拟双线性方程(组)的展开算法及其求解*

孙永强　袁华强

(上海交通大学计算机科学与工程系，上海 200030)

摘要　本文举例说明了拟双线性方程展开算法中利用常数项逐次生成新的常数项，直至新的常数项不再增加为止的这一迭代过程有可能不终止，并提出了改进办法，将拟双线性方程的等价变换定理推广至拟双线性方程组，根据拟双线性方程组等价变换定理以及改进的拟双线性方程展开算法设计了拟双线性方程组的展开算法.

关键词　函数程序设计，程序代数，拟双线性方程组，展开算法.

利用程序代数[1]论证递归程序的关键在于必须给出函数方程 $f=Ef$ 的(无穷条件)展开式解：$f=p_1\rightarrow q_1;\cdots;p_n\rightarrow q_n;\cdots$，这是一个非常困难的课题. 近年来，在这方面取得的成果主要有：孙永强，黄仁龄在文献[2]中提出了用展开算法对非线性方程进行求解，使得一类范围相当广泛的非线性方程都可以用此展开算法来求解，Harrison 在文献[3]中对一类退化的 m－线性方程进行了线性化，使这类非线性方程能转化为线性方程求解，在文献[4]中对一类 BL－1的非线性方程进行了展开，Banerjee 在文献[5]中对一类形如 $f=p\rightarrow q;g\circ f^2\circ h$ 的非线性方程提出了一种求解技术.

文献[2]定义了一类范围很大的非线性泛函型——拟双线性型，并定义了相应的拟双线性方程和证明了一些方程等价变换定理，根据这些定理，设计了一个逐项无穷展开拟双线性方程的算法，最后证明了相应的基础定理，保证由此算法所得到的展开式即为方程的解. 拟双线性方程包含了到目前为止已研究过的各种非线性方程，对它的求解具有广泛的意义. 本文将用一实例说明文献[2]中拟双线性方程展开算法利用常数项逐次生成新的常数项，直至新的常数项不再增加为止的这一迭代过程有可能不终止，并且文献[2]中关于此展开算法的正确性证明是在隐含要求此过程终止的条件下才证明其正确性的，针对这一缺陷，本文提出了改进办法.

本文将拟双线性方程的等价变换定理推广至拟双线性方程组，根据这些推广的结果，设计了一个逐项无穷展开拟双线性方程组的算法，该算法避免了文献[2]中拟双线性方程展开算法的缺陷. 拟双线性方程组的应用范围比拟双线性方程更为广泛，求解也更为复杂，但两者的展开算法的基本思想是一致的.

---

* 本文1993－10－21收到，1994－09－06定稿

作者孙永强，1931年生，教授，主要研究领域为计算机软件，计算理论. 袁华强，1966年生，博士生，主要研究领域为新型语言及其支撑环境.

本文通讯联人：孙永强，上海200030，上海交通大学计算机科学与工程系

1 拟双线性方程展开算法的缺陷及其改进办法

求解拟双线性方程的基本思想是应用文献[2]中两个方程等价变换定理，先尽量由方程的一次项生成新的常数项，再由方程的二次项生成新的一次项，循环往复此过程，若此过程终止，则常数项集即为方程的有穷解，否则为方程的无穷解. 文献[2]中展开算法判断方程是否有无穷解采用了设置标志 Z 的办法，当二次项已穷尽了所有的常数项，此时已无新的一次项产生，故停机，$Z=1$，常数项集即为方程的有穷解. 对无穷解的情形，文献[2]设置了一个充分大的正整数 $\max_2$ 和计数器 M_2，二次项每生成一个一次项，计数器 M_2 加 1，当 $M_2>\max_2$时，此算法就认为方程有无穷解，置标志 $Z=0$，且停机.

所以，该算法的终止性只考虑了二次项利用常数项来生成新的一次项的情形，没有考虑一次项利用常数项来生成新的常数项，直至新的常数项不再增加为止这一迭代过程是否终止，事实上，这一过程有可能不终止. 在文献[2]中，这一迭代过程是用以下循环来完成的：

④若 $P_{P_W}\leqslant L_{C_1}$，则转⑥.

