

# 基于广义逆矩阵的 Bézier 曲线降阶逼近\*

陈国栋, 王国瑾

(浙江大学 CAD & CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027);

(浙江大学 数学系, 浙江 杭州 310027)

E-mail: wgi@math.zju.edu.cn

http://www.zju.edu.cn

**摘要:** 研究了 Bézier 曲线的降多阶逼近问题. 利用 Bézier 曲线本身的升阶性质, 并结合广义逆矩阵的最小二乘理论, 给出了一种新的降阶逼近方法. 此方法克服了一般降阶方法中每次只能降阶一次的弱点, 并且得到了很好的逼近效果.

**关键词:** 升阶; 降多阶; 逼近; 广义逆矩阵

**中图分类号:** TP391 **文献标识码:** A

在计算机辅助设计/制造(CAD/CAM)系统中, 几何图形最高阶数不同的几何造型系统之间经常需要进行数据交换<sup>[1]</sup>, 而且在实际中, 因许多 CAD/CAM 系统都考虑到其有效性的特点, 往往只限于处理低次样条曲线, 所以对高次的 Bézier 曲线/曲面进行降阶逼近是十分必要的. 另一方面, 工业产品(如汽车车身, 叶片)的模型设计及仿制过程中对离散点数据进行拟合逼近时, 往往产生高阶的 Bézier 曲线表示, 这导致了大量几何数据信息的存储. 在几何造型中, 曲面片求交产生的交线及 Trimming(裁剪)边界曲线也会产生高次的 Bézier 曲线表示. 为了尽量减少信息数据的存储量, 就需要对高次 Bézier 曲线进行降阶处理. 降阶处理也经常出现于曲线的光顺处理过程中<sup>[2]</sup>.

对于 Bézier 曲线降阶逼近, 许多学者已做了大量的研究<sup>[3~7]</sup>. Hoschek<sup>[3]</sup>首先对原曲线进行离散, 然后利用原曲线的几何信息, 通过多段低阶曲线来插值逼近原曲线; Watkins 和 Worsey<sup>[4]</sup>, Lachance<sup>[5]</sup>及 Eck<sup>[6]</sup>利用 Chebyshev 多项式理论, 对降阶逼近问题进行了研究. 这几种方法有一个共同点, 即每次降阶仅限于 1 次, 若要得到低于原曲线 2 次以上的曲线, 则必须至少进行 2 次降阶逼近, 这样不仅计算耗时, 而且误差也很大. 1995 年, Bogacki<sup>[7]</sup>基于 Chebyshev 基与 Bernstein 基转换的思想, 用舍去 Chebyshev 多项式中若干高次项的方法, 给出了降阶的另一种方法, 此方法可以一次降多阶, 但由于没有充分利用 Bézier 曲线本身固有的几何性质, 在实际试算中发现有时误差会很大.

本文充分利用 Bézier 曲线本身的几何性质, 将 Bézier 曲线的升阶性质与广义逆矩阵理论相结合, 给出了一种新的一次降多阶方法. 由于所得广义逆矩阵可方便而简单地求得其最小二乘解, 从而取得了很好的降多阶逼近效果.

• 收稿日期: 1999-11-02; 修改日期: 2000-01-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69673029); 浙江省自然科学基金资助项目(698025); 国家重点基础研究发展规划资助项目(G1998030600)

作者简介: 陈国栋(1975-), 男, 浙江义乌人, 博士生, 主要研究领域为计算机辅助设计, 计算机图形/图像及应用; 王国瑾(1944-), 男, 浙江绍兴人, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学, 几何造型, 应用逼近论.

### 1 预备知识

设  $A$  是一个  $n \times m$  阶实矩阵,  $n \geq m$ , 记  $r = \text{rank}(A)$ , 计算广义逆矩阵  $A^+$  的一个基本原则<sup>[8]</sup>是利用矩阵  $A$  的满秩分解  $A = BC$ , 其中  $B$  和  $C$  分别为  $n \times r$  阶列满秩和  $r \times m$  阶行满秩矩阵. 此时,  $A$  的广义逆矩阵  $A^+ = C^+B^+$ . 因为  $B$  和  $C$  是列或行的满秩矩阵, 故  $B^TB$  和  $CC^T$  为  $r \times r$  阶对称正定方阵, 于是, 广义逆矩阵  $A^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$ .

这时, 超定线性方程组  $Ax = b$  的最小二乘解为  $x = A^+b = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^Tb$ . 特别地, 若矩阵  $A$  为列满秩, 即  $\text{rank}(A) = m$ , 则  $A^+$  可简化为  $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$ , 相应地, 最小二乘解  $x$  的表达式就化为  $x = (A^TA)^{-1}A^Tb$ .

