

# 一种插值与逼近运动物体活动标架的新方法\*

姜忠鼎<sup>1</sup> 马利庄<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室 杭州 310027)

<sup>2</sup>(Centre for Advanced Media Technology Nanyang Technological University Singapore)

E-mail: {zdjiang, mlz}@cad.zju.edu.cn

**摘要** 插值运动物体给定活动标架(原点位置和 3 个坐标轴朝向)是计算机图形学、机器人等领域的一个重要问题. 该文提出一种采用 B 样条曲线插值与逼近运动物体活动标架的新方法. 采用 4 个欧拉参数对正交活动标架的旋转变换矩阵进行参数化, 得到了一个简单的优化方程. 采用迭代法求解该优化方程来逼近运动轨迹任意处伪活动标架的旋转变换矩阵. 还证明了插值和逼近所引起的误差是可控的. 由于活动标架的计算只涉及 2 阶或 3 阶线性方程组, 所以此方法具有很高的运行效率.

**关键词** 运动设计, 插值与逼近, 活动标架, B 样条.

**中图法分类号** TP391

在计算机图形学、机器人等领域, 人们通常设定运动物体的若干关键位置  $\{O_i; x_i, y_i, z_i, i=1, 2, \dots, m\}$ , 即一组物体所在的局部坐标向量, 对这些关键位置进行适当的插值或逼近, 以确定运动坐标系的一般位置, 进而可确定物体的一般位置. 物体的朝向一般可用欧拉角来表示, 因此, 朝向的插值问题可简单地转化为 3 个欧拉角的插值问题. 但欧拉角又有其局限性. 因为, 旋转矩阵是不可交换的, 欧拉角的旋转一定要按某个特定的次序进行. 等量的欧拉角变化不一定引起等量的旋转变化, 却导致了旋转的不均匀性. 欧拉角还有可能导致自由度的丧失, 即所谓的 gimble lock 现象. Shoemake 为解决因采用欧拉角表示所引起的麻烦, 最早将四元数引入计算机动画领域, 并提出用单位四元数空间上的 Bézier 样条来插值四元数<sup>[1]</sup>. Barr 等人提出了一个采用四元数对带有角速度约束的景物的朝向进行光滑插值的方法, 允许对轨迹端点处的角速度进行约束. 此方法是首先把关键帧处的旋转角转化为四元数, 然后把非欧几里德空间四元数路径的切向加速度取极小, 并用有限差分和最优化方法求解所得到的能量方程<sup>[2]</sup>. Kim 通过构造一组新的基, 提出了把  $R^3$  空间曲线变换到单位四元数的一般性方法<sup>[3]</sup>.

在 CAD/CAM、机器人等领域, 通常要求插值方法必须保证所得运动坐标系既是单位正交, 又是 NURBS 曲线表示形式. 最近, 这一问题引起了学者们的广泛兴趣. Roschel 于 1998 年对运动物体的有理运动表示方法作了综述<sup>[4]</sup>. 许多商用机器人控制系统采用分段线性或分段圆弧插值方式, 它简单实用, 但也存在着明显的缺点, 如物体的运动在连接处很不自然<sup>[5]</sup>. 为此, Wang 和 Yang 引入了一种近似弧长参数化的 5 次样条曲线<sup>[6]</sup>, Farouki 和 shah 则引入了一种所谓的 PH 曲线<sup>[7]</sup>. 但这两种方法中曲线活动标架的表达式并非真正的 NURBS 表示形式. 为使活动标架具有精确的 NURBS 表示形式, Ge 和 Ravani 引入了刚体运动群  $SE(3)$  的单位四元数表示方法<sup>[8]</sup>, 其本质是将  $R^3$  中正交变换表示成四元数, 然后将给定运动位置的插值问题转化为四元数的插值问题. 此后, 又有一些研究者发展了相应四元数插值方法<sup>[9,10]</sup>. 采用四元数, 活动标架最终可表示成 NURBS 形式, 但表示形式仍然较复杂. 例如, 若利用  $k$  次 NURBS 曲线对局部坐标原点路径采用四元数方法插值, 则最终的活动标架为  $2k$  次 NURBS 形式. 为降低表示次数, 提高计算效率, 有必要对此作进一步的研究, 以满足 CAD 虚拟环境中