⑥应用拟双线性方程等价变换定理，由 P'_W 和 P'_{P_W}生成新的常数项，$C:=C\cup\{$新生成的常数项$\}$，$L_{C_1}:=L_{C_1+1}$，$P_{P_W}:=P_{P_W+1}$，删除冗余常数项和一次项，调整相应指针及 L_{C_1}，L_{C_2} 和 L_W，转④.（注：④和⑥为文献[2]中展开算法的第 4 步和第 6 步，P_W，P'_W，P_{P_W}，P'_{P_W}，L_{C_1}，L_{C_2}，L_W 的意义见文献[2]）.

容易看出，在④时有 $P_{P_W}\leqslant L_{C_1}$成立，到⑥时，P_{P_W}，L_{C_1}同时加 1，若无冗余常数项和一次项删除，则至下一轮循环时，$P_{P_W}\leqslant L_{C_1}$成立，若全过程无冗余常数项和一次项删除，则此过程必不终止.

下面我们来看一个例子，给定拟双线性方程

$$f=eq0\rightarrow id;>0\rightarrow f\circ s1;f\circ f\circ a1\quad \text{其中 } eqn=eq\circ[sn,\bar{0}]$$

由文献[2]的展开算法，得：

$C:=\{eq0\rightarrow id\}$，$W:=\{>0\rightarrow f\circ s1\}$，$T:=f\circ f\circ a1$，$L_{C_1},L_{C_2}:=1$，$L_W:=1$，$P_1:=1$，$P_W:=1$，$M_1,M_2:=0$，$Z:=1$.

则第 1 个循环为：

④因为 $P_{P_W}=P_1=1$，所以 $P_{P_W}\leqslant L_{C_1}$，则转⑥.

⑥因为 $P'_W=>0\rightarrow f\circ s1$，$P'_{P_W}=eq0\rightarrow id$，所以 新的常数项为 $eq1\rightarrow s1$，$C:=\{eq0\rightarrow id,eq1\rightarrow s1\}$，所以 $P_{P_W}:=2$，$L_{C_1}:=2$，无冗余常数项和一次项产生，转④.

设第 n 个循环结束时，$P_{P_W}=n+1$，$L_{C_1}=n+1$，$C=\{eq0\rightarrow id,eq1\rightarrow s1,\cdots,eqn\rightarrow sn\}$，那么第 $n+1$ 个循环为：

④$P_{P_W}=n+1\leqslant L_{C_1}=n+1$，转⑥.

⑥因为 $P'_{P_W}=eqn\rightarrow sn$，$P'_W=>0\rightarrow f\circ s1$，所以新生成的常数项为 $eq(n+1)\rightarrow s(n+1)$，则 $C=\{eq0\rightarrow id,eq1\rightarrow s1,\cdots,eq(n+1)\rightarrow s(n+1)\}$，此时无冗余常数项和一次项删除. 所以 $P_{P_W}=n+2$，$L_{C_1}=n+2$，转④.

可见，对任一轮循环 $P_{P_W}\leqslant L_{C_1}$均成立，这一迭代过程不可能终止. 所以，文献[2]关于展开算法的正确性证明隐含了要求此迭代过程终止.

设置一个充分大的正整数 $\max_3$ 和一个计数器 M_3，在每个一次项开始此迭代过程前置 $M_3:=0$，然后每生成一个非冗余的常数项，置 $M_3:=M_3+1$，当 M_3 大于 $\max_3$ 时，退出此次迭代，转入下一个一次项.

定理 1.1. 设改进后的算法输出的常数项集 $C=\{p_1\to q_1,\cdots,p_k\to q_k\}$，如果输出变量 $Z=0$，且 $\max_2,\max_3$ 为充分大的正整数，则 $f=p_1\to q_1;\cdots;p_k\to q_k;\cdots$ 为拟双线性方程的无穷解；若输出变量 $Z=1$，则 $f=p_1\to q_1;\cdots;p_k\to q_k;\perp$ 为拟双线性方程的有穷解.

由于文献[2]的展开算法的正确性证明隐含了要求一次项生成新的常数项的迭代过程终止，而改进的算法此过程必终止，因此定理 1.1 的正确性是显然的.

