

隐式裁剪曲面的造型及绘制^{*}

余正生¹, 彭群生², 马利庄², 吴启迪³, 李启炎¹

¹(同济大学 CAD 研究中心, 上海 200092);

²(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027);

³(同济大学 CIMS 研究中心, 上海 200092)

E-mail: yuzhengsheng@163.net

摘要: 隐式曲面没有参数域的概念, 故对其裁剪问题的研究, 很少有人问津. 提出了一种隐式裁剪曲面的造型和绘制方法: 先把投影平面变换到 xy 平面, 将该 xy 平面作正交化网格剖分, 由参数表示或隐式表示的裁剪曲线在该 xy 平面定义裁剪区域, 再把裁剪后留下的区域内的网格投影到隐式曲面上, 从而实现了隐式裁剪曲面的多边形化绘制.

关键词: 隐式裁剪曲面; 造型; 绘制; 裁剪曲线

中图法分类号: TP391 **文献标识码:** A

裁剪曲面在 CAD/CAM 技术领域中发挥着重要作用, 一方面, 现在大多数 CAD/CAM 系统的曲面造型系统均建立在裁剪曲面体系上; 另一方面, 裁剪曲面已被公认为曲面造型与实体造型之间的桥梁. 显然, 裁剪曲面的引入大大拓宽了立体造型系统的几何覆盖面, 但同时也给立体造型带来一个难题, 即如何有效地处理具有复杂边界的裁剪曲面. 我们认为, 对裁剪曲面进行多边形化不失为处理裁剪曲面的一个好方法. 因为复杂的裁剪曲面经过多边形化后, 对它的处理就转化为对简单的三角片的处理, 使得裁剪曲面的消隐显示、真实感显示等问题可以迎刃而解. 对参数裁剪曲面的多边形化问题, 国内外不少专家作了一些研究^[1~5], 他们的研究各自解决了某些方面的实际问题, 但他们的参数曲面多边形化的方法有一个共同点, 即都是基于参数域的, 也就是说, 都是对参数域进行多边形剖分, 再将参数域上的多边形映射到三维空间以生成参数裁剪曲面的多边形化.

然而, 对于隐式裁剪曲面的造型及绘制问题, 却很少有人问津, 因为隐式曲面没有参数域的概念. 本文提出了一种隐式裁剪曲面的造型及绘制方法: 先设置一个投影平面(相当于参数曲面的参数域), 对投影平面进行网格剖分, 再把该平面内经裁剪后得到的网格投影到隐式曲面上, 即实现了隐式裁剪曲面的造型和绘制, 裁剪曲线既可以是参数曲线, 也可以是隐式曲线.

本文第 1 节讨论裁剪区域的生成. 第 2 节介绍隐式裁剪曲面的造型与绘制. 第 3 节是结论.

• 收稿日期: 1999-02-09; 修改日期: 1999-11-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69823003); 国家杰出青年基金资助项目(68625304); 国家科技部“九五”重大攻关资助项目(96-A01-02-01); 中国博士后科学基金资助项目

作者简介: 余正生(1967-), 男, 江西人, 博士后, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学; 彭群生(1947-), 男, 湖南人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为计算机图形学, 计算机辅助几何设计; 马利庄(1963-), 男, 浙江人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学; 吴启迪(1947-), 女, 浙江人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为智能自动化, CIMA, FMS; 李启炎(1939-), 男, 江苏人, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为计算机图形学, 工程设计 CAD 系统.

