

应用 NURBS 曲面磨光多面体*

王学福 孙家广 秦开怀

(清华大学计算机系, 北京 100084)

摘要 本文应用 NURBS 曲面磨光多面体, 产生了处处 C' 连续的过渡曲面. 多面体的磨光分为边的磨光和顶点的磨光两种情形, 边的磨光相对较容易, 而顶点的磨光则很困难. 本文所采用的应用 NURBS 曲面磨光多面体的顶点和边的方法, 不仅可以统一实现二者的磨光操作, 而且方法简单且统一, 产生了 C' 连续的过渡面. 较之以前的方法, 首先, 利用 NURBS 曲面可以精确地描述对边磨光所用的柱面(等半径或非等半径), 其次, 在对顶点的磨光中, 同以往的方法不同, 将与该顶点相邻的边的过渡曲面相互分离, 并首次引入了“补面”的概念, 使得对该点所产生的过渡曲面处处 C' 连续. 本算法首先构造用以磨光多面体顶点和边的 NURBS 曲面的边界曲线网络图产生边界曲线的控制点及其权值(NURBS 表示), 然后依据连续性准则, 产生 NURBS 曲面的控制信息.

关键词 多面体, 边界网络, 磨光(过渡), 连续性, NURBS 曲面, 重结点.

在 CAD/CAM 技术中, 多面体的磨光具有十分重要的意义, 关于多面体磨光的算法, 目前已有许多篇文章讲述, Doo and Sabin^[1], Catmull^[2]以平面片逼近磨光曲面, 但该算法不能精确地描述过渡曲面, 而且工作量很大, Chiyokura^[3,4]采用了 Gregory 曲面片描述磨光后的过渡曲面, Szilvasi^[5]采用了四边的 Ferguson 双三次曲面片描述磨光后所产生的曲面, 然而这些曲面片在邻接处(共同边界处)仅具有 C^0 连续的特性. Hartmann^[6]和 Li^[7]采用了函数样条的方法磨光多面体, 生成由隐函数表示的过渡曲面, 过渡面面的阶次随着连续性的提高而增高. Wang^[8]利用扫描面(Sweeping 曲面)磨光多面体的顶点和边, 获得了很好的效果. 但是扫描面的某些性质(诸如切矢等)十分难以计算, 而且它也不符合图形交换标准. NURBS 技术作为表示三维形体的一种手段, 具有十分良好的性质, 逐渐成为图形标准. 所以十分有必要采用 NURBS 技术来磨光多面体. 本文提出了利用 NURBS 曲面作为磨光多面体的过渡曲面的新算法, 特别对于角点的过渡中, 引入了“补面”的概念, 算法得到了处处 C' 连续的过渡曲面. 本算法已于清华大学计算机系 CAD 中心开发研制的 GEMS4.0 中实现.

本文按如下方式组织的: 第 1, 2 节介绍多面体的磨光和 NURBS 技术的基本概念, 第 3 节则利用 NURBS 曲面精确地表示了多面体边的过渡面, 在第 4 节里则给出了 NURBS 曲面片拼接时的连续性定理, 而第 5 节则利用 NURBS 曲面对多面体的顶点进行过渡, 在第 7

* 本文 1993-05-07 收到, 1993-07-27 定稿

作者王学福, 1968 年生, 博士, 主要研究领域为曲面、实体造型. 孙家广, 1946 年生, 教授, 主要研究领域为 CAD/CAM, 工程数据库, 计算机图形学. 秦开怀, 1958 年生, 副研究员, 主要研究领域为 CAD/CAM, NC 加工及曲面造型.

本文通讯联系人: 孙家广, 北京 100084, 清华大学计算机系

节里给出了实验结果和例子.

1 多面体的磨光

多面体的磨光分为对边的磨光和对顶点的磨光两种情形. 对边的磨光分为等半径过渡和变半径过渡, 图 1 所示的是对边 e 的等半径过渡, 边 e 被一等半径柱面代替. 图 2 所示的是对边 e 的变半径过渡, 边 e 被一变半径柱面所代替. 这两种过渡曲面均满足: (1) 与相邻的平面接触处 C' 连续, (2) 两端的截面线截面垂直于磨光的边, 截面线是指截面与过渡面的交线) 分别是半径为 r_1 和 r_2 的圆弧 (等半径过渡时 $r_1=r_2$), (3) 过渡曲面的任何一个截面线 (截面垂直于所磨光的边) 均是一圆弧 (半径相同或不同).