\* 本文研究得到国家自然科学基金(No. 69973043)和国家杰出青年基金(No. 69625304)资助. 作者姜忠鼎, 1975 年生, 博士生, 主要研究领域为计算机图形学, 科学计算可视化. 马利庄, 1963 年生, 博士, 研究员, 博士生导师, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 科学计算可视化.

本文通讯联系人: 姜忠鼎, 杭州 310027, 浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室

本文 2000-02-28 收到原稿, 2000-04-24 收到修改稿

快速计算的需要.此外,仍缺乏一个好的误差估计公式,而这又是实际应用中所必需的.

本文提出了一种用B样条曲线统一插值以及逼近活动标架坐标原点和3个坐标轴朝向的新方法.该方法并不是精确计算物体在运动时所对应的正交活动标架,而是先得到一个伪活动标架,然后求得最佳逼近该伪活动标架的正交活动标架.同时,我们还证明了逼近误差是可控的.采用逐步求精的迭代技术,可根据需要得到更精确的正交活动标架.迭代求解计算只涉及2阶或3阶线性方程组,因而该方法具有很高的运行效率.

本文第1节对活动标架插值问题进行描述并给出我们用B样条曲线统一插值活动标架原点和3个坐标轴朝向的方法.第2节证明了活动标架的逼近误差是可控的.第3节给出逼近伪活动标架的方法和该算法的一个运行实例.最后是结论.

### 1 插值运动物体活动标架

令 $R^3$ 表示三维欧几里德空间.采用Cartesian坐标架 $\{O',x',y',z'\}$ 和 $\{O,x,y,z\}$ 来分别表示固定标架 $\Sigma'$ 和活动标架 $\Sigma$ .固定标架 $\Sigma'$ 中的点表示为 $P=(x',y',z')$ ,活动标架 $\Sigma$ 中的点表示为 $P=(x,y,z)$ .设 $\Sigma'_i(i=0,1,\dots,n)$ 为活动标架 $\Sigma$ 通过式(1)变换得到的 $n+1$ 个相关位置.

$$P'_i(P)=D'_i+A_iP, \tag{1}$$

其中 $D'_i=(a_i,b_i,c_i)'$ 为平移向量, $A_i=(ex_i,ey_i,ez_i)$ 为 $3 \times 3$ 正交矩阵.插值问题可以描述为寻找一个参数运动,满足

$$P'(t,P)=D'(t)+A(t)P. \tag{2}$$

物体运动可分为平移变换 $D'(t)$ 和旋转变换 $A(t)$ 两部分.平移变换部分可通过对数据点 $D'_i$ 采用普通B样条插值方法来得到<sup>[1]</sup>.

$$D'(t)=\sum_{i=0}^n N_{i,k}(t)D'_i, t \in [t_k, t_{n-1}], \tag{3}$$

其中 $N_{i,k}(t)$ 为第 $i$ 个 $k$ 次B样条基函数, $\{t_0, t_1, \dots, t_{n+k+1}\} (t_i < t_{i+1}, i=0, 1, \dots, n-k-1)$ 为严格递增的节点矢量.在活动标架插值的传统方法中,应用较广的手段是对每一个分量分别进行插值,然后根据单位正交化要求进行相应的处理,但它有明显的缺点<sup>[1]</sup>.为克服该缺点,对给定的活动标架 $\{D'_i; ex_i, ey_i, ez_i\}, i=0, 1, \dots, n$ ,采用 $k$ 次B样条曲线 $D'(t), ex(t), ey(t), ez(t)$ 来分别逼近平移变换部分 $D'_i$ 和3个正交向量 $ex_i, ey_i, ez_i$ .这4条曲线定义在同一节点矢量 $T=\{t_0, t_1, \dots, t_{n+k+1}\}$ 上,即

$$\begin{cases} A(t) = (ex(t), ey(t), ez(t)) = \sum_{i=0}^n (ex'_i, ey'_i, ez'_i) N_{i,k}(t) \\ D'(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) D'_i \end{cases} \tag{4}$$

但 $\{D'(t); ex(t), ey(t), ez(t)\}$ 通常并不形成精确的正交活动标架.我们首先证明它形成一个伪活动标架,然后提出一种方法来计算最佳逼近该伪活动标架的正交活动标架.