1 裁剪区域的生成

对于隐式曲面 $F(x, y, z) = 0$, 我们在投影平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 上划分裁剪区域, 经坐标变换(平移和旋转), 可使投影曲面 π 成为 $Z' = 0$ (即 $x'y'$ 平面), 隐式曲面方程为

$$F(x(x', y', z'), y(x', y', z'), z(x', y', z')) = 0. \tag{1}$$

因此, 我们只考虑投影平面 xy 平面的情况, 不妨假设隐式曲面经坐标变换后, 其方程仍记为 $F(x, y, z) = 0$. 如图 1 所示, 为隐式曲面及其投影平面 π . 在投影平面(即 $z = 0$ 的平面)内, 我们来定义裁剪区域. 先将该平面进行如图 2 所示的正交化网格剖分, 每一个小正方形(如 $V_1V_2V_3V_4$)称为网格单元, 带斜线的阴影区域将被裁剪掉, 图 2(a)中裁剪区域的边界由 C_{AC} 曲线、直线 l_{AB} 及 l_{AC} 组成, 图 2(b)中裁剪区域的边界是封闭曲线 c . 裁剪曲线可以是参数曲线, 也可以是隐式曲线. 下面我们分隐式曲线和参数曲线两种情况来讨论裁剪区域的生成.

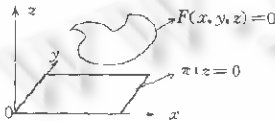


Fig. 1 Implicit surface and its projection plane
图1 隐式曲面及其投影平面

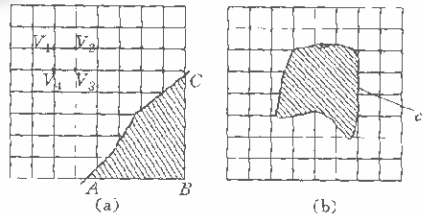


Fig. 2 Defining trimmed area in projection place
图2 在投影平面定义裁剪区域

1.1 隐式曲线定义裁剪区域

隐式曲线定义裁剪区域有两种方式. 如图 3(a)所示, 裁剪区域的边界由一条隐式曲线 $F(x, y) = 0$ 来定义, 如图 3(b)所示. 裁剪区域的边界由 n 条隐式曲线来定义. 对于第 2 种定义方式, 我们可以通过构造 R 函数^[6]来定义裁剪区域的边界.

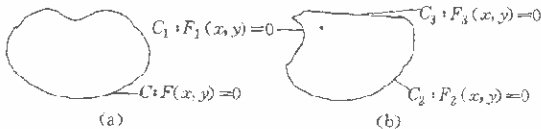


Fig. 3 Implicit curves defining trimmed area
图3 定义裁剪区域的隐式曲线

我们知道, 裁剪区域由 $F_1(x, y) \ge 0 \cap F_2(x, y) \ge 0 \cap \dots \cap F_n(x, y) \ge 0$ 来定义, 而 $F_1(x, y) \ge 0$ 与 $F_2(x, y) \ge 0$ 的交集定义的区域, 可由 R 函数 $F_1 \& F_2 \ge 0$ 来定义, R 函数表示 $F_1 \& F_2$

的式子如下:

$$F_1 \& F_2 = F_1 + F_2 - \sqrt{F_1^2 + F_2^2}. \tag{2}$$

通过 R 函数就可以把由 n 条隐式曲线组成的裁剪区域的边界表示成一个隐式表达式 $F(x, y) = 0$. 因此只讨论仅由一个隐式表达式来定义裁剪区域的边界的情况.

由 $F(x, y) = 0$ 定义的裁剪区域的边界采取网格序列法^[7]来生成, 网格序列法是一种等值线抽取的方法, 其基本思想为: 按照网格单元的排列次序, 逐渐处理每个单元, 寻找每一单元内相应的等值线段, 即满足 $F(x, y) = 0$ 的线段, 在处理完所有单元后, 就自然生成了该网格中的等值线的分布.