2 拟双线性方程组等价变换定理

定义 2.1. 给定函数方程组(2.1)

$$f^{(1)}=p_1^{(1)}\to q_1^{(1)};\cdots;p_{N_1}^{(1)}\to q_{N_1}^{(1)};S_1^{(1)}\to H_1^{(1)}f^{(j_{11})};\cdots;S_{K_1}^{(1)}\to H_{K_1}^{(1)}f^{(j_{1K_1})};G^{(1)}f^{(L_{11})}f^{(L_{12})}$$

$$\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots$$

$$f^{(i)}=p_1^{(i)}\to q_1^{(i)};\cdots;p_{N_i}^{(i)}\to q_{N_i}^{(i)};S_1^{(i)}\to H_1^{(i)}f^{(j_{i1})};\cdots;S_{K_i}^{(i)}\to H_{K_i}^{(i)}f^{(j_{iK_i})};G^{(i)}f^{(L_{i1})}f^{(L_{i2})}$$

$$\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots$$

$$f^{(m)}=p_1^{(m)}\to q_1^{(m)};\cdots;p_{N_m}^{(m)}\to q_{N_m}^{(m)};S_1^{(m)}\to H_1^{(m)}f^{(j_{m1})};\cdots;S_{K_m}^{(m)}\to H_{K_m}^{(m)}f^{(j_{mK_m})};G^{(m)}f^{(L_{m1})}f^{(L_{m2})}$$

其中 $G^{(i)}f^{(L_{i1})}f^{(L_{i2})}$ 为拟双线性型$(1\leqslant i,L_{i1},L_{i2}\leqslant m)$，$H_r^{(i)}f^{(j_{ir})}$ 为线性型$(1\leqslant i,j_{ir}\leqslant m,1\leqslant r\leqslant K_i)$，那么方程组(2.1)称为拟双线性方程组，$p_t^{(i)}\to q_t^{(i)}(1\leqslant t\leqslant N_i)$，$S_r^{(i)}\to H_r^{(i)}f^{(j_{ir})}$，$G^{(i)}f^{(L_{i1})}f^{(L_{i2})}$ 分别称为常数项，一次项和二次项，方程组(2.1)简记为 $f=Ef$.

定义 2.2. 若拟双线性方程组(2.1)每一个方程的一次项的前项 $S_1^{(i)},\cdots,S_{K_i}^{(i)}(1\leqslant i\leqslant m)$ 两两互不相交，则称此方程组为标准型方程组.

定义 2.3. 若方程组 $f=E_1f,f=E_2f$ 为同解方程组(即有相同的最小不动点)，则称这两方程组等价. 若一函数方程组变换成与之等价的方程组，则称此变换为等价变换.

定理 2.1. 任一拟双线性方程组都可以等价变换成相应的标准型方程组.

对方程组(2.1)的每个方程 $f^{(i)}$，令 $S'^{(i)}_1=S_1^{(i)}$，$S'^{(i)}_r=(\mathop{\&}\limits_{j=1}^{r-1}\neg S_j^{(i)})\& S_r^{(i)}(1\leqslant r\leqslant K_i)$，即可证明该定理. 本文讨论的拟双线性方程组均为标准型方程组.

定义 2.4. 设 $f=Ef$ 为一函数方程组，其中 $Ef=\{E_1f,\cdots,E_mf\}$，则定义 E^if 如下：

$E^0f=f$

$E^{i+1}f=\{E_1(E^if),\cdots,E_m(E^if)\}$

定理 2.2. 给定函数方程组 $f=Ef=\{p_1^{(1)}\to q_1^{(1)};\cdots;p_{N_1}^{(1)}\to q_{N_1}^{(1)};F^{(1)}(f^{(1)},\cdots,f^{(m)}),\cdots,p_1^{(m)}\to q_1^{(m)};\cdots;p_{N_m}^{(m)}\to q_{N_m}^{(m)};F^{(m)}(f^{(1)},\cdots,f^{(m)})\}$，那么 $\lim\limits_{i\to\infty}E^i(p_1^{(1)}\to q_1^{(1)};\cdots;p_{N_1}^{(1)}\to q_{N_1}^{(1)};\perp,\cdots,p_1^{(m)}\to q_1^{(m)}\cdots;p_{N_m}^{(m)}\to q_{N_m}^{(m)};\perp)$ 为方程组的解.

由 Kleene 定理即可证明该定理成立.