### 2. 逼近误差控制公式

我们采用奇次B样条曲线来考虑活动标架插值问题.设 $F(t)$ 为一条给定的 $k-1$ 次连续可微曲线,曲线 $C(t)$ 在参数 $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$ 处插值曲线 $F(t)$ .令 $k+1=2m$ ,考虑完全样条插值问题:

$$\begin{cases} C(\tau_i) = F(\tau_i), & i=0, 1, \dots, n \\ t_0 = \dots = t_k < t_{k+1} < \dots < t_n < t_{n+1} = \dots = t_{n+k+1} \\ t_0 = \tau_0 = \dots = \tau_m < \tau_{m+1} < \dots < \tau_{n-m} = \dots = \tau_n = t_n \\ t_{k+1} = \tau_{m+i}, & i=1, 2, \dots, n-k \end{cases} \tag{5}$$

对连续函数 $F(t)$ ,定义 $\|F(t)\|_{\infty} = \max_{t \in [a,b]} |F(t)|$ .对该样条插值问题,有以下结论成立.

结论1. 设 $XC(t), YC(t), ZC(t)$ 和 $XF(t), YF(t), ZF(t)$ 分别表示曲线 $C(t)$ 和 $F(t)$ 的 $x, y, z$ 三个分量部分

$|\tau| = \max_i |\tau_{i+1} - \tau_i|$ . 存在正常数  $\text{const}_k$  和常数  $\text{const}_{k,M(r,m)}$ , 对任意  $k+1$  次连续可微曲线  $F(t)$ , 有

$$\|XC(t) - XF(t)\| \leq \text{const}_k \text{const}_{k,M(r,m)} |\tau|^{k+1} \left| \frac{d^{k+1}XF}{dt^{k+1}} \right|_{\infty}, \tag{6}$$

其中  $M(r,m) \equiv \max_{i,j} \frac{\tau_{i+m} - \tau_i}{\tau_{j+m} - \tau_j}$ ,  $\|YC(t) - YF(t)\|$  和  $\|ZC(t) - ZF(t)\|$  也存在类似不等式.

证明: 由奇次样条插值的理论可知, 存在一常数  $\text{const}_{k,M(r,m)}$ , 满足

$$\|XC(t) - XF(t)\| \leq \text{const}_{k,M(r,m)} \cdot |\tau|^m \text{dist} \left( \frac{d^n XF}{dt^n}, S_{m,T} \right),$$

其中  $\text{dist} \left( \frac{d^n XF}{dt^n}, S_{m,T} \right)$  表示  $S_{m,T}$  中的光滑函数到该曲线的距离.  $S_{m,T}$  为定义在节点矢量  $T$  上的  $m$  阶 ( $m-1$  次) 样条空间. 对于  $m$  次连续可微函数  $\frac{d^n XF}{dt^n}$ , 存在一个正常数  $\text{const}_k$  满足  $\text{dist} \left( \frac{d^n XF}{dt^n}, S_{m,T} \right) \leq \text{const}_k |T|^m \left| \frac{d^{2m} XF}{dt^{2m}} \right|_{\infty}$ , 其中  $|T| = \max_i |\tau_{i+1} - \tau_i| \leq |\tau|$ . 则结论 1 得证.

由方程(6)可知, 当  $|\tau|$  趋向于 0 时, 原始曲线与插值样条曲线之间的误差以  $k+1$  阶的速度也趋向于 0. 从应用角度出发, 以上结论也可以表述为结论 2.

