

# NURBS 双向蒙皮造型方法的研究与实现

张乐年 周来水 周儒荣

(南京航空航天大学 CAD/CAM 工程研究中心 南京 210016)

**摘要** 本文通过对 NURBS 造型方法技术的研究,在自主开发的 SuperMan CAD/CAM 集成系统中成功地实现了基于复杂曲线的 NURBS 双向蒙皮曲面的造型功能,从而建立了完全基于 NURBS 方法的 CAD/CAM 系统.通过大量的工程应用和实例验证表明所研究的 NURBS 方法是一种适用于复杂外形产品设计与制造的、灵活有效的造型方法.

**关键词** NURBS,双向蒙皮曲面,节点插入,升阶.

**中图分类号** TP391.72

被 STEP 国际标准作为定义产品形状的唯一方法的非均匀有理 B 样条(NURBS)已被 CAD/CAM 和图形界广泛研究,并成功地应用于一些产品外形的几何描述和设计.国外一些先进的 CAD 系统已全面引入 NURBS 技术,并以此作为系统先进性的一个重要标志.就目前国内外的理论研究成果和系统应用的情况看,NURBS 曲面造型方法已较成功地应用于:(1)插值有理网格曲面;(2)插值给定一个方向上截面线的单向蒙皮曲面<sup>[1]</sup>.而 L. pigel 在文献[2]中提出的有待进一步研究和解决的 NURBS 双向蒙皮技术,目前理论成果和系统实际应用均较少,而只有从理论和实际应用上解决这类 NURBS 曲面的造型问题,才可能建立一个真正完全基于 NURBS 体系的 CAD/CAM 系统,故此类造型问题的研究极具理论和应用价值.

## 1 NURBS 曲线与曲面定义

NURBS 曲线、曲面数学定义及有关算法的详细讨论可参见有关文献,<sup>[2,3]</sup>下面仅简单回顾本文所涉及到的数学理论.

$$\text{NURBS 曲线定义为 } C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n \vec{P}_i w_i N_{i,p}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,p}(u)} \quad (1)$$

此处  $\vec{P}_i$  为三维控制顶点,  $w_i$  为控制顶点权因子,  $N_{i,p}(u)$  为定义在节点矢量

$$T = [t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_{n+p+1}]$$

上的  $p$  次规范 B 样条基函数.在本文中,均假设节点矢量有如下形式:

\* 本文研究得到国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助.作者张乐年,1962年生,副教授,主要研究领域为 NURBS 造型方法.周来水,1963年生,副教授,主要研究领域为 CAD 系统.周儒荣,1934年生,教授,博士导师,主要研究领域为 CAD/CAM 集成系统.

本文通讯联系人:张乐年,南京 210016 南京航空航天大学 CAD/CAM 工程研究中心

本文 1996-07-18 收到修改稿

$$T = \underbrace{[0, 0, \dots, 0, 0]}_{p+1 \text{ 重}}, t_{p+1}, \dots, t_i, \dots, t_n, \underbrace{[1, 0, \dots, 1, 0]}_{p+1 \text{ 重}} \quad (2)$$

这样可使得曲线端点具有 Bezier 曲线的端点性质.

NURBS 曲面定义如下:

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \vec{P}_{i,j} w_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)} \quad (3)$$

此处  $\vec{P}_{i,j}$  为三维控制网点,  $w_{i,j}$  为控制顶点的权因子,  $N_{i,p}(u)$  和  $N_{j,q}(v)$  为定义在  $u$  向和  $v$  向上的  $p$  次和  $q$  次规范 B 样条基函数, 其节点矢量  $U$  和  $V$  与  $T$  形式相同, 这样可使得曲面角点具有 Bezier 曲面的角点性质.

## 1 节点插入和升阶

通过在所定义的节点矢量中插入附加节点, 或使 B 样条基函数的阶数升阶, 都可以增加 B 样条曲线曲面的柔性. 对于节点插入, 有 2 种基本方法: ①由 Cohen 等提出的 Oslo 算法, 同时将多个节点值插入到定义的节点矢量中; ② Boehm 算法, 顺序将单个节点值插入到定义的节点矢量中.<sup>[4-5]</sup> 对于 B 样条曲线曲面的升阶, Cohen 等和 Prautzsch 都提供了理论和算法<sup>[6]</sup>. 这些 B 样条的算法可以容易地推广到 NURBS, 只要应用齐次坐标的概念, 将三

维中的 NURBS 曲线方程(1)等阶表示为  $C^w(u) = \sum_{i=0}^n \vec{P}_{i,p}^w N_{i,p}(u)$  (4)

其中  $\vec{P}_{i,p}^w = [w_i \vec{P}_i, w_i]$  为  $\vec{P}_i$  的四维齐次坐标, 这样可得四维空间的 B 样条曲线  $C^w(u)$ , 对  $C^w(u)$  进行各种操作后, 将其向超平面  $w=1$  上投影, 即可得到对  $C(u)$  作同样操作后的曲线.