### 2 Bézier 曲线降阶

一般地, Bézier 曲线降阶问题可描述如下:

设  $\{P_{i,n}\}_{i=0}^n$  为给定的一组控制顶点, 则可确定一条  $n$  次 Bézier 曲线

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_{i,n}, \quad t \in [0, 1],$$

其中  $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$  是  $n$  阶 Bernstein 基函数.

所谓  $n$  次 Bézier 曲线  $P_n(t)$  降多阶到  $m$  次 ( $m < n-1$ ), 即需找到另一组控制顶点  $\{\bar{P}_{i,m}\}_{i=0}^m$  所确定的  $m$  次 Bézier 曲线  $\bar{P}_m(t) = \sum_{i=0}^m B_i^m(t) \bar{P}_{i,m}$ , 使得新旧两条曲线之间的距离函数  $d(P_n, \bar{P}_m) = \max(\|P_n(t) - \bar{P}_m(t)\|, t \in [0, 1])$  达到最小, 用新曲线来降阶逼近原 Bézier 曲线.

本文将利用 Bézier 曲线本身的升阶性质及广义逆矩阵的最小二乘理论, 给出一种新的一次降多阶逼近方法. 已知欲降阶的曲线是  $n$  次 Bézier 曲线  $P_n(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_{i,n}$ , 从升阶的反过程考虑,

设  $n-1$  次 Bézier 曲线  $\bar{P}_{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \bar{P}_{i,n-1}$  经过 1 次升阶后得到上述曲线, 则由 Bézier 曲线的升阶公式<sup>[9]</sup>得

$$P_{i,n} = (i\bar{P}_{i-1,n-1} + (n-i)\bar{P}_{i,n-1})/n, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

将上述  $n+1$  个等式记为矩阵形式  $P_n = A_n \bar{P}_{n-1}$ , 其中升阶矩阵  $A_n$  为  $(n+1) \times n$  阶列满秩矩阵,

$$A_n = (a_{i,j,n})_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,n-1}}, \quad a_{i,j,n} = \begin{cases} \frac{n-i}{n}, & i=j \\ \frac{i}{n}, & i=j+1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$P_n = (P_{0,n}, P_{1,n}, \dots, P_{n,n})^T, \quad \bar{P}_{n-1} = (\bar{P}_{0,n-1}, \bar{P}_{1,n-1}, \dots, \bar{P}_{n-1,n-1})^T.$$

类似地, 设  $m$  次 Bézier 曲线  $\bar{P}_m(t) = \sum_{i=0}^m B_i^m(t) \bar{P}_{i,m}$  经过  $n-m$  次 ( $(n-m) \geq 2$ ) 升阶后得到  $n$  次 Bézier 曲线  $P_n(t)$ , 则  $P_n = A_n \bar{P}_{n-1} = A_n A_{n-1} \bar{P}_{n-2} = \dots = A_n A_{n-1} \dots A_{m+2} A_{m+1} \bar{P}_m$ , 其中  $A_k$  为  $(k+1) \times k$  阶列满秩矩阵,  $k = n, n-1, \dots, m+1, \bar{P}_m = (\bar{P}_{0,m}, \bar{P}_{1,m}, \dots, \bar{P}_{m,m})^T$ .

记

$$A = A_n A_{n-1} \dots A_{m+1} = (a_{i,j})_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,m}} \quad (*)$$

易知  $A$  为  $(n+1) \times (m+1)$  阶列满秩矩阵, 且  $a_{0,0} = a_{n,m} = 1, a_{0,j} = a_{n,k} = 0, j = 1, 2, \dots, m, k = 0, 1, \dots, m-1$ . 我们欲求  $\bar{P}_m$ , 使得  $\bar{A}\bar{P}_m = P_n$ .

由广义逆矩阵理论可知, 上述超定线性方程组的最小二乘解可表示为

$$\bar{P}_m^* = (\bar{P}_{0,m}^*, \bar{P}_{1,m}^*, \dots, \bar{P}_{n,m}^*)^T = A^+ P_n = (A^T A)^{-1} A^T P_n.$$

从而可得原  $n$  次曲线  $P_n(t)$  的降  $n-m$  阶的逼近曲线  $\bar{P}_m^*(t) = \sum_{i=0}^m B_i^m(t) \bar{P}_{i,m}^*$ .

上述所得降阶曲线一般不再保持与逼近前的原曲线有相同的端点值, 为了插值原端点, 可规定  $\bar{P}_{0,m}^* = \bar{P}_{0,m} = P_{0,n}, \bar{P}_{n,m}^* = \bar{P}_{m,m} = P_{n,n}$ .