**结论 2.** 设一个给定的活动标架  $\Sigma^* : \{D^*(t); ex^*(t), ey^*(t), ez^*(t)\}$  在时间域上  $k+1$  次连续可微,  $\Sigma_i : \{D_i; ex_i, ey_i, ez_i\}$  为时间  $t = \tau_i, i = 0, 1, \dots, n$  处相应的采样值. 设  $\Sigma : \{D(t); ex(t), ey(t), ez(t)\}$  为  $\Sigma^*$  的  $k$  次完全样条插值结果, 则存在一个仅依赖  $k$  和  $\Sigma^*$  的正常数  $M$ , 满足

$$\begin{cases} \|D(t) - D^*(t)\|_{\infty} \leq M |\tau|^{k+1} \\ \|ex(t) - ex^*(t)\|_{\infty} \leq M |\tau|^{k+1} \\ \|ey(t) - ey^*(t)\|_{\infty} \leq M |\tau|^{k+1} \\ \|ez(t) - ez^*(t)\|_{\infty} \leq M |\tau|^{k+1} \end{cases} \tag{7}$$

上述方程可简记为  $\|\Sigma(t) - \Sigma^*(t)\|_{\infty} \leq M |\tau|^{k+1}$ . 若在采样时间间隔充分小, 连续标架  $\Sigma_i$  和  $\Sigma_{i+1}$  相当接近, 对于给定的任意一个小正数  $\epsilon > 0$ , 存在一个  $\delta > 0$ , 当  $|\tau| < \delta$  时, 即  $|\tau_i - \tau_{i+1}| < \delta, i = 0, 1, \dots, n$ , 利用结论 2, 有  $\|\Sigma(t) - \Sigma^*(t)\|_{\infty} \leq \epsilon$  成立.

对于仿射活动标架  $\Sigma : \{D(t); ex(t), ey(t), ez(t)\}$ , 它可以不必是正交的. 对于任意小正数  $\delta > 0$ , 有

$$\begin{cases} |ex \times ey| \leq M^2 \delta^2 + 2M\delta \leq \epsilon \\ ||ex \cdot ex| - 1| \leq M^2 \delta^2 + 2M\delta \leq \epsilon \end{cases} \tag{8}$$

可得到关于  $y, x$  分量的类似不等式. 由以上结论可知,  $\Sigma : \{D(t); ex(t), ey(t), ez(t)\}$  近似为一个正交活动标架, 我们称它为伪活动标架.

### 3 正交活动标架逼近伪活动标架

令  $SO(R^3)$  表示欧几里德空间  $R^3$  中的旋转群,  $C$  为  $SO(R^3)$  中的正交矩阵. 可采用 4 个不同时为 0 的欧拉参数  $c_0, c_1, c_2, c_3$  对  $C$  进行参数化.

$$C = \frac{1}{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \begin{pmatrix} c_0^2 + c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 & 2(c_1c_2 - c_0c_3) & 2(c_1c_3 + c_0c_2) \\ 2(c_1c_2 + c_0c_3) & c_0^2 - c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 & 2(c_2c_3 - c_0c_1) \\ 2(c_1c_3 - c_0c_2) & 2(c_2c_3 + c_0c_1) & c_0^2 - c_1^2 - c_2^2 + c_3^2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

不失一般性, 可假设  $c_0 \neq 0, d_i = c_i/c_0, i = 1, 2, 3$ . 这时, 矩阵  $C$  只含有  $d_1, d_2, d_3$  这 3 个独立变量, 简化为

$$C = \frac{1}{1 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2} \begin{pmatrix} 1 + d_1^2 - d_2^2 - d_3^2 & 2(d_1d_2 - d_3) & 2(d_1d_3 + d_2) \\ 2(d_1d_2 + d_3) & 1 - d_1^2 + d_2^2 - d_3^2 & 2(d_2d_3 - d_1) \\ 2(d_1d_3 - d_2) & 2(d_2d_3 + d_1) & 1 - d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