引理 2.1. 给定拟双线性方程组(2.1)，对任意 $1\leqslant i\leqslant N_d(1\leqslant d\leqslant m)$，如果用函数$(p_1^{(d)}\to q_1^{(d)};\cdots;p_i^{(d)}\to q_i^{(d)};f^{(d)})$替代方程组(2.1)右边的任一 $f^{(d)}$ 的任一出现，则得到一个与方程组(2.1)等价的方程组.

证明：设用函数$(p_1^{(d)}\to q_1^{(d)}\cdots;p_i^{(d)}\to q_i^{(d)};f^{(d)})$替代方程组(2.1)$f=Ef$右边的任一$f^{(d)}$的任一出现得到函数方程组$f=E'f$，下面用数学归纳法证明：

$E^j(p_1^{(1)}\to q_1^{(1)};\cdots;p_{N_1}^{(1)}\to q_{N_1}^{(1)};\perp,\cdots,p_1^{(m)}\to q_1^{(m)}\cdots;p_{N_m}^{(m)}\to q_{N_m}^{(m)})=E'^j(p_1^{(1)}\to q_1^{(1)};\cdots;p_{N_1}^{(1)}\to q_{N_1}^{(1)};\perp,\cdots,p_1^{(m)}\to q_1^{(m)};\cdots;p_{N_m}^{(m)}\to q_{N_m}^{(m)};\perp)$

不失一般性，设$(p_1^{(d)}\to q_1^{(d)};\cdots;p_i^{(d)}\to q_i^{(d)};f^{(d)})$替代(2.1)中第$e$个方程的某一个一次项的$f^{(d)}$，令$R=\{R^{(1)},\cdots,R^{(m)}\}=\{p_1^{(1)}\to q_1^{(1)}\cdots;p_{N_1}^{(1)}\to q_{N_1}^{(1)};\perp,\cdots,p_1^{(m)}\to q_1^{(m)};\cdots;p_{N_m}^{(m)}\to q_{N_m}^{(m)};\perp\}$.

当$j=1$时，

$$
\begin{aligned}
E'R&=\{E'_1R,\cdots,E'_eR,\cdots,E'_mR\}\\
&=\{E_1R,\cdots,E'_e(R^{(1)},\cdots,R^{(d)},\cdots,R^{(m)}),\cdots,E_mR\}\\
&=\{E_1R,\cdots,p_1^{(e)}\to q_1^{(e)};\cdots;p_{N_e}^{(e)}\to q_{N_e}^{(e)};S_1^{(e)}\to H_1^{(e)}R^{(j_{e1})};\cdots;S_r^{(e)}\to H_r^{(e)}(p_1^{(d)}\to q_1^{(d)};\cdots;\\
&\quad p_i^{(d)}\to q_i^{(d)};R^{(d)});\cdots;S_{Ke}^{(e)}\to H_{Ke}^{(e)}R^{(j_{eKe})}G^{(e)}f^{(L_{e1})}f^{(L_{e2})},\cdots,E_mR\}\\
&=\{E_1R,\cdots,p_1^{(e)}\to q_1^{(e)};\cdots;p_{N_e}^{(e)}\to q_{N_e}^{(e)};S_1^{(e)}\to H_1^{(e)}R^{(j_{e1})};\cdots;S_r^{(e)}\to H_r^{(e)}R^{(d)};\cdots;S_{Ke}^{(e)}\\
&\quad\to H_{Ke}^{(e)}R^{(j_{eKe})};G^{(e)}f^{(L_{e1})}f^{(L_{e2})},\cdots,E_mR\}\\
&=\{E_1R,\cdots,E_eR,\cdots,E_mR\}\\
&=ER
\end{aligned}
$$