同样, 应用齐次坐标的概念, 可将 NURBS 曲面(3)等价表示为

$$S^w(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \vec{P}_{i,j}^w N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)} \quad (5)$$

其中  $\vec{P}_{i,j}^w = [w_{i,j} \vec{P}_{i,j}, w_{i,j}]$  为  $\vec{P}_{i,j}$  的四维齐次坐标, 这样可得四维空间的 B 样条曲面  $S^w(u, v)$ , 对其进行各种操作后, 再向超平面  $w=1$  上投影, 即可得到对  $S(u, v)$  作同样操作后的曲面. 在 NURBS 双向蒙皮造型问题中, 节点插入和升阶都是有力的工具.

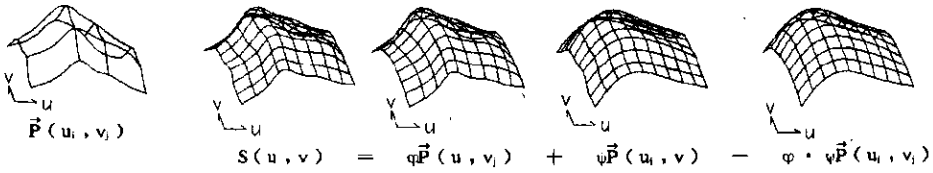
## 2 双向蒙皮曲面的 NURBS 表示

双向蒙皮曲面为由定义在曲面两个参数方向上的两族相交曲线同时蒙皮产生, 属于超限插值问题, 多采用孔斯-戈登曲面, 或者更一般地采用布尔和算子方式. 而 NURBS 曲面属于张量积曲面形式, 一般认为不能进行双向蒙皮, 所以孔斯-戈登曲面的 NURBS 表示一直是 NURBS 造型方法中的一个有待解决的问题.

孔斯-戈登曲面的关键思想是布尔和方式, 即一双变量插值可通过单变量插值的适当叠加起来构造<sup>[7]</sup>, 曲面插值的布尔和公式为

$$\vec{S}(u, v) = (\varphi \oplus \psi) \vec{P}(u, v) = \varphi \vec{P}(u, v) + \psi \vec{P}(u, v) - \varphi \cdot \psi \vec{P}(u, v) \quad (6)$$

此处  $\vec{P}(u, v)$  为两个方向的相交网格曲线,  $\varphi$  和  $\psi$  为插值算子,  $\vec{S}(u, v)$  为孔斯-戈登形式曲面, 而  $\varphi \vec{P}(u, v)$  插值一族  $u$  向参数曲线,  $\psi \vec{P}(u, v)$  插值另一族  $v$  向参数曲线,  $\varphi \cdot \psi \vec{P}(u, v)$  插值由  $\varphi \vec{P}(u, v)$  和  $\psi \vec{P}(u, v)$  插值的重复点, 最终使得曲面  $\vec{S}(u, v)$  双向插值给定的参数曲线. 图 1(a) 为  $u$  向和  $v$  向网格曲线, 图 1(b) 表示了插值该网格曲线的布尔和方法.



(a)  $u$  向和  $v$  向网格曲线

(b) 孔斯-戈登曲面的布尔和插值

图 1

利用布尔和思想,运用 NURBS 的一些相关算法,特别是齐次坐标下的节点插入与升阶算法和文献[1]中介绍的蒙皮曲面算法,即可获得双向蒙皮曲面的 NURBS 表示形式.下面具体介绍其实现步骤.设孔斯-戈登曲面的  $m$  条  $u$  向和  $n$  条  $v$  向网格曲线为 NURBS 曲线,如图 2 所示,其中  $u$  向  $m$  条曲线的最高次数为  $p$ ,  $v$  向  $n$  条曲线的最高次数为  $q$ ,由单向蒙皮曲面插值和有理网格曲面的插值方法,我们可以构造 3 个相应 NURBS 曲面  $S_1^w, S_2^w$  和  $S_3^w$ . 其中

$$S_1^w = \sum_{i=0}^{nu} \sum_{j=0}^{m+q-2} N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)\vec{P}1_{i,j}^w \quad (7)$$

为  $u$  向截线按单向蒙皮方法产生的 NURBS 蒙皮曲面<sup>[1]</sup>,其节点矢量为  $T_{1u}[\ ]$ ,  $T_{1v}[\ ]$ ,在  $v$  向反求曲面顶点时取次数为  $q$ ,  $nu+1$  为曲面  $u$  向顶点个数;

$$S_2^w = \sum_{i=0}^{n+p-2} \sum_{j=0}^{mv} N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)\vec{P}2_{i,j}^w \quad (8)$$