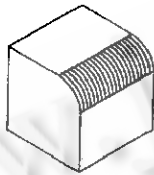


图 1 等半径过渡

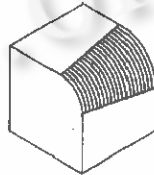


图 2 变半径过渡

但是在目前已发表的关于多面体过渡的算法中, 并没有完全满足上述要求, 大多只是满足了连续性的要求, 并没有从严格的意义上实现对边的等半径或变半径过渡. 本文的算法则完全考虑了上述要求. 从以后的讨论中可以知道, 这两种情况的过渡曲面均可以由 NURBS 曲面精确表示.

多面体顶点的磨光是和边的磨光相关联的. 对于顶点磨光所产生的过渡曲面, 不仅要和与该点相邻的平面相切, 还要和与该点相邻的各边的过渡曲面在拼接处 C' 连续. 这些条件是不容易满足的. 在一般情形下, 一个具有任意拓扑形状的多面体的顶点的所有邻边不一定正交, 而且对于边的过渡情形亦不相同, 一般的球面是不满足过渡顶点的要求的, 如对比图 3、图 4 中顶点 P 的过渡. 特别在图 4 情形, 与 P 点相邻的各边的过渡面的凹凸情形不同, 从而增加了磨光操作的难度.

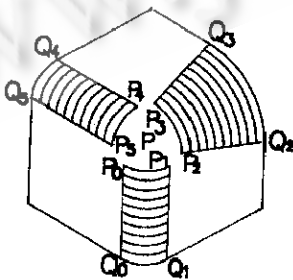


图 3

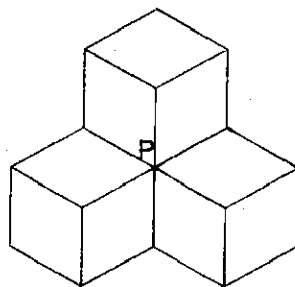


图 4

2 NURBS 技术

NURBS 技术是一种表示自由曲线、自由曲面的行之有效的方法.

• NURBS 曲线

给定控制点 P_0, P_1, \dots, P_m , 以及相应的权值 w_0, w_1, \dots, w_m 和节点矢量 $t_0, t_1, \dots, t_{m+k+1}$, 则 k 次 NURBS 曲线定义为:

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^m w_i P_i B_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^m w_i \cdot B_{i,k}(t)} \quad (t_k \leq t \leq t_{m+1})$$

若两端分别采用 $k+1$ 重结点, 即:

$$t_0 = t_1 = \dots = t_k = 0.0 \quad t_{m+1} = \dots = t_{m+k+1} = 1.0$$

则该 NURBS 曲线经过首末控制点. 此时, 关于 NURBS 曲线在两端点处的切矢我们给出了如下定理.

定理 1. 两端采用 $k+1$ 重结点的 k 次 NURBS 曲线, 端点处 (分别对应 $t=0.0$ 和 $t=1.0$) 切矢为:

$$P'(0) = \frac{w_1}{w_0} * k * \frac{(P_1 - P_0)}{t_{k+1} - t_0} \quad P'(1) = \frac{w_{m-1}}{w_m} * k * \frac{(P_m - P_{m-1})}{t_{m+k+1} - t_m}$$

证明: 令 $A(t) = \sum_{i=0}^m w_i B_{i,k}(t)$, $B(t) = \sum_{i=0}^m w_i P_i B_{i,k}(t)$

$$C(t) = \frac{B(t)}{A(t)}$$

由于 $B_{i,k}$ 对 t 求导时具有下述表示:

$$B'_{i,k}(t) = \frac{k}{t_{i+k} - t_i} * B_{i,k-1}(t) + \frac{k}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} * B_{i+1,k-1}(t)$$

所以有

$$A'(t) = \sum_{j=1}^m k(w_j - w_{j-1}) * B_{j,k-1}(t) / (t_{i+k} - t_j)$$

$$B'(t) = \sum_{j=1}^m k(w_j P_j - w_{j-1} P_{j-1}) / (t_{i+k} - t_j) * B_{j,k-1}(t)$$

由于 $P'(t) = (B'(t)A(t) - A'(t)B(t)) / A^2(t)$, 且首末端点处结点重数均为 $k+1$, 故有:

$$P'(0) = \frac{w_1}{w_0} * k * \frac{P_1 - P_0}{t_{k+1} - t_0} \quad P'(1) = \frac{w_{m-1}}{w_m} * k * \frac{P_m - P_{m-1}}{t_{m+k+1} - t_m}$$

依据定理 1, 可以判断两条 NURBS 曲线在端点处相拼接时是否达到 C' 连接.