1.1.1 正交化网格的等值线生成

如图 4 所示, 设一正规化网格, 其网格线是相互正交的, 每一网格单元 Δ_{ij} 为矩形, 4 个顶点分别为 $(u_i, v_j), (u_i, v_{j+1}), (u_{i+1}, v_j), (u_{i+1}, v_{j+1}) (i = 0, 1, \dots, n_x - 1; j = 0, 1, \dots, n_y - 1)$, 对应的函数值为 $h_{i,j}$ (即 $h(u_i, v_j)$), $h_{i,j+1}, h_{i+1,j}, h_{i+1,j+1}$. 要在 Δ_{ij} 生成 $h(u, v) = 0$ 的等值线, 其主要算法步骤如下:

(1) 逐个计算每一网格单元与等值线的交点,

(2) 连接该单元与等值线的交点,生成该单元内的一条等值线的线段,

(3) 由一系列单元内的等值线的线段构成该网格中的等值线. 网格单元与等值线的交点计算,主要是计算单元的各边与等值线的交点,假设函数 $h(u, v)$ 在单元内呈线性变化,可以采用顶点判定和边上插值的方法来计算交点,具体步骤如下:

① 若 $h_{i,j} \leq 0$, 则顶点 (u_i, v_j) 记为‘-’, 否则记为‘+’.

② 若单元的 4 个顶点全为‘+’或全为‘-’, 则该网格单元与等值线 $h(u, v) = 0$ 无交点, 否则:

③ 对于两个顶点分别为‘+’, ‘-’的单元边, 可用线性插值计算等值线与这条边的交点, 如图 5 所示, 设 (u_i, v_j) 为‘-’, (u_i, v_{j+1}) 为‘+’, 则交点为

$$\begin{cases} u_i = u_i \\ v_i = \frac{v_j(h_{i,j+1} - 0) + v_{j+1}(0 - h_{i,j})}{h_{i,j+1} - h_{i,j}} \end{cases} \quad (3)$$

该单元的其他边上的交点可用相同方法求得.

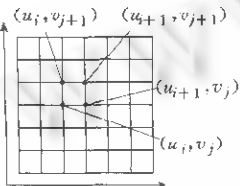


Fig. 4 Regular grid
图4 正规化网格

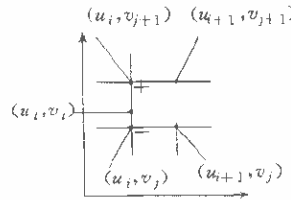


Fig. 5 Computing intersection point between iso-curve and grid-boundary
图5 计算等值线与网格单元边的交点

在每一个网格单元内, 计算出等值线与该网格单元的边的交点, 利用这些交点, 就能构成该单元内的等值线段.

若网格单元 Δ_j 的‘+’、‘-’的顶点交叉分布, 则交点的连接可能有两种形式(如图 6 所示). 为了避免这种二义性的连接, 采用基于 St. Andrew 的单元剖分(如图 7 所示)方法, 其基本思想是利用对角线将 Δ_j 分成 4 个三角形单元, 求出中心点 (u_{mid}, v_{mid}) 的函数值 $h_{mid} = h(u_{mid}, v_{mid})$, 等值线的抽取直接在每个三角形单元中进行, 因为每一个三角形单元至多只包含一条等值线段.

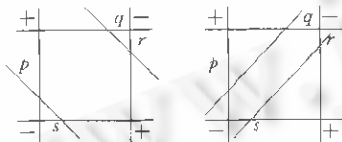


Fig. 6 Joining with different meanings
图6 二义性的连接

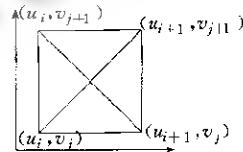


Fig. 7 Grid partition based on St. Andrew
图7 基于St. Andrew的单元剖分

1.1.2 隐式曲线定义裁剪区域

在正交化网格抽取由隐式曲线方程 $F(x, y) = 0$ 定义的等值线之后, 我们来确定裁剪区域.

如图 8 所示, 若网格单元的 4 个顶点 (x_i, y_i) ($i=1, 2, 3, 4$) 均在等值线定义的裁剪区域内(如正方形 $ABCD$), 即 $F(x_i, y_i) > 0$, 则该单元为内部网格单元; 若网格单元的 4 个顶点均在裁剪区域以外(如正方形 $EFGH$), 即 $F(x_i, y_i) < 0$, 则该单元

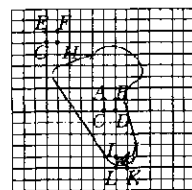
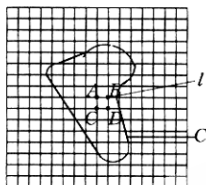


Fig. 8 Defining trimmed area with implicit curves
图8 隐式曲线定义的裁剪区域的确定

为外部网格单元;若网格单元的部分顶点在裁剪区域以内(如正方形 $IJKL$),则该单元为边界网格单元.显而易见,对内部或外部网格单元,很容易判定,下面,我们来讨论如何划分边界网格单元.

