

## 五次 PH 曲线的 Hermite 插值\*

陈国栋, 王国瑾

(浙江大学 CAD & CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027);

(浙江大学 数学系, 浙江 杭州 310027)

E-mail: wgj@math.zju.edu.cn; amawgj@mail.hz.zj.cn

http://www.zju.edu.cn

**摘要:** 应用复分析和曲线积分方法研究了满足 Hermite 插值的五次 PH 曲线的构造, 导出了其相应的 Bézier 表示. 所得五次 PH 插值曲线不但具有连续的单位切矢和有向曲率, 而且其弧长函数是原参数的多项式函数, 具有精确的有理 Offset 代数表示和优美的几何解释, 可灵活处理拐点.

**关键词:** 五次 PH 曲线; Hermite 插值; 有向曲率; 光顺

**中图法分类号:** TP391 **文献标识码:** A

20 世纪 90 年代初, 美国专家 Farouki<sup>[1]</sup>把等距曲线表达式的分母根号内为完全平方式的一类参数曲线命名为 Pythagorean Hodograph (PH) 曲线, 指出它具有多项式曲线所无法拥有的优点, 如精确的有理 Offset 表示、其弧长是原参数的多项式函数等, 并把它有效地应用于速度控制是基于轨迹弧长的数控加工和工业机器人<sup>[2]</sup>中. 因为三次 PH 曲线恒凸而无法有适当拐点<sup>[3]</sup>, 所以, 工业设计所用 PH 曲线的最低次数为五次. 另一方面, 实际应用需要对已知型值点列构造  $GC^2$  即插值于端点位矢、单位切矢和有向曲率的插值曲线. de Boor<sup>[4]</sup>曾对三次参数曲线的 Hermite 插值进行过研究, 找到了其存在的条件.

注意到平面五次 PH 曲线具有 8 个自由度, 且可以灵活地处理拐点等优点, 构造这种曲线的插值曲线, 特别是  $GC^2$  插值, 就成了当务之急. 然而这一问题至今未有人涉足, 1995 年仅有 Farouki 对五次 PH 曲线的 Hermite 插值给出了算法<sup>[5]</sup>. 众所周知, 三次多项式插值曲线的 Offset 曲线一般不再具有多项式或有理多项式表示, 为了工程需要, 必须采用一系列耗时的逼近方法, 而且其弧长是多项式平方和的二次开方的积分. 由此看来, PH 曲线的插值曲线的重要地位是三次多项式插值曲线所无法取代的, 它们绝不能作等量齐观.

本文正是对五次 PH 曲线的  $GC^2$  Hermite 插值算法进行了深入研究, 充分利用复分析和曲线积分法, 避免了通常研究中出现的复杂推算, 从而简洁地导出了实现插值的 Bézier 曲线表示. 试验实例表明, 所得到的五次 PH 曲线具有连续的单位切矢和有向曲率, 且与通常三次多项式插值曲线具有类似的性质, 因而可以广泛地应用于曲线光顺、过渡、高速公路和铁路的设计及机器人路径设计等应用领域之中.

\* 收稿日期: 2000-01-25; 修改日期: 2000-06-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69973041); 国家重点基础研究发展规划 973 资助项目(G1998030600); 浙江省自然科学基金资助项目(698925)

作者简介: 陈国栋(1975—), 男, 浙江义乌人, 博士生, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学, 降阶逼近; 王国瑾(1944—), 男, 浙江绍兴人, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学, 形位差计算几何学, 应用逼近论.

## 1 PH 条件和五次 PH 曲线求解

为了推导上的简洁和叙述上的方便,下面,我们采用复分析方法来加以描述.假定平面上以  $\{P_i = (x_i, y_i)\}_{i=0}^n$  为控制顶点的已适当参数化的  $n$  次多项式曲线为  $P(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t)$ , 其在复平面上对应地可表示为  $Z(t) = \sum_{i=0}^n Z_i B_i^n(t)$ .