为  $v$  向截线按单向蒙皮方法产生的 NURBS 蒙皮曲面,其节点矢量为  $T_{2u}[\ ]$ ,  $T_{2v}[\ ]$ ,在  $u$  向反求曲面顶点时取次数为  $p$ ,  $mv+1$  为曲面  $v$  向顶点个数;

$$S_3^w = \sum_{i=0}^{n+p-2} \sum_{j=0}^{m+q-2} N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)\vec{P}3_{i,j}^w \quad (9)$$

为插值  $u, v$  截线交点的张量积曲面.其节点矢量为  $T_{2u}[\ ]$ ,  $T_{1v}[\ ]$ ,反求曲面顶点时  $u$  向次数为  $p$ ,  $v$  向次数为  $q$ ,权因子  $w_{i,j}=1$ .



图 2 用于生成孔斯-戈登曲面的一组曲线及其特征多边形

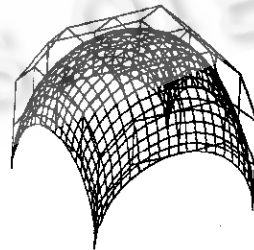


图 3 孔斯-戈登形式的 NURBS 曲面及其特征网格

这 3 张曲面的  $u$  向和  $v$  向具有相同的次数  $p$  和  $q$ ,但节点矢量却不相同.为使其具有相同的节点矢量,取曲面 1 与曲面 2 的节点矢量作并集,

$$T_u[\ ] = T_{1u}[\ ] \cup T_{2u}[\ ] \quad T_v[\ ] = T_{1v}[\ ] \cup T_{2v}[\ ]$$

分别对 3 张曲面的  $u$  向和  $v$  向进行节点插入,插入节点后的 3 张 NURBS 曲面表达式为

$$\left. \begin{aligned} S_1^w &= \sum_{i=0}^{n'} \sum_{j=0}^{m'} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P1'_{i,j} \\ S_2^w &= \sum_{i=0}^{n'} \sum_{j=0}^{m'} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P2'_{i,j} \\ S_3^w &= \sum_{i=0}^{n'} \sum_{j=0}^{m'} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P3'_{i,j} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

此时, 3 张 NURBS 曲面的  $u$  向和  $v$  向具有相同的次数  $p$  和  $q$ , 定义在相同的节点矢量  $T_u[ ]$  和  $T_v[ ]$  上,  $n'+1$  和  $m'+1$  为曲面  $u$  向和  $v$  向顶点个数。

根据式(10), 沿用孔斯的思想, 我们可以用布尔和方式, 构造相应的孔斯曲面如下:

$$S^w = S_1^w + S_2^w - S_3^w$$

将其用 NURBS 曲面表述可得  $S^w = \sum_{i=0}^{n'} \sum_{j=0}^{m'} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \bar{P}_{i,j}^w$

其中  $\bar{P}_{i,j}^w = \bar{P}1'_{i,j} + \bar{P}2'_{i,j} - \bar{P}3'_{i,j}$

对于  $i=0, 1, \dots, n'$  和  $j=0, 1, \dots, m'$ ,  $\bar{P}_{i,j}^w$  的四维坐标可计算如下:

$$\begin{bmatrix} wP \\ w \end{bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} w_1 P1' + w_2 P2' - w_3 P3' \\ w_1 + w_2 - w_3 \end{bmatrix}_{i,j} \quad (11)$$

上式为 B 样条形式简单的四维推广, 最后生成的 NURBS 双向蒙皮曲面插值给出的  $u$  向与  $v$  向网格曲线。然而, 简单的四维推广可能会引起下面问题:

由于式(11)的齐次坐标计算中,  $w$  的计算有减法运算, 故不能保证最终的 NURBS 曲面的所有权因子均大于 0, 这将导致曲面失去强的凸包特性。

为解决这个问题, 文献[8]推荐可按下式计算孔斯曲面的 NURBS 逼近的四维坐标: 对  $i=0 \dots n', j=0 \dots m'$ , 控制顶点  $\bar{P}_{i,j}^w$  的四维坐标为

$$\begin{bmatrix} wP \\ w \end{bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} w_1 w_2 (P1' + P2' - P3') \\ w_1 w_2 \end{bmatrix}_{i,j} \quad (12)$$