对于一个给定的伪活动标架, 设  $B$  为代表其 3 个坐标轴朝向的非正交矩阵,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \equiv (b_{ij})_{3 \times 3},$$

目标是寻找一个正交矩阵  $C$ , 满足

$$\|C - B\| = \text{minimum}, \quad C \in SO(R^3), \tag{11}$$

其中  $\|\cdot\|$  为矩阵的平方范数. 令  $\text{trace}B = b_{11} + b_{22} + b_{33}$ , 它表示矩阵  $B$  对角线元素之和. 利用相关公式易求得下式成立.

$$F(d_1, d_2, d_3) = \|C - B\|^2 = \text{trace}(C - B)(C - B) = 3 - \text{trace}(CB' + BC') + \text{trace}BB'. \tag{12}$$

方程(11)的优化问题转化为寻找合适的  $d_1, d_2, d_3$ , 使  $F$  最小, 即  $d_1, d_2, d_3$  应满足以下方程:

$$\frac{\partial F}{\partial d_1} = \frac{\partial F}{\partial d_2} = \frac{\partial F}{\partial d_3} = 0. \tag{13}$$

利用矩阵技术, 方程(13)可表示为如下形式:

$$\text{trace} \left[ d_1 C - \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d_2 & -d_1 & -1 \\ d_3 & 1 & -d_1 \end{pmatrix} \right] B' = 0, \tag{14}$$

$$\text{trace} \left[ d_2 C - \begin{pmatrix} -d_2 & d_1 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ -1 & d_3 & -d_2 \end{pmatrix} \right] B' = 0, \tag{15}$$

$$\text{trace} \left[ d_3 C - \begin{pmatrix} -d_3 & -1 & d_1 \\ 1 & -d_3 & d_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \right] B' = 0. \tag{16}$$

则优化问题又转化为寻找合适的  $d_1, d_2, d_3$ , 满足方程(14)~(16). 由于这 3 个方程都是非线性的, 可采用 Newton 迭代方法进行求解. Newton 迭代方法是一个逐步求精的过程, 这对于虚拟环境中的交互设计是非常重要的. 这里忽略了很多推导细节, 该优化问题的详细分析可参见附录.

图 1 为算法的一个运行实例. 其中最底一行为用户指定的待插值活动标架, 最上一行是采用本文提出的插值方法计算得到的伪活动标架, 中间一行为采用本文提出的逼近方法计算得到的活动标架. 为清晰起见, 图中没有绘制插值活动标架原点所生成的 B 样条曲线. 由图 1 可以看出, 即使在相邻活动标架的变化相当大的情况下, 逼近的结果也是很好的.

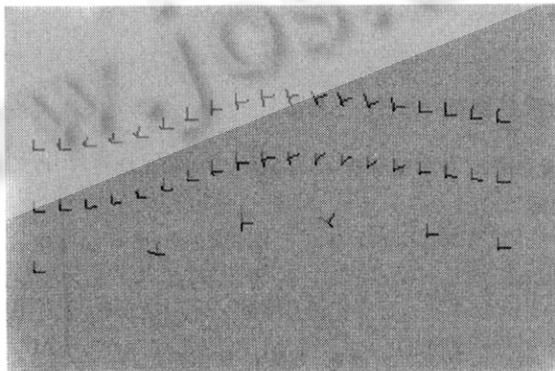


Fig. 1 Approximating pseudo moving frames by using orthogonal moving frames

图 1 用正交活动标架逼近伪活动标架

## 4 结 论

本文提出了一种插值与逼近运动物体活动标架的新方法. 该方法并不精确计算物体在运动时所对应的正交活动标架, 而是先得到一个伪活动标架, 然后求得最佳逼近该伪活动标架的正交活动标架. 该方法具有以下特征:

(1) 采用 B 样条曲线统一插值活动标架的原点及 3 个坐标轴朝向. 若插值 B 样条基函数为  $k$  次, 则插值活动标架的平移变换和旋转变换部分也为  $k$  次.