其中  $\{B_i^n(t)\}_{i=0}^n$  为  $n$  次 Bernstein 多项式基,  $Z_i = x_i + Iy_i$  是控制顶点  $P_i$  对应的复数表示. 为了算法推导和软件编制上的需要,我们把文献[1]中  $Z(t)$  为 PH 曲线的充分条件改写为

$$Z'(t) = \omega(t)G^2(t). \quad (1)$$

其中  $\omega(t), G(t)$  分别为实和复系数多项式. 为了得到可处理拐点的次数最低的 PH 曲线,我们取  $\omega(t) \equiv 1, G(t) = a(1-t)^2 + b(1-t)t + ct^2$ , 其中  $a, b, c$  为待定的复系数,即

$$Z'(t) = (a(1-t)^2 + b(1-t)t + ct^2)^2. \quad (2)$$

将上式展开,并利用积分关系式:

$$\int_0^1 \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k dt = \frac{1}{n+1} \sum_{j=k+1}^{n+1} \binom{n+1}{j} (1-t)^{n+1-j} t^j, \quad k=0, 1, \dots, n, \quad (3)$$

由式(2)可得  $Z(t) = \sum_{i=0}^5 Z_i B_i^5(t)$  的表达式,此时,初始点  $R_0$  对应于积分常数,且

$$(Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5) = \left( R_0, Z_0 + \frac{a^2}{5}, Z_1 + \frac{ab}{10}, Z_2 + \frac{b^2 + 2ac}{30}, Z_3 + \frac{bc}{10}, Z_4 + \frac{c^2}{5} \right). \quad (4)$$

换言之,以任意复系数  $a, b, c$  及  $R_0$  代入上式,均可决定一条平面的五次 PH 曲线.

## 2 五次 PH 曲线 $GC^2$ Hermite 插值

对复平面中的两个向量  $\alpha = \alpha_1 + I\alpha_2, \beta = \beta_1 + I\beta_2, \alpha_i, \beta_i$  为实数 ( $i=1, 2$ ), 先定义两个向量的  $\otimes$  积为  $\alpha \otimes \beta = \text{Im}(\bar{\alpha} \cdot \beta) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ .

定义 1(平面  $GC^2$  Hermite 插值曲线). 已知平面的 4 个向量  $R, T_i, (|T_i|=1, i=0, 1)$  和两个实数  $k_i (i=0, 1)$ , 若有一条平面曲线  $f(t) (0 \leq t \leq 1)$  使得

$$f(i) = R_i, f'(i) = T_i, f''(i) = k_i, i=0, 1, \quad (5)$$

则称  $f(t)$  是一条平面  $GC^2$  Hermite 插值曲线. 这里, 我们已假设  $f^* := f' / |f'|$  为单位切矢,  $f^{**} := (f' \otimes f'') / |f'|^3$  为有向曲率.

对于给定的位矢、切矢和曲率,有可能不存在满足  $GC^2$  条件的插值曲线,此时需通过曲率来调整插值曲线的形状,以保证解的存在. 由于五次 PH 曲线具有通常三次参数曲线的类似性质,因此本文使用 de. Boor 的文献[4]中解的存在条件来调整曲率,以保证五次 PH 插值曲线的存在. 由连续条件,对于  $GC^2$  Hermite 插值,五次 PH 插值曲线需满足:

$$Z(i) = R_i, Z'(i) / |Z'(i)| = T_i, (Z'(i) \otimes Z''(i)) / |Z'(i)|^3 = k_i, i=0, 1. \quad (6)$$

将由上节推导得到的五次 PH 曲线控制顶点的表达式代入上式,可得如下关于复系数  $a, b, c, Z_0$  及实系数  $\lambda, \mu$  的 6 个约束方程:

$$\begin{aligned} Z_0 &= R_0, \\ b^2 + 3(a+c)b + 2ac + 6(\lambda^2 T_0 + \mu^2 T_1) &= 30(R_1 - R_0), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \pm \lambda \sqrt{T_0}, \\ c &= \pm \mu \sqrt{T_1}, \\ \text{Im}(\bar{T}_0 \cdot 2ab) / \lambda^4 &= k_0, \\ \text{Im}(-\bar{T}_1 \cdot 2bc) / \mu^4 &= k_1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

记  $b = b_1 + Ib_2, T_j = T_{jx} + IT_{jy}, \sqrt{T_j} = \tilde{T}_{jx} + I\tilde{T}_{jy}, j = 1, 2$ , 由式(8)中后两式可得下列方程组:

$$\begin{cases} (T_{0x} * \tilde{T}_{0y} - T_{0y} * \tilde{T}_{0x})b_1 + (T_{0x} * \tilde{T}_{0x} + T_{0y} * \tilde{T}_{0y})b_2 = k_0\lambda^3/2 \\ (T_{1x} * \tilde{T}_{1y} - T_{1y} * \tilde{T}_{1x})b_1 + (T_{1x} * \tilde{T}_{1x} + T_{1y} * \tilde{T}_{1y})b_2 = -k_1\mu^3/2 \end{cases} \quad (9)$$