假设当$j=n$时命题成立，那么当$j=n+1$时

$$
\begin{aligned}
E'^{n+1}R&=E'(E'^nR)=E'(E^nR)=\{E'_1(E^nR),\cdots,E'_e(E^nR),\cdots,E'_m(E^nR)\}\\
&=\{E_1(E^nR),\cdots,p_1^{(e)}\to q_1^{(e)};\cdots;p_{N_e}^{(e)}\to q_{N_e}^{(e)};S_1^{(e)}\to H_1^{(e)}(E_{j_{e1}}^nR);\cdots;S_r^{(e)}\to H_r^{(e)}(p_1^{(d)}\\
&\quad\to q_1^{(d)};\cdots;p_1^{(d)}\to q_i^{(d)};E_d^nR);\cdots;S_{Ke}^{(e)}\to H_{Ke}^{(e)}(E_{j_{eKe}}^nR);G^{(e)}(E_{L_{e1}}^nR,E_{L_{e2}}^nR),\cdots E_m\\
&\quad(E^nR)\}\\
&=\{E_1(E^nR),\cdots,p_1^{(e)}\to q_1^{(e)};\cdots p_{N_e}^{(e)}\to q_{N_e}^{(e)};S_1^{(e)}\to H_1^{(e)}(E_{j_{e1}}^nR);\cdots;S_r^{(e)}\to H_r^{(e)}(E_d^nR);\\
&\quad\cdots S_{Ke}^{(e)}\to H_{Ke}^{(e)}(E_{j_{eKe}}^nR);G^{(e)}(E_{L_{e1}}^nR,E_{L_{e2}}^nR),\cdots,E_m(E^nR)\}\\
&=\{E_1(E^nR),\cdots,E_e(E^nR),\cdots,E_m(E^nR)\}\\
&=E^{n+1}R
\end{aligned}
$$

因此，上述等式对于任意自然数成立.

用$(p_1^{(d)}\to q_1^{(d)};\cdots;p_i^{(d)}\to q_i^{(d)};f^{(d)})$替代方程组(2.1)中右边的二次项的任一$f^{(d)}$的任一出现亦可类似证明. 由定理2.2即可证本引理成立.

定理2.3. 给定拟双线性方程组(2.1)，对任意$1\leqslant k\leqslant N_{j_{id}}$，$1\leqslant d\leqslant K_i(1\leqslant i,j_{id}\leqslant m)$，若对任意的$1\leqslant r<k$，存在$1\leqslant j_r\leqslant N_i$，使$S_d^{(i)}\&\tilde{H}_d^{(i)}p_r^{(j_{id})}\Rightarrow p_{j_r}^{(i)}$($\tilde{H}$为线性型$H$的谓词转换子)，那么(2.1)与下列方程等价：

$f^{(1)}=p_1^{(1)}\to q_1^{(1)};\cdots;p_{N_1}^{(1)}\to q_{N_1}^{(1)};S_1^{(1)}\to H_1^{(1)}f^{(j_{11})};\cdots;S_{K_1}^{(1)}\to H_{K_1}^{(1)}f^{(j_{1K_1})};G^{(1)}f^{(L_{11})}f^{(L_{12})}$

……

$f^{(i)}=p_1^{(i)}\to q_1^{(i)};\cdots;p_{N_i}^{(i)}\to q_{N_i}^{(i)};S_d^{(i)}\tilde{H}_d^{(i)}P_k^{(j_{id})}\to H_d^{(i)}q_k^{(j_{id})};S_1^{(i)}\to H_1^{(i)}f^{(j_{i1})};\cdots;S_{K_i}^{(i)}\to H_{K_i}^{(i)}f^{(j_{iK_i})};G^{(i)}f^{(L_{i1})}f^{(L_{i2})}$

……

$f^{(m)}=p_1^{(m)}\to q_1^{(m)};\cdots;p_{N_m}^{(m)}\to q_{N_m}^{(m)};S_1^{(m)}\to H_1^{(m)}f^{(j_{m1})};\cdots;S_{K_m}^{(m)}\to H_{K_m}^{(m)}f^{(j_{mK_m})};G^{(m)}f^{(L_{m1})}f^{(L_{m2})}$

定理 2.4. 给定拟双线性方程组(2.1),对任意 $1\leqslant k\leqslant N_{L_{i1}}$,若对任意的 $1\leqslant r<k$,存在 $1\leqslant j_r\leqslant N_i$ 或 $1\leqslant j_s\leqslant K_i$,使 $G_1^{(i)}p_r^{(L_{i1})}\Rightarrow p_{jr}^{(i)}$,或 $G_1^{(i)}p_r^{(L1)}\Rightarrow S_{js}^{(i)}$($G_1$ 和 G_2 为拟双线性型 G 的谓词转换子),那么(2.1)与下列方程组等价:

$f^{(1)}=p_1^{(1)}\to q_1^{(1)};\cdots;p_{N_1}^{(1)}\to q_{N_1}^{(1)};S_1^{(1)}\to H_1^{(1)}f^{(j_{11})};\cdots;S_{K_1}^{(1)}\to H_{K_1}^{(1)}f^{(j_{1K_1})};G^{(1)}f^{(L_{11})}f^{(L_{12})}$

……

$f^{(i)}=p_1^{(i)}\to q_1^{(i)};\cdots;p_{N_i}^{(i)}\to q_{N_i}^{(i)};S_1^{(i)}\to H_1^{(i)}f^{(j_{i1})};\cdots;S_{K_i}^{(i)}\to H_{K_i}^{(i)}f^{(j_{iK_i})};G_1^{(i)}p_k^{(L_{i1})}\to G^{(i)}q_k^{(L_{i1})}f^{(L_{i2})};G^{(i)}f^{(L_{i1})}f^{(L_{i2})}$

……

$f^{(m)}=p_1^{(m)}\to q_1^{(m)};\cdots;p_{N_m}^{(m)}\to q_{N_m}^{(m)};S_1^{(m)}\to H_1^{(m)}f^{(j_{m1})};\cdots;S_{K_m}^{(m)}\to H_{K_m}^{(m)}f^{(j_{mK_m})};G^{(m)}f^{(L_{m1})}f^{(L_{m2})}$

由引理 2.1,容易证明定理 2.3 和 2.4.

3 拟双线性方程组的展开算法

拟双线性方程组的展开算法的基本思想是:应用定理 2.3 和 2.4 两个方程组等价变换定理,先尽量由方程组的一次项生成新的常数项,再由方程组的二次项生成新的一次项,循环往复此过程,若方程组中每个方程此过程都能终止,则常数项集即为方程组的有穷解,否则为方程组的无穷解.以下算法避免了拟双线性方程展开算法中利用常数项逐次生成新的常数项,直至新的常数项不再增加为止这一迭代过程不终止的缺陷.

下面先说明一下算法 3.1 中所用符号的意义.

C_i 为常数项集,$L_{C_{i1}}$,$L_{C_{i2}}$ 为常数项集 C_i 的势,W_i 为一次项集,L_{W_i} 为一次项集 W_i 的势,P_{i_j} 为 W_i 中第 j 个一次项指向常数项集 $C_{j_{i,j}}$ 的指针,P_{W_i} 为指向一次项集 W_i 的指针,$P_{T_{L_{i1}}}$,$P_{T_{L_{i2}}}$ 表示二次项指向常数项集 $C_{L_{i1}}$ 和 $C_{L_{i2}}$ 的指针,P' 表示指针 P 所指向的项.$\max_n(n=1,2,3)$ 分别为设置的充分大的正整数,$M_n(n=1,2,3)$ 为三个计数器,当 $M_2>\max_2$ 时,则终止自递归方程 $f^{(i)}=\cdots;S_r^{(i)}\to H_r^{(i)}f^{(i)};\cdots;G^{(i)}f^{(L_{i1})}f^{(L_{i2})}$ 利用一次项 $S_r^{(i)}\to H_r^{(i)}f^{(i)}$ 来生成新的常数项这一迭代过程,转入下一个一次项.当方程组中每个方程的二次项都已穷尽所有的常数项集来生成新的一次项时,计数器 M_3 加 1,转入下一轮展开,$M_3>\max_3$ 时,则可认为方程组有无穷解,停机.Z 为标志位,当方程组中每个方程均有有穷解时,方程组才有有穷解,此时 $Z=1$,否则方程组有无穷解,此时 $Z=0$.

算法 3.1.

输入:拟双线性方程组(2.1)

输出:常数项集 $C_1,\cdots,C_m$,变量 Z

1\. $A_1:=0,\cdots,A_m:=0$

2\. $C_i:=\{p_1^{(i)}\to q_1^{(i)},\cdots,p_{N_i}^{(i)}\to q_{N_i}^{(i)}\}$

$W_i:=\{S_1^{(i)}\to H_1^{(i)}f^{(j_{i1})},\cdots,S_{K_i}^{(i)}\to H_{K_i}^{(i)}f^{(j_{iK_i})}\}$

$T_i:=G^{(i)}f^{(L_{i1})}f^{(L_{i2})},L_{C_{i1}},L_{C_{i2}}:=N_i$

$L_{W_i}:=K_i,P_{W_i}:=1,P_{i_j}:=1$

$P_{T_{L_{i1}}}, P_{T_{L_{i2}}} := 1, M_3 := 0, Z := 1 (1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant L_{W_i})$

3. $i := 1$

4. $M_1 := 0$，若 $i \leqslant m$，则转 5，否则转 13.