这时, 原超定线性方程组有所变化, 为得到其表达式, 可引入矩阵分块方法, 记

$$A = A_{(n+1) \times (m+1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ A^L & A^C & A^R \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_m = \begin{pmatrix} \bar{P}_{0,m} \\ \bar{P}_m^* \\ \bar{P}_{m,m} \end{pmatrix}, \quad P_n = \begin{pmatrix} P_{0,n} \\ P_n^* \\ P_{n,n} \end{pmatrix}.$$

这里  $A^L, A^R$  为  $(n-1) \times 1$  阶矩阵,  $A^C$  为  $(n-1) \times (m-1)$  阶列满秩矩阵, 其元素均由升阶系数按式 (\*) 计算可得, 且

$$P_n^* = (P_{1,n}, P_{2,n}, \dots, P_{n-1,n})^T, \quad \bar{P}_m^* = (\bar{P}_{1,m}, \bar{P}_{2,m}, \dots, \bar{P}_{m-1,m})^T,$$

分别为  $(n-1) \times 1$  和  $(m-1) \times 1$  阶矩阵. 由分块矩阵乘法易知, 现在的超定线性方程组变为

$$A^L P_{0,n} + A^C \bar{P}_m^* + A^R P_{n,n} = P_n^* \quad \text{或} \quad A^C \bar{P}_m^* = P_n^* - A^L P_{0,n} - A^R P_{n,n},$$

因  $A^C$  列满秩, 则存在  $(m-1) \times (n-1)$  阶广义逆矩阵

$$(A^C)^+ = ((A^C)^T A^C)^{-1} (A^C)^T,$$

使上面这一超定线性方程组的最小二乘解可表示为

$$\begin{aligned} \bar{P}_m^{*c} &= (\bar{P}_{1,m}^*, \bar{P}_{2,m}^*, \dots, \bar{P}_{m-1,m}^*)^T = (A^C)^+ (P_n^* - A^L P_{0,n} - A^R P_{n,n}) \\ &= \begin{pmatrix} -(A^C)^+ A^L & (A^C)^+ & -(A^C)^+ A^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{0,n} \\ P_n^* \\ P_{n,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

把端点条件式与上式合并, 可写为

$$\begin{aligned} \bar{P}_m^* &= (\bar{P}_{0,m}^*, \bar{P}_{1,m}^*, \dots, \bar{P}_{m,m}^*)^T = \bar{A}^+ P_n, \\ \bar{A}^+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(A^C)^+ A^L & (A^C)^+ & -(A^C)^+ A^R \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

对于需满足端点  $C^1$  或  $C^2$  连续条件的降多阶逼近, 也可类似推出.

### 3 误差计算

对于一般的 Bézier 曲线的降多阶逼近, 可结合自适应分割算法进行降阶, 即对于一条给定的  $n$  次 Bézier 曲线  $P_n(t)$ , 若降多阶后所得  $m$  次曲线  $\bar{P}_m^*(t)$  与原曲线  $P_n(t)$  的误差  $\epsilon$  大于给定公差, 则可将其分割, 再对每段子曲线分别进行降阶. 误差  $\epsilon$  的计算方法如下:

将所求得的最小二乘解曲线  $\bar{P}_m^*(t)$  进行  $n-m$  次升阶, 设所得曲线为  $Q_n(t) = \sum_{i=0}^n Q_i B_i^n(t)$ , 则  $Q = A P_m^*$ , 其中  $Q = (Q_0, Q_1, \dots, Q_n)^T$ . 由此可得降阶后曲线  $\bar{P}_m^*(t)$  与原曲线  $P_n(t)$  之间的误差为

$$\epsilon = \| P_n(t) - \bar{P}_n^*(t) \| = \| P_n(t) - Q_n(t) \| = \left\| \sum_{i=0}^n P_i B_i^n - \sum_{i=0}^n Q_i B_i^n \right\| \leq \max_{i=0, \dots, n} \| P_i - Q_i \| .$$

### 4 例子

例 1: 如图 1 所示, 6 次 Bézier 曲线控制顶点为  $P_{0,6}(0,0), P_{1,6}(1,5), P_{2,6}(3,6), P_{3,6}(5,6.5), P_{4,6}(6,6), P_{5,6}(7,4), P_{6,6}(8,0)$ . 对其降 3 阶后所得 3 次 Bézier 逼近曲线的控制顶点为  $\bar{P}_{0,3}^*(-0.1429, 0.2857), \bar{P}_{1,3}^*(2.8095, 8.1905), \bar{P}_{2,3}^*(6.5952, 7.0476), \bar{P}_{3,3}^*(7.8810, 0.1905)$ . 图中实线部分分别为原 Bézier 曲线及其控制多边形, 虚线部分分别为降阶后的逼近曲线及其控制多边形, 下同.