在正交化网格抽取等值线时,通过等值线段即可对边界网格单元进行裁剪^[8],如图8中的网格单元 $IJKL$,它的阴影部分为该单元在裁剪区域内部的部分,其余部分为该单元在裁剪区域外部的部分.

1.2 参数曲线定义裁剪区域



如图9所示,设定义裁剪区域边界的参数曲线为 C ,通过网格单元的顶点作一条射线 l ,若 l 与 C 只有奇数个交点,则该顶点在裁剪区域之内,否则在裁剪区域之外.通过这种判别方法即可判别出内部网格单元、外部网格单元和边界网格单元.将边界曲线进行折线化,通过该折线段即可对边界网格单元进行裁剪^[8].

Fig.9 Defining trimmed area with parametric curves

图9 参数曲线定义的裁剪区域的确定

边界网格单元进行裁剪^[8].

2 隐式裁剪曲面的生成与绘制

在投影平面划分了裁剪区域之后,将保留下来的区域的网格多边形(外部网格单元和边界网格单元经裁剪后保留下来的部分),投影到隐式曲面上,即生成并绘制了隐式裁剪曲面,其基本思想是:将投影平面内经裁剪后保留下来的网格多边形的每个顶点都垂直发出一条光线,采用区间算术技术^[9],求出光线与隐式曲面的交点,根据投影平面上网格单元的拓扑结构,将交点连接成多边形,即实现了隐式裁剪曲面的多边形化.

因此,隐式曲面虽无参数域,我们仍能够对其进行裁剪.隐式裁剪曲面可以看成是由以下方式生成:在投影平面定义裁剪轮廓线,沿投影平面的法方向平移该轮廓线所形成柱体称为裁剪柱体,用它对隐式曲面进行裁剪.由于隐式曲面无参数域,所以用户需要设置投影平面的法向.若投影平面的法向发生变化,生成的隐式裁剪曲面也随之发生变化.

图10是隐函数表示的球面,图11是在图10的球面上裁掉一个圆柱后所生成的隐式裁剪曲面,图12是在隐函数表示的变形的圆环面上裁剪了一个“中”字.其中,图12的左上图为变形的圆环面,左下图为“中”字型的轮廓线沿投影平面的法方向平移而形成的裁剪柱体,右图为生成的隐式裁剪曲面.

