数组 $\alpha_j (j=1,2,\dots,n-1)$,则当且仅当形状参数 α 满足

$$\alpha_0 = \max_{1 \leq j \leq n-1} \{\alpha_j\} < \alpha < 1 \quad (2.23)$$

时,整条曲线 $Q(u, \alpha) (u_1 \leq u \leq u_n)$ 为严格单调曲线.

注:一般地,式(2.22)和式(2.23)中的 $\alpha_0 \in [0, 1]$,若 $\alpha_0 = 1$,则说明对 $\forall \alpha \in (0, 1)$, α -B 样条插值曲线都不是单调的;若 $\alpha_0 = 0$,则说明对 $\forall \alpha \in (0, 1)$, α -B 样条插值曲线都是单调的,此时为保证曲线插值型值点,我们可取 α_0 为 $(0, 1)$ 内任意小的数,如在第 4 节数值例子中,我们不妨取 $\alpha_0 = 0.00001$.

3 分段取不同形状参数的 α -B 样条曲线的保单调插值

在实际应用中,当型值点个数较多,而按照式(2.21)求得的某个 α_j 较大时,按照式(2.22)求得 α_0 就比较大,这时不但会丢失某些段的信息,而且影响算法效能.我们设想,对每一段曲线 $Q_j(u, \alpha) (u_j \leq u \leq u_{j+1}) (j=1,2,\dots,n-1)$ 取各自不同的形状参数 α , 记为 α_j^* , 且让 $\alpha_j^* \geq \alpha_j (j=1,2,\dots,n-1)$;相应地,记由此产生的每一段曲线为 $Q_j(u, \alpha_j^*) (u_j \leq u \leq u_{j+1})$, 而整段曲线记为 $Q(u) (u_1 \leq u \leq u_n)$, 那么,此时用什么算法可以保证 $Q(u) (u_1 \leq u \leq u_n)$ 为单调呢? 这就是本节所要研究的问题.

在上述情况下,记相应的奇异多边形为 $L(u) (u_1 \leq u \leq u_n)$, 其每段为一直线段,记为 $L_j(u, \alpha_j^*) (u_j \leq u \leq u_{j+1}) (j=1,2,\dots,n-1)$. 必须指出,此时,由于 α -B 样条插值曲线的每一段曲线 $Q_j(u, \alpha) (u_j \leq u \leq u_{j+1}) (j=1,2,\dots,n-1)$ 取各

自的形状参数 α , 故奇异多边形不是连续的, 记第 j 段直线的两个端点为 V_j^j 和 V_{j+1}^j , 如图 1 所示.

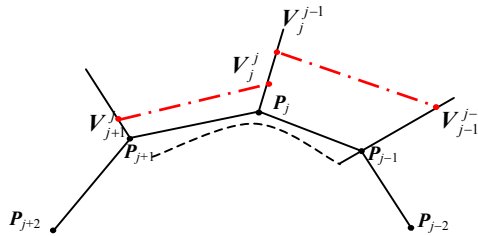


Fig.1 Discontinuous singular polygon (dot dash line)

图 1 奇异多边形(点划线)不连续

那么, 当限于节点区间 $[u_j, u_{j+1}]$ 上时, 曲线 $Q(u)$ 的每一段的表示式为

$$Q(u) = Q_j(u, \alpha_j^*) = (1 - \alpha_j^*)C_j(u) + \alpha_j^*L_j(u, \alpha_j^*) = (1 - \alpha_j^*)C_j(u) + \alpha_j^*[(1 - S_j(u))V_j^j + S_j(u)V_{j+1}^j] \quad (3.1)$$

$$= (1 - \alpha_j^*)C_j(u) + (1 - S_j(u))[P_j - (1 - \alpha_j^*)C_j(u_j)] + S_j(u)[P_{j+1} - (1 - \alpha_j^*)C_j(u_{j+1})], \quad (3.2)$$

$u_j \leq u \leq u_{j+1}, j=1, 2, \dots, n-1$. 这里,

$$\begin{cases} \alpha_j^*V_j^j = P_j - (1 - \alpha_j^*)C_j(u_j), \\ \alpha_j^*V_{j+1}^j = P_{j+1} - (1 - \alpha_j^*)C_j(u_{j+1}), \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, n-1, \quad (3.3)$$