• NURBS 曲面

给定控制点阵 $P_{ij} (i=0, 1, \dots, n, j=0, 1, \dots, m)$ 和相应的权值 w_{ij} , u, v 方向的结点矢量: $u_0, \dots, u_{m+k+1}; v_0, \dots, v_{n+l+1}$; 则 $k * l$ 次 NURBS 曲面定义为:

$$P(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} w_{ij} B_{i,k}(u) B_{j,l}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} B_{i,k}(u) B_{j,l}(v)} \quad (u_k \leq u \leq u_{m+1}, v_l \leq v \leq v_{n+1})$$

3 利用 NURBS 曲面进行多面体边的磨光

L. Piegl 已经证明:利用二次 NURBS 曲线可以精确地表示圆锥曲线. 所表示的圆弧的半径与控制点的权值有下述关系:

定理 2. 在控制三角形为等腰三角形的情形下, 首末结点矢量分别采用了重结点, 首末权值为 1.0, 而中间权值 w_1 满足 $0.0 < w_1 < 1.0$, 则利用 2 次 NURBS 曲线所表示的圆弧其半径 r 有如下等式:

$$r = 2w_1^2 * \frac{|P_2 - P_1|^3}{|(P_2 - P_1) * (P_1 - P_0)|}$$

其中 P_0, P_1, P_2 分别是该 2 次 NURBS 曲线的控制端点.

证明: 设 $P(t)$ 是定理中所述的 2 次 NURBS 曲线, 控制点为 P_0, P_1, P_2 , 相应权值为 w_0, w_1, w_2 , 结点矢量为 $(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 1.0)$, 则有:

$$P(t) = \frac{P_0 B_{0,2}(t) + w_1 P_1 B_{1,2}(t) + P_2 B_{2,2}(t)}{B_{0,2}(t) + w_1 B_{1,2}(t) + B_{2,2}(t)}$$

由于 $P(t)$ 所表示的是一圆弧, 所以它的曲率处处相等, 不失一般性, 我们计算出 $P(t)$ 于 $t=0.0$ 处的曲率, 从而得到该圆弧的半径.

由于 $P'(0) = 2w_1(p_1 - p_0) \quad P''(0) = 2(P_2 - P_0)$

故在 $t=0$ 处 $P(t)$ 的曲率 $K = \frac{|P'(0) * P''(0)|}{|P'(0)|^3}$

从而曲率半径为 $\rho = 1/K = \frac{|P'(0)|^3}{|P'(0) * P''(0)|} = 2w_1^2 \frac{|P_1 - P_0|^3}{|(P_2 - P_1) * (P_1 - P_0)|}$

依据定理 2 可以十分容易地计算出二次圆锥曲线所表示的圆弧的半径, 反之给出圆弧半径, 亦可以反算出中间权值 w_1 的大小.

关于柱面的定义(等半径或变半径), 我们有下述定理.

定理 3. 假定 P_{00}, P_{01}, P_{02} 是二次 NURBS 曲线 $C_1(t)$ 的控制点, P_{10}, P_{11}, P_{12} 是 $C_2(t)$ 的控制点, $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 均满足表示一圆弧, 即控制三角形是等腰三角形, 中点权值均小于 1.0, 如果下述条件成立:

- (i) 面 $P_{00}P_{01}P_{02}$ 与面 $P_{10}P_{11}P_{12}$ 平行且均垂直于线段 $P_{01}P_{11}$.
- (ii) 线段 $P_{01}P_{00}$ 与 $P_{11}P_{10}$ 平行, 线段 $P_{01}P_{02}$ 与 $P_{11}P_{12}$ 平行.

则有: 由 $C_1(t)$ 和 $C_2(t)$ 所构成的直纹面 S 是一柱面. 即面 S 的任何一条截面线(截面平行于 $C_1(t)$ 和 $C_2(t)$ 所在的平面)均是一圆弧(见图 5).