用了这种方法, 虽可保证 NURBS 的孔斯-戈登曲面具有强的凸包性, 但此法似缺乏理论依据, 产生的 NURBS 曲面不再精确插值原给出的网格曲线。

为解决这个问题, 本文作者采用了如下方法: 在将圆弧和椭圆进行 NURBS 表示时, 根据 Pigel 与 Tiller 为保证 NURBS 曲线具有良好的品质所提出的要求<sup>[9]</sup>, 在圆弧和椭圆圆心角大于  $90^\circ$  时将其自动分段, 使其圆心角小于等于  $90^\circ$ , 再分别对其进行 NURBS 表示。这样, 式(11)中

$$[w]_{i,j} = [w_1 + w_2 - w_3]_{i,j} > 0.$$

另一种方法, 可以用式(7)中曲面  $S_1^w$  及式(8)中曲面  $S_2^w$  的所有权因子  $w_{1i,j}$  和  $w_{2i,j}$  中的最小值作为曲面  $S_3^w$  的权因子。即取  $w_{3i,j} = \min[w_{1i,j}, w_{2i,j}]$

由于  $w_{3i,j}$  为常数, 由式(3)可知, 此时  $S_3^w$  与  $w_{3i,j} = 1$  的式(9)等价, 这样式(11)中

$$[w]_{i,j} = [w_1 + w_2 - w_3]_{i,j} > 0.$$

上述 2 种方法均可既保证所产生的 NURBS 曲面有强的凸包性, 又可使所产生的 NURBS 曲面精确插值原网格曲线。由于采用第 1 种方法时, 曲线参数化特性较好, 故作者在系统实现中采用了这种方法。图 3 为插值图 2 所示网格曲线的孔斯-戈登曲面形式的 NURBS 曲面。

### 4 结 论

本文对 NURBS 造型方法中的关键难点问题进行了理论研究,并成功地在超人(SuperMan)CAD/CAM 集成系统中实现.通过对 NURBS 双向蒙皮曲面的研究,在理论上探索了对此类超限插值问题的 NURBS 表示,拓宽了 NURBS 造型方法的覆盖域,其研究结果及在系统中的实现可使得系统仅需与单一的 NURBS 方法打交道,数据结构及后续几何处理更为简单快捷,并有利于与图形显示和数据交换的国际标准接轨.图 4 和图 5 所示的工程应用实例表明,其结果是令人满意的.

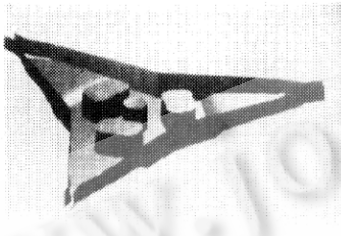


图 4 某型直升机桨毂几何模型

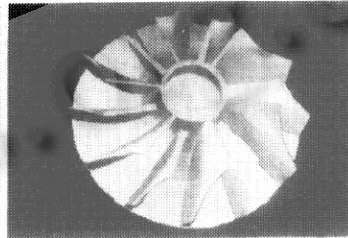


图 5 汽轮机整体叶轮

### 参 考 文 献

- 1 Zhang Lenian *et al.* Research on NURBS skinning surface via complex curves. Chinese Journal of Aeronautics, 1996, **9**(2): 104~110.
- 2 Piegl L. On NURBS: a survey. IEEE CG&A, 1991, **1**:55~57.
- 3 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条. 北京:北京航空航天大学出版社,1994.
- 4 Boehm W. Inserting new knots into B-spline curves. CAD, 1980, **12**(4):199~201.
- 5 Boehm W, Prautzsch H. The insertion algorithm. CAD, 1985, **17**(2):58~59.
- 6 Cohen E, Lyche T, Schumaker L L. Algorithms for degree raising of spline. ACM Tran. on Graphics, 1985, **4**(3): 171~181.
- 7 唐荣锡等. 计算机辅助飞机制造. 北京:航空工业出版社,1993.
- 8 Lin Fenqiang, Hewitt WT. Expressing coons-gordon surfaces as NURBS. CAD, 1994, **26**(2):145~155.
- 9 Piegl L, Tiller W. A menagerie of rational B-spline circles. IEEE CG&A, 1989, **9**:48~56.

## RESEARCH AND REALIZE ON NURBS METHOD OF BI-DIRECTION SKINNING SURFACE MODELING

ZHANG Lenian ZHOU Laishui ZHOU Rurong

(Institute Center of CAD/CAM Engineering Nanjing University of Aeronautics and Astronautics Nanjing 210016)

**Abstract** By researching on NURBS modelling method, the authors have successfully realized a new modeling function in NURBS bi-skinning surface via complex curves on SuperMan CAD/CAM integrated system, and a CAD/CAM system which is full based on NURBS method is set up. It is proved by the various examples coming from engineering application that the new NURBS method is a flexible and effective method, which is suitable for production designing and manufaction with complex external forms.

**Key words** NURBS, bi-skinning surface, inserting knot, degree elevation.

**Class number** TP391.72