则 $Q(u)(u_1 \leq u \leq u_n)$ 也满足插值条件:

$$Q_j(u_j, \alpha_j^*) = P_j, Q_j(u_{j+1}, \alpha_j^*) = P_{j+1}, j=1, 2, \dots, n-1.$$

下面讨论曲线 $Q(u)(u_1 \leq u \leq u_n)$ 的单调性:

首先, 由定理 1 可知, 具有形状参数 α_j^* ($\alpha_j^* \geq \alpha_j$) 的曲线 $Q(u)(u_1 \leq u \leq u_n)$ 的每一段 $Q_j(u, \alpha_j^*)(u_j \leq u \leq u_{j+1})$ 为单调($j=1, 2, \dots, n-1$); 在非节点 u 处, $Q(u) \in C^2$; 在节点 $u_j (j=2, 3, \dots, n-1)$ 处, 下面等式成立.

$$Q_j(u_j, \alpha_j^*) = Q_{j-1}(u_j, \alpha_{j-1}^*) = P_j, \frac{\partial}{\partial u} Q_j(u_j, \alpha_j^*) = (1 - \alpha_j^*)C'(u_j), \frac{\partial}{\partial u} Q_{j-1}(u_j, \alpha_{j-1}^*) = (1 - \alpha_{j-1}^*)C'(u_j), j=2, 3, \dots, n-1.$$

这表明, 曲线 $Q(u)$ 在节点 $u_j (j=2, 3, \dots, n-1)$ 处为 G^1 , 一般说来不是 C^1 . 另一方面, 由定理 2 可知, 由式(3.1)~式(3.3)所定义的曲线 $Q(u)(u_1 \leq u \leq u_n)$ 为单调曲线. 类似地, 由定理 3 可知, 对严格单调的型值点列, 只要取 $\alpha_j^* > \alpha_j$, 则由式(3.1)~式(3.3)所定义的曲线 $Q(u)(u_1 \leq u \leq u_n)$ 为严格单调曲线.

由此可见, 若曲线 $Q(u)$ 的每一段取各自的形状参数 α_j^* , 它最终是一条分段为 C^2 而整条为 G^1 的保单调插值曲线. 实际上, 它可能比第 2 节所定义的取统一形状参数的保单调插值曲线 $Q(u, \alpha) (u_1 \leq u \leq u_n)$ 具有更高的应用价值. 具体见第 4 节的实例.

4 数值例子

本节给出如下 4 个实验结果. 图 2 中 4 个图的型值点列都相同, 各图中的实折线表示型值点组成的多边形, 虚线表示以型值点组成的多边形为控制多边形的 B 样条曲线、实曲线表示 α -B 样条插值曲线.

其中, 图 2(a) 显示的是整条曲线随意取一个形状参数 α , 即 $\alpha=0.1$ 的结果, 容易看到, 此时第 1 段、第 2 段和最后一段曲线段都不单调; 图 2(b) 也显示了整条曲线随意取一个形状参数 α , 即 $\alpha=0.34$ 的结果, 容易看到, 此时第 1 段和第 3 段曲线段都不单调; 图 2(c) 显示的是按式(2.21)取定数 $\alpha_j = \max(\alpha_x^{(j)}, \alpha_y^{(j)}) = 0.74133, 0.271812, 0.668093, 0.338794, j=1, 2, 3, 4$, 再按式(2.22)选取统一的 $\alpha_0=0.74133$ 的结果, 则 α -B 样条插值曲线单调; 其中 $\alpha_x^{(j)} = 0.00001, 0.271812, 0.00001, 0.338794; \alpha_y^{(j)} = 0.74133, 0.00001, 0.668093, 0.00001; j=1, 2, 3, 4$ (这里的 $\alpha_x^{(j)} (j=1, 3)$ 和 $\alpha_y^{(2)}, \alpha_y^{(4)}$ 按式(2.21)实际计算的值为 0, 为保证曲线插值型值点, 我们取它们都为 0.00001). 图 2(d) 显示的是按式(2.21)分段

取形状参数的结果,其中 $\alpha_1^* = 0.74133$, $\alpha_2^* = 0.271812$, $\alpha_3^* = 0.668093$, $\alpha_4^* = 0.338794$. 此时 α -B 样条插值曲线也为单调;显然,图 2(d)比图 2(c)具有更好的保单调效果.