按上式可将  $b$  表示为  $\lambda, \mu$  的关系式, 把此关系式和式(8)中的前两式代入约束方程(7)中的第 2 式, 分别分离实部及虚部可得关于  $\lambda, \mu$  的二元六次联立方程组, 应用吴文俊院士<sup>[6]</sup>的解方程器 (SOLVER) 或应用 Mathematica 4.0 等数学软件可求得  $\lambda, \mu$  的值, 从而最终求得五次 PH 曲线的控制顶点. 从数值实验结果来看, 通常可求得几组实数解, 但由各组解所得到的五次 PH 插值曲线的形状相当相似(此时它们具有相似的曲线能量, 限于篇幅, 不再详述), 区别不是很大, 因而实际中可以根据需要挑选一组  $\lambda, \mu$  来求得最终结果.

### 3 数值实例

例 1: 给定  $R_0(-5, 0), R_1(6, 0), T_0(0.5145, 0.8575), T_1(0.4472, -0.8944)$  和  $k_0 = -0.11, k_1 = -0.14$ , 按照前两节所提出的算法, 并应用吴文俊院士的方法求解  $\lambda, \mu$  的二元六次方程组, 可求得  $(\lambda, \mu) = (-4.4320, -3.4351)$ , 进一步求得满足  $GC^2$  Hermite 插值条件的五次 PH 曲线, 如图 1 所示. 此时插值曲线保凸, 不具有拐点. 图中的箭头为相应的切矢, 下同.

例 2: 给定  $R_0(-6, 0), R_1(5, 0), T_0(0.5547, 0.8321), T_1(0.5145, 0.8575)$  和  $k_0 = -0.2, k_1 = 0.3$ , 按照前两节所提算法, 并应用吴文俊院士的方法求解  $\lambda, \mu$  的二元六次方程组, 可求得  $(\lambda, \mu) = (-4.6767, -4.0869)$ , 进一步可相应地求得满足  $GC^2$  Hermite 插值条件的五次 PH 曲线, 如图 2 所示. 此时插值曲线具有拐点.

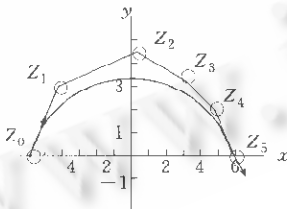


Fig. 1 PH quintic without inflection point  
图1 保凸的五次PH插值曲线

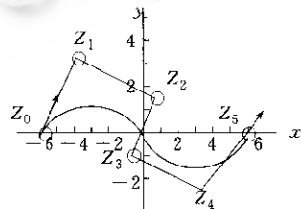


Fig. 2 PH quintic with inflection point  
图2 有拐点的五次PH插值曲线

### References:

[1] Farouki, R. T., Sakkalis, T. Pythagorean hodographs. IBM Journal of Research and Development, 1990, 34(5): 736~752.  
 [2] Farouki, R. T., Shah, S. Real-Time CNC interpolators for pythagorean hodograph. Computer Aided Geometric Design, 1996, 13(7): 583~600.  
 [3] Meek, D. S., Walton, D. J. Geometric hermite interpolation with tschirnhausen cubics. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1997, 81(2): 299~309.  
 [4] de Boor, C., Hollig, K., Sabin, M. High geometric hermite interpolation. Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(4): 269~278.  
 [5] Farouki, R. T., Neff, C. A. Hermite interpolation by pythagorean hodograph quintics. Mathematics of Computation, 1995,

64(212):1589~1609.

- [6] Wu, Wen-jun. The outline of SOLVER software system. *Fulfillment and Cognition of Mathematics*, 1986, 2(1): 32~39 (in Chinese).

#### 附中文参考文献:

- [6] 吴文俊. SOLVER 软件系统概述. 数学的实践与认识, 1986, 2(1): 32~39.

## Hermite Interpolation by PH Quintic\*

CHEN Guo-dong, WANG Guo-jin

(State Key Laboratory of CAD & CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China);

(Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

E-mail: wgj@math.zju.edu.cn; amawgj@mail.hz.zj.cn

<http://www.zju.edu.cn>

**Abstract:** Using complex analysis and curve integration, the construction of PH quintic which satisfies Hermite interpolation conditions is studied in this paper and its corresponding Bézier representation is derived. The PH quintic has continuous unit tangents and signed curvature, and its arclength function is the polynomial of its parameter. The PH quintic has offset curve that admits exact rational algebraic representation, intuitive geometrical interpretation and can flexibly deal with inflection point.

**Key words:** PH quintic; Hermite interpolation; signed curvature; fairness

\* Received January 25, 2000; accepted June 12, 2000