5. $M_2 := 0$，若 $P_{W_i} \leqslant L_{W_i}$，转 6，否则转 9.

6. 若 $P_{P_{W_i}} \leqslant L_{C_{j_i, P_{W_i}}}$，则转 8，否则转 7.

7. $P_{W_i} := P_{W_i} + 1$，转 5.

8. 若 $j_{i,P_{W_i}} \neq i$，则应用定理 2.3，由 $P'_{W_i}(S^{(i)}_{P_{W_i}} \to H^{(i)}_{P_{W_i}} f^{(j_{i,P_{W_i}})}$ 和 $P'_{P_{W_i}}(P^{(j_{i,P_{W_i}})}_{P_{P_{W_i}}} \to q^{(j_{i,P_{W_i}})}_{P_{P_{W_i}}})$ 生成新的常数项，$C_i := C_i \cup \{$新生成的常数项$\}$，$L_{C_{i1}} := L_{C_{i1}} + 1$，$P_{P_{W_i}} := P_{P_{W_i}+1}$ 删除冗余常数项和一次项，调整相应指针及 $L_{C_{i1}}, L_{C_{i2}}, L_{W_i}$，转 6. 若 $j_{i,P_{W_i}} = i$，则应用定理 2.3，由 $P'_{W_i}(S^{(i)}_{P_{W_i}} \to H^{(i)}_{P_{W_i}} f^{(i)})$ 和 $P'_{P_{W_i}}(P^{(i)}_{P_{P_{Wi}}} \to q^{(i)}_{P_{P_{Wi}}})$ 生成新的常数项，$C_i := C_i \cup \{$新生成的常数项$\}$，$L_{C_{i1}} := L_{C_{i1}} + 1$，$P_{P_{W_i}} := P_{P_{W_i}} + 1$，删除冗余常数项和一次项，调整相应指针及 $L_{C_{i1}}, L_{C_{i2}}, L_{W_i}$，若无冗余项删除，则 $M_2 := M_2 + 1$，当 $M_2 > \max_2$ 时，则转 7，否则转 6.

9. $M_1 := M_1 + 1$，若 $L_{C_{i2}} \leqslant L_{C_{i1}}$，则转 12，否则转 10.

10. $L_{C_{i1}} := L_{C_{i2}}, P_{W_i} := 1$，若 $M_1 \leqslant \max_1$，则转 5，否则转 11.

11. $M_1 := 0$，报告打印有关信息.

12. $i := i + 1$，转 4.

13. 方程组中是否存在方程 $f^{(t)}$，使得 $P_{P_{W_t}} \leqslant L_{C_{j_t, P_{W_t}}}$？若存在，则转 3.

14. $n := 1, a := 0$.

15. T_n 是否为双线性型？若是，则转 22.

16. 若 $A_n \neq 0$，转 22.

17. $T_n = G^{(n)} f^{(L_{n1})} f^{(L_{n2})}$，若 $P_{T_{L_{n2}}} > L_{C_{L_{n2}}}$，则转 25.

18. $P'_{T_{L_{n2}}} = P^{(L_{n2})}_{P_{T_{L_{n2}}}} \to q^{(L_{n2})}_{P_{T_{L_{n2}}}}$，若 $G^{(n)}(f^{(L_{n1})}, P^{(L_{n2})}_{P_{T_{L_{n2}}}} \to q^{(L_{n2})}_{P_{T_{L_{n2}}}}; r) = G^{(n)}_2 P^{(L_{n2})}_{P_{T_{L_{n2}}}} \to G^{(n)} f^{(L_{n1})} q^{(L_{n2})}_{P_{T_{L_{n2}}}}; G^{(n)} f^{(L_{n1})} r$，则转 21.

19. 若此常数项与下一常数项可以交换，则记住原来常数项的位置，并交换之，转 18.

20. $A_n := 1$，转 2.