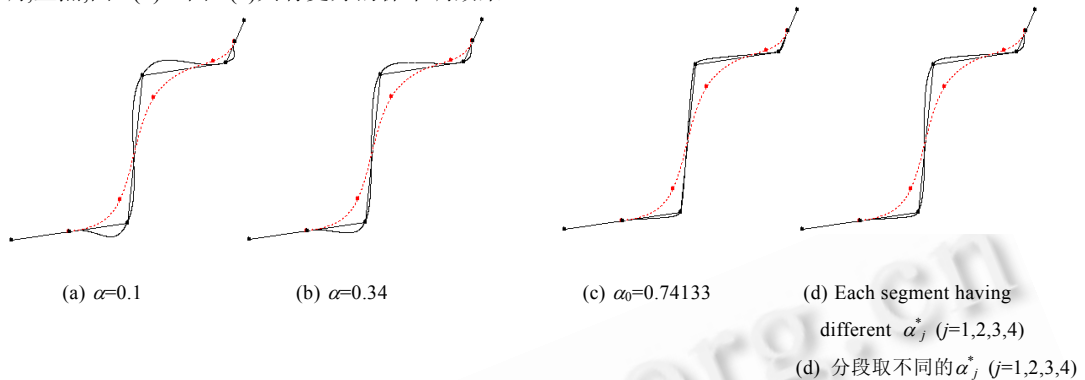


Fig.2 α -B-spline interpolation curve with indicated α

图 2 α 取特定值时得到的 α -B 样条插值曲线

References:

- [1] Cohen E, Riesenfeld RF, Elber G. Geometric Modeling with Splines: An Introduction. MA: Peters AK, Natick, Ltd., 2001.
- [2] Farin G. NURB Curves and Surfaces. Boston: Peters AK, 1995.
- [3] Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide. 2th ed., San Diego: Academic Press, 1990.
- [4] Goodman TNT, Unsworth K. Manipulating shape and producing geometric continuity in β -spline curves. IEEE Computer Graphics and Applications, 1986,6:50~56.
- [5] Costantini P. On monotone and convex spline interpolation. Mathematics of Computation, 1986,46:203~214.
- [6] Ancher JC, Gruyer E. Two shape preserving lagrange C^2 -interpolants. Numerische Mathematik, 1993,64:1~11.
- [7] Manni C, Sablonnière P. Monotone interpolation of order 3 by C^2 cubic splines. IMA Journal of Numerical Analysis, 1997,17(2): 305~320.
- [8] Lavery JE. Univariate cubic L_∞ splines and shape-preserving, multiscale interpolation by univariate cubic L_1 splines. Computer Aided Geometric Design, 2000,17(4):319~336.
- [9] Lavery JE. Shape-Preserving, multiscale interpolation by univariate curvature-based cubic L_1 splines in Cartesian and polar coordinates. Computer Aided Geometric Design, 2002,19(4):257~273.
- [10] Cai ZJ. Convergence, error estimation and some properties for four-point interpolation subdivision scheme. Computer Aided Geometric Design, 1995,12(5):459~468.
- [11] Kuijt F, Van Damme R. Monotonicity preserving interpolatory subdivision schemes. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1999,101(1~2):203~229.
- [12] Kuijt F, Van Damme R. Shape preserving interpolatory subdivision schemes for nonuniform data. Journal of Approximation Theory, 2002,114:1~32.
- [13] Loe KF. α -B-spline: a linear singular blending B-spline. The Visual Comput, 1996,12:18~25.
- [14] Chang GZ. The Mathematics of Surfaces. Changsha: Hunan Education Press, 1995 (in Chinese).

附中文参考文献:

- [14] 常庚哲. 曲面的数学. 长沙:湖南教育出版社, 1995.