Fig. 1 Reduction of the degree 6 Bézier curve

图 1 6 次 Bézier 曲线的降阶

例 2: 如图 2 所示, 10 次 Bézier 曲线的控制顶点为  $P_{0,10}(0,0), P_{1,10}(2,6), P_{2,10}(3,5), P_{3,10}(4,3), P_{4,10}(4,-5), P_{5,10}(5,4), P_{6,10}(6,5), P_{7,10}(7,6), P_{8,10}(8,3), P_{9,10}(12,4), P_{10,10}(12,0)$ . 对其降 4 阶后所得 6 次 Bézier 逼近曲线如图 2 和图 3 所示. 其中, 图 2 的逼近曲线未插值原 Bézier 曲线两端点, 图 3 中插值原曲线两端点的 Bézier 逼近曲线的控制顶点为  $\bar{P}_{0,6}^*(0,0,0,0), \bar{P}_{1,6}^*(3.3741, 11.8346), \bar{P}_{2,6}^*(3.7580, -6.4433), \bar{P}_{3,6}^*(5.1014, 1.7605), \bar{P}_{4,6}^*(5.2929, 8.2683), \bar{P}_{5,6}^*(11.8684, 4.2809), \bar{P}_{6,6}^*(12.0, 0, 0, 0)$ .

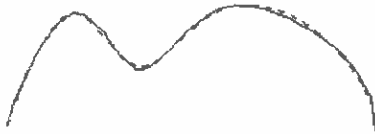


Fig. 2 Reduction of the degree 10 Bézier curve (without interpolating endpoints)

图 2 10 次 Bézier 曲线的降阶(未插值端点)

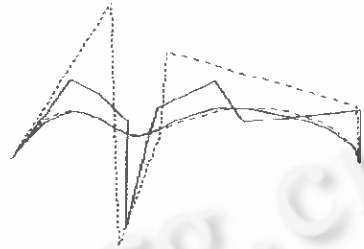


Fig. 3 Reduction of the degree 10 Bézier curve (with interpolating endpoints)

图 3 10 次 Bézier 曲线的降阶(插值端点)

### References:

- [1] Danneberg, L., Nowacki, H. Approximate conversion of surface representations with polynomial bases. *Computer-Aided Geometric Design*, 1985, 2(2):123~132.
- [2] Farin, G. Degree reduction fairing of cubic B-Spline curves. In: Barnhill, R. E., ed. *Geometry Processing for Designing and Manufacturing*. Philadelphia: SIAM, 1992. 87~99.
- [3] Hoschek, J. Approximation of spline curves. *Computer-Aided Geometric Design*, 1987, 4(1):59~66.
- [4] Watkins, M., Worsey, A. Degree reduction for Bézier curves. *Computer-Aided Design*, 1988, 20(7):398~405.
- [5] Lachance, M. A. Chebyshev economization for parametric surfaces. *Computer-Aided Geometric Design*, 1988, 5(3):195~208.
- [6] Eck, M. Degree reduction of Bézier curves. *Computer-Aided Geometric Design*, 1993, 10(4):237~257.
- [7] Bogacki, P., Weinstein, S., Xu, Y. Degree reduction of Bézier curves by uniform approximation with endpoint interpolation. *Computer-Aided Design*, 1995, 27(9):651~661.
- [8] He, Xu-chu. *The Basic Theory and Computational Methods of Generalized Reverse Matrices*. Shanghai, Shanghai Science and Technology Press, 1985 (in Chinese).

- [9] Farin, G. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design*. 2nd ed., San Diego: Academic Press, 1990.

#### 附中文参考文献:

- [8] 何祖初. 广义逆矩阵的基本理论和计算方法. 上海: 上海科学技术出版社, 1985.

## Degree Reduction Approximation of Bézier Curves by Generalized Inverse Matrices\*

CHEN Guo-dong, WANG Guo-jin

(State Key Laboratory of CAD & CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China);

(Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

E-mail: wgj@math.zju.edu.cn

<http://www.zju.edu.cn>

**Abstract:** The multidegree reduction of Bézier curves is studied in this paper. The elevation property of Bézier curves themselves is combined with the least squares theory of generalized inverse matrices, and a new approximation method of multidegree reduction is presented. This method overcomes the weakness of the general method, which can reduce only one degree for each time, and obtains good approximation effects.

**Key words:** elevation; multidegree reduction; approximation; generalized inverse matrix

\* Received November 2, 1999; accepted January 5, 2000

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No. 69673029; the Natural Science Foundation of Zhejiang Province of China under Grant No. 698025; the National Grand Fundamental Research Program of China under Grant No. G1998050600