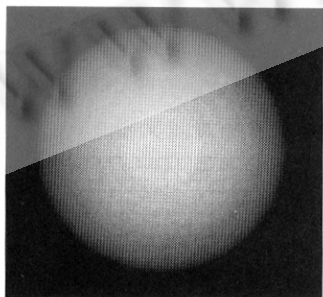


Fig. 10 Sphere defining by implicit surface

图10 隐函数表示的球面

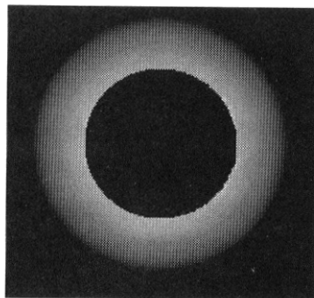


Fig. 11 Implicit trimmed surface on Fig. 10

图11 图10的隐式裁剪曲面

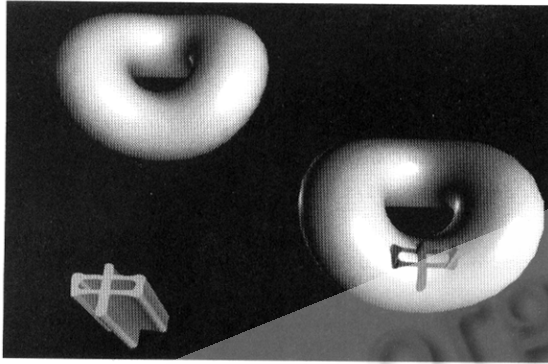


Fig. 12 Trimming shape of “中” on torus

图 12 圆环面上裁剪了一个“中”字

3 结 论

本文提出了一种生成并绘制隐式裁剪曲面的机制,通过隐式曲线或参数曲线在投影平面内定义裁剪区域.由隐式曲线定义裁剪区域的边界是通过抽取等值线来实现的.然后将投影平面内经裁剪后保留下来的网格多边形投影到隐式曲面,即可实现隐式裁剪曲面的造型与绘制.

References:

- [1] Liao, Wen-he, Shen, Qing-yun. Triangling and displaying for trimmed surfaces. *Journal of Engineering Graphics*, 1996,26 (2):45~51 (in Chinese).
- [2] Gao, Shu-ming. Study on solid modeling system with trimmed surface function [Ph. D. Thesis]. Zhejiang University, 1995 (in Chinese).
- [3] Hamann, B., Tsai, P. Y. A tessellation algorithm for the representation of trimmed NURBS surface with arbitrary trimming curves. *Computer Aided Design*, 1996,28(6/7):461~472.
- [4] Rockwood, A., Heaton, K., Davis, T. Real-Time rendering of trimmed surfaces. *Computer Graphics*, 1989,23(3):107~116.
- [5] Piegsl, L. A., Richard, A. M. Tessellating trimmed NURBS surface. *Computer Aided Design*, 1995,27(1):16~26.
- [6] Pasko, A., Adzhiev, V., Sourin, A., *et al.* Function representation in gemetric modeling: concepts, implementation and applications. *The Visual Computer*, 1995,11(9):429~446.
- [7] Shi, Jiao-ying, Cai, Wen-li. *Visualization in Science Computing: Algorithm and System*. Beijing: Science Press, 1996 (in Chinese).
- [8] Tang, Rong-xi, Wang, Jia-ye, Peng, Qun-sheng. *Course on Computer Graphics*. Beijing: Science Press, 1990 (in Chinese).
- [9] Mitchell, D. P. Robust ray intersection with interval arithmetic. In: *Proceedings of the Graphics Interface'90*. 1990. 68~74.

附中参考文献:

- [1] 廖文和,沈庆云. 裁剪曲面的三角化及图形显示. *工程图学学报*,1996,26:45~51.
- [2] 高曙明. 具有 trimmed 曲面功能的立体造型系统研究[博士学位论文]. 浙江大学,1990.
- [3] 石教英,蔡文立. *科学计算可视化算法与系统*. 北京:科学出版社,1996.
- [4] 唐荣锡,汪嘉业,彭群生. *计算机图形学教程*. 北京:科学出版社,1990.

Modeling and Rendering of Implicit Trimmed Surfaces

YU Zheng-sheng¹, PENG Qun-sheng², MA Li-zhuang², WU Qi-di³, LI Qi-yan¹

¹(Research Center of CAD Technology, Tongji University, Shanghai 200092, China);

²(State Key Laboratory of CAD & CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China);

³(CIMS Center, Tongji University, Shanghai 200092, China)

E-mail: yuzhengsheng@163.net

Received February 9, 1999; accepted November 23, 1999

Abstract: Implicit trimmed surfaces are rarely studied since they have no parametric domain. A method which is related to modeling and rendering of implicit trimmed surfaces is presented in this paper. First the projection plane is transformed into xy -plane in which the regular grids are partitioned and trimmed areas are defined by a parametric/implicit curve, then the grids left after trimming are projected onto the implicit surfaces so as to realize polygonization of the implicit trimmed surfaces.

Key words: implicit trimmed surface; modeling; rendering; trimmed curve