(2) 采用迭代方法来计算最佳逼近伪活动标架的正交活动标架. 求解仅涉及 2 阶或 3 阶线性方程, 而且又是一个逐步求精的过程, 用户可首先得到近似结果, 必要时再进一步进行计算.

(3) 逼近过程具有很快的收敛速度, 而且逼近误差是可控的, 这已得到证明.

## 参考文献

- 1 Shoemake K. Animating rotation with quaternion curves. *Computer Graphics*, 1985, 19(3): 245~254
- 2 Barr A H, Currin B, Gabriel S. Smooth interpolation of orientations with angular velocity constraints using quaternions. *Computer Graphics*, 1992, 26(2): 313~320
- 3 Kim M J, Kim M S, Shin Y S. A general construction scheme for unit quaternion curves with simple high order derivatives. *Computer Graphics*, 1995, 29(3): 369~376
- 4 Roschel O. Rational motion design—a survey. *Computer-Aided Design*, 1998, 30(3): 169~178
- 5 Fu K S, Gonzalez R C, Lee C S G. *Robotics*. New York: McGraw-Hill, Inc., 1987
- 6 Wang F C, Yang D C H. Nearly arc-length parameterized quintic spline interpolation for precision machining. *Computer-Aided Design*, 1993, 25(5): 281~288
- 7 Farouki R T, Shah S. Real-Time CNC interpolators for Pythagorean-hodograph curves. *Computer-Aided Geometric Design*, 1996, 13(7): 583~600
- 8 Ge Q J, Ravani B. Computer aided geometric design of motion interpolants. *ASME Journal of Mechanical Design*, 1994, 116(3): 756~762
- 9 Jüttler B. Visualization of moving objects using dual quaternion curves. *Computers & Graphics*, 1994, 18(3): 315~326
- 10 Zerfran M, Kumar V. Interpolation schemes for rigid body motions. *Computer-Aided Design*, 1998, 30(3): 179~189
- 11 Piegl L, Tiller W. *The NURBS Book*. Berlin: Springer-Verlag, 1995

## 附录 正交活动标架逼近伪活动标架的优化方法

首先设  $c_0 \neq 0$  (参见第 3 节).

令

$$D_1 = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d_2 & -d_1 & -1 \\ d_3 & 1 & -d_1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} -d_2 & d_1 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ -1 & d_3 & -d_2 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} -d_3 & -1 & d_1 \\ 1 & -d_3 & d_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} \quad (a1)$$

$$C_1 = d_1 d C - d D_1, \quad C_2 = d_2 d C - d D_2, \quad C_3 = d_3 d C - d D_3,$$

其中  $d = 1 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ . 优化问题转化为寻找合适的  $d_1, d_2, d_3$ , 满足以下方程:

$$\text{trace} C_1 B^t = 0, \quad \text{trace} C_2 B^t = 0, \quad \text{trace} C_3 B^t = 0, \quad (a2)$$

其中  $B$  为伪活动标架的旋转变换部分所对应的矩阵, 但它不是正交矩阵. 用正交矩阵  $C$  来逼近非正交矩阵  $B$ . 可采用下述方法选择  $d_1^0, d_2^0, d_3^0$ , 从而计算矩阵  $C$  的初值  $C^0 = (c_{ij}^0)_{3 \times 3}$ , 令  $c_{ii}^0 = b_{ii}, i = 1, 2, 3$ , 则  $\text{trace} C^0 = \text{trace} B$ , 有

$$D = 1 + (d_1^0)^2 + (d_2^0)^2 + (d_3^0)^2 = \frac{4}{1 + b_{11} + b_{22} + b_{33}}, \quad (a3)$$

$$d_1^0 = \sqrt{\frac{|b_{11}D + D - 2|}{2}}, \quad d_2^0 = \sqrt{\frac{|b_{22}D + D - 2|}{2}}, \quad d_3^0 = \sqrt{\frac{|b_{33}D + D - 2|}{2}}. \quad (a4)$$