证明: 这个定理依据直纹面的定义及 NURBS 曲面定义可以十分容易地证明, 实际上它给出了以 NURBS 曲面构造多面体的边磨光曲面的一种方法.

依据定理 2 和定理 3 可构造边的过渡面(柱面): 指定所要磨光的边上 2 点, 作为首末截面的位置, 截面垂直于所欲过渡的边, 给定首末截面线圆弧的半径 r_1 和 r_2 (若 $r_1 = r_2$ 则为等半径过渡), 由图 6 可以求出该 NURBS 曲线的控制多边形(等腰三角形).

依据定理 2 可计算出中间点的权值 w_1 , 构造了首末截面线以后, 依据定理 3 可以得到过渡边的 NURBS 曲面, 不难证明该 NURBS 曲面在与相邻的面相接触处相切, 而且由定理 3 可知, 该 NURBS 曲面精确地描述了过渡该边的柱面(等半径或变半径).

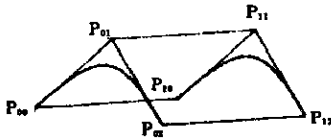


图 5

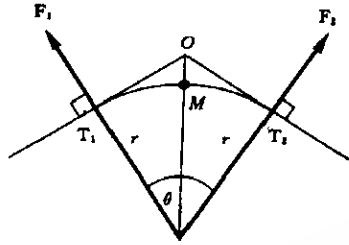


图 6

4 NURBS 曲面片的拼接及连续性分析

Gregory^[9]给出了两曲面片 C^2 拼接时的充分条件,在此我们仅取其 C' 连续的条件.

定理 4. (曲面片 P 和 q 在连接处 C' 连续). 设 Ω_p 和 Ω_q 分别是曲面片 P 和 q 的参数域. $eq: [0, 1] \rightarrow R^2$ 是 Ω_q 的一条边的参数表示, 而此边界的 3D 映像则是曲面片 p 和 q 的共同边界, 那么曲面片 p 和 q 在拼接处 C' 连续, 仅须下述条件成立:

(1)(域的连续性) 存在微分同胚 $\Phi: R^2 \rightarrow R^2$, 定义于 eq 的邻域, 并将 Ω_q 的外部点映为 Ω_p 的内部点.

(2)(面片连续性), 对于所有的 $S \in [0, 1]$, 满足

(i) (C^0 连续) $q \cdot lq(s) = p \cdot \Phi \cdot lq(s)$

(ii) (C' 连续) $\partial q|_{lq(s)} = \partial(P \cdot \Phi)|_{lq(s)}$

这个定理给出了两曲面片在公共边界处 C' 连续的充分条件, 依据此定理, 可以得到两 NURBS 曲面沿某一共同边界相拼接时 C' 连续的条件.

推论 1. 设 p 和 q 均是四边域的 NURBS 曲面, 二者沿某一边界完全拼接(不妨设为 p 面的 $u=1$ 边界线, q 面的 $u=0$ 边界线)如果在共同边界上的任意一点, 参数面 p 和 q 参数面的 u 向切矢(大小方向)相同(v 向切矢肯定相同), 则曲面片 p 和 q 在拼接处 C' 连续.

考虑 $k \times l$ 次 NURBS 曲面 $P(u, v)$, 其控制点为 P_{ij} , ($i=0, 1, \dots, m, j=0, 1, \dots, n$), u, v 节点矢量在首尾处分别是 $k+1$ 重和 $l+1$ 重, 权值为 $\{w_{ij}\}$, 权值满足:

(1) $w_{i0} = w_{im} = 1.0 \quad (i=0, 1, \dots, m)$

(2) $w_{i,j} = w_{k,j} \quad (i, k=0, 1, \dots, m) \quad (j=0, 1, \dots, n)$

在上述情形下分析边界处曲面的切矢情形. 不失一般性, 考虑边界 $u=0$ 处的 u 向切矢, 即欲求 $P_u(u, v)|_{u=0}$.