21. 应用定理 2.4，由 $T_n = G^{(n)} f^{(L_{n1})} f^{(L_{n2})}$，$P'_{T_{L_{n2}}} = P^{(L_{n2})}_{P_{T_{L_{n2}}}} \to q^{(L_{n2})}_{P_{T_{L_{n2}}}}$ 生成新的一次项 $G^{(n)}_2 P^{(L_{n2})}_{P_{P_{T_{L_{n2}}}}} \to G^{(n)} f^{(L_{n1})} q^{(L_{n2})}_{P_{T_{L_{n2}}}}$，$W_n := W_n \cup \{$新的一次项$\}$，$P_{T_{L_{n2}}} := P_{T_{L_{n2}}} + 1$，转 24.

22. $T_n = G^{(n)} f^{(L_{n1})} f^{(L_{n2})}$，若 $P_{T_{L_{n1}}} > L_{C_{L_{n1}}}$，则转 25.

23. 应用定理 2.4，由 T_n 和 $P'_{T_{Ln1}} = P^{(L_{n1})}_{P_{T_{L_{n1}}}} \to q^{(L_{n1})}_{P_{T_{L_{n1}}}}$ 生成新的一次项 $G^{(n)}_1 P^{(L_{n1})}_{P_{T_{L_{n1}}}} \to G^{(n)} q^{(L_{n1})}_{P_{T_{L_{n1}}}} f^{(L_{n2})}$，$W_n := W_n \cup \{$新的一次项$\}$，$P_{T_{L_{n2}}} := P_{T_{L_{n2}}} + 1$.

24. $L_{W_n} := L_{W_n} + 1$，$P_{L_{W_n}} := 1$，删除冗余常数项和一次项，调整相应指针及 $L_{C_{n1}}, L_{C_{n2}}$ 和 L_{W_n}，转 26.

25. $a := a + 1$

26. $n := n+1$

27. 若 $a=m$，转 31.

28. 若 $n \leqslant m$，则转 15.

29. $M_3 := M_3 + 1$，若 $M_3 > \max_3$，则 $Z := 0$，转 31.

30. $P_{W_1} := 1, \cdots, P_{W_m} := 1$，转 3.

31. 停机，输出常数项集 $C_1, \cdots, C_m$ 和变量 Z.

4 结束语

程序代数及其求解是函数程序设计中一个重要的课题，由于非线性函数方程(组)的求解极其困难，目前这方面的成果不是很多，大都只能在某些特定条件下才能求出其解的通项表达式. 虽然文献[2]和本文讨论的是拟双线性方程(组)的展开算法，但是通过反复迭代来逐项展开非线性函数方程(组)的基本思想对一般非线性函数方程(组)也是现实可行的，因而其应用前景十分广泛.

参考文献

1 Backus J W. Can programming be liberated from the von Neumann style? a functional style and its algebra of programs. CACM, 1978, **21**(**8**): 613—641.

2 孙永强，黄仁龄. 拟双线性方程的展开算法及其求解. 中国科学(A 辑)，1986，**1**: 75—83.

3 Harrison P G. Linearisation: an optimization for nonlinear functional programs. Sci. Comput. Programming, 1988, **10**(**3**): 281—318.

4 Harrison P G. On the expansion of non—linear functions. Acta Informatica, 1991, **28**(**6**): 559—574.

5 Banerjee D. A technique for solving a class of quadratic FP equations. Sci. Comput. Programming, 1992, **19**(**1**): 61—85.

6 袁华强. 非线性函数方程(组)的求解与展开算法[硕士论文]. 国防科技大学，1992.

EXPANSION ALGORITHM AND SOLUTIONS OF PSEUDO—BILINEAR EQUATION SYSTEMS

Sun Yongqiang Yuan Huaqiang

(*Department of Computer Science and Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)

Abstract This paper illustrates that the iterative procedure of producing new constant items in the expansion algorithm of pseudo—bilinear equations may not terminate by an example and its improved expansion algorithm is presented. The equivalent transformation theorems of pseudo — bilinear equations are extended into pseudo — bilinear equation systems. An expansion algorithm of pseudo — bilinear equation systems is designed by means of these extended equivalent transformation theorems and the improved expansion algorithm.

Key words Functional programming, algebra of programs, pseudo — bilinear equation systems, expansion algorithm.