采用 Newton 迭代方法对方程组(a2)进行求解. 设  $d_1^i, d_2^i, d_3^i, i \geq 0$  已计算出, 解以下方程来计算  $d_1^{i+1}, d_2^{i+1}, d_3^{i+1}$ .

$$\begin{cases} \text{trace} \frac{\partial C_1}{\partial d_1} B^i (d_1^{i+1} - d_1^i) + \text{trace} \frac{\partial C_1}{\partial d_2} B^i (d_2^{i+1} - d_2^i) + \text{trace} \frac{\partial C_1}{\partial d_3} B^i (d_3^{i+1} - d_3^i) + \text{trace} C_1 B^i - 0 \\ \text{trace} \frac{\partial C_2}{\partial d_1} B^i (d_1^{i+1} - d_1^i) + \text{trace} \frac{\partial C_2}{\partial d_2} B^i (d_2^{i+1} - d_2^i) + \text{trace} \frac{\partial C_2}{\partial d_3} B^i (d_3^{i+1} - d_3^i) + \text{trace} C_2 B^i = 0. \\ \text{trace} \frac{\partial C_3}{\partial d_1} B^i (d_1^{i+1} - d_1^i) + \text{trace} \frac{\partial C_3}{\partial d_2} B^i (d_2^{i+1} - d_2^i) + \text{trace} \frac{\partial C_3}{\partial d_3} B^i (d_3^{i+1} - d_3^i) + \text{trace} C_3 B^i = 0 \end{cases} \quad (a5)$$

$C_1, C_2, C_3$  的相关偏导数计算公式如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial d_1} = d \begin{bmatrix} C - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial C_1}{\partial d_2} = 2d_1 D_2 - 2d_2 D_1 - d \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial C_1}{\partial d_3} = 2d_1 D_3 - 2d_3 D_1 - d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (a6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial C_2}{\partial d_1} = 2d_2 D_1 - 2d_1 D_2 - d \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial C_2}{\partial d_2} = d \begin{bmatrix} C - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial C_2}{\partial d_3} = 2d_2 D_3 - 2d_3 D_2 - d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (a7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial C_3}{\partial d_1} = 2d_3 D_1 - 2d_1 D_3 - d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial C_3}{\partial d_2} = 2d_3 D_2 - 2d_2 D_3 - d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial C_3}{\partial d_3} = d \begin{bmatrix} C - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (a8)$$

由于 Newton 迭代方法具有 2 阶的收敛速度, 对于较好的初值, 迭代次数的推荐值为 2 或 3. 对于其他情形, 可采用类似方法推导出相应的公式. 可通过分析迭代矩阵来估计优化过程中所产生的误差. 该分析过程繁琐, 得到的估计公式比较复杂. 由于篇幅所限, 本文不再详述.

### A New Method to Interpolate and Approximate Moving Frames of Moving Object

JIANG Zhong-ding<sup>1</sup> MA Li-zhuang<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>(State Key Laboratory of CAD & CG Zhejiang University Hangzhou 310027)

<sup>2</sup>(Centre for Advanced Media Technology Nanyang Technological University Singapore)

**Abstract** The interpolation of some given moving frames (origin position—orientations of three coordinate axes) of a moving object is an important problem in the fields of computer graphics, robotics, etc. In this paper, a new method is presented to interpolate and approximate the moving frames of moving object by employing B-splines. By parameterizing the rotation transformation part of the orthogonal moving frame with four Euler parameters, a simplified optimization function is derived. An iteration method is presented to solve the optimization function for approximating the rotation transformation part of the pseudo moving frame at any position of the motion trajectory. The error caused by interpolation and approximation is proven to be controllable. Since the computation of moving frame is only related with order 2 or 3 linear equations, the proposed approach can be implemented with high efficiency.

**Key words** Motion design, interpolation, approximation, moving frame, B-spline.