记
$$A = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} B_{i,k}(u) \cdot B_{j,l}(v) \quad B = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} P_{ij} B_{i,k}(u) \cdot B_{j,l}(v)$$

则
$$P_u(u, v) = \frac{1}{A^2} (B'_u \cdot A - A'_u \cdot B)$$

在 $u=0$ 处, 边界控制点的权值 $w_{i0} = 1 (i=0, 1, \dots, m)$, 且 u, v 节点矢量的首尾重数为 k 和 l , 故 $A=1$, 从而有:

$$P_u|_{u=0} = B'_u - A'_u \cdot B = \sum_{j=0}^n k * w_{j1} (P_{j1} - P_{j0}) * \frac{B_{j,l}(v)}{u_{k+1} - u_0}$$

同样道理
$$P_u|_{u=1} = \sum_{j=0}^n k * w_{j,n-1} (P_{j,n} - P_{j,n-1}) * \frac{B_{j,i}(v)}{u_{m+k+1} - u_m}$$

依据上述分析,可得到关于两 NURBS 曲面片拼接的连续性定理.

定理 5. 设两 NURBS 曲面片 p 和 q 沿 u 等参线(p 面的 $u=1$ 线和 q 面的 $u=0$ 线)相拼接,且两 NURBS 曲面片满足.

(1) u 结点矢量首末结点均为 $k+1$ 重,其中 k 是 p 或 q 的 v 等参线的阶次, u 等参线阶次相同.

(2) P 和 q 均满足

$$w_{i0} = w_{jn} = 1.0 \quad w_{i1} = w_{j1} \quad w_{i,n-1} = w_{j,n-1} \quad (i, j = 0, 1, \dots, m)$$

(3) 以 k_1, k_2 分别表示 p 和 q 的 v 等线的阶次,

$$K_1 / (u_{k_1+m+1} - u_m) * w_{j,n-1} * (P_{j,n} - P_{j,n-1}) = k_2 / (u'_{k_2+1} - u'_0) * w'_{j_0} * (Q_{j_1} - Q_{j_0})$$

如果上述条件成立,那么 p 和 q 将于连接处 C' 连续.

下面,我们将依据定理 5(连续性准则)构造用以磨光多面体顶点的 NURBS 曲面.

5 利用 NURBS 曲面磨光多面体的顶点

在本节里将依据定理 5 构造 C' 连续的 NURBS 曲面以磨光多面体的顶点.多面体顶点的过渡曲面的生成是和与该点相邻的多面体的边的过渡曲面的生成相关联的,构造多面体顶点的过渡曲面可分为以下几个步骤:(1)依据连续性要求构造过渡曲面的边界线(2)依据面片相拼接时连续性准则(定理 5)构造过渡曲面的 NURBS 控制信息.我们以构造图 3 中 P 点的过渡曲面为例,说明整个算法的流程.

P 点是要磨光的顶点, i, j, k 分别是与 P 点相邻的边, a, b, c 是与 P 点相邻的平面, S_1, S_2, S_3 则分别是磨光边 i, j, k 的过渡面(变半径或等半径).圆弧 $\overline{P_0P_1}, \overline{P_0P_2}$ 和 $\overline{P_4P_5}$ 分别是过渡面 S_1, S_2 和 S_3 靠近 P 点一侧的截面线,截面的概念第 3 节中已讲述,过渡面的首截面的位置应满足如下关系: $|PP_0| = \dots = |PP_5|$,这是易做到的,图 7 描述了它们之间的位置关系.

从图 7 中可以看到,点 P_1 与 P_2, P_3 与 P_4 以及 P_5 与 P_0 并不重合.但在大多数的多面体磨光算法中,这些点分别是相互重合的,这使得生成的过渡面不具有更高阶的连续性.但是假若将其分离,我们可以用 C' 连续的曲线段将它们连结起来,并生成 C' 连续的过渡面.

截面线圆弧 $\overline{P_0P_1}, \overline{P_2P_3}$ 和 $\overline{P_4P_5}$ 已在第 3 节里介绍过其作为 2 次 NURBS 曲线的控制信息的生成方法.但是还有 3 段曲线 $\overline{P_1P_2}, \overline{P_3P_4}$ 和 $\overline{P_5P_0}$ 尚须确定.如图 8 所示, P_0, P_1, P_2, P_3 的权值均为 1, M_0, M_3 的权值为 w_0 与 w_3 (w_0 与 w_3 可依据定理求出),为满足 C' 连续的特性,由定理 1 可得(实际上这 3 段曲线 $\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}$ 与 $\overline{P_2P_3}$ 并不位于一个平面内,仅为方便起见,将其画于一个平面内:

$$w_0(P_1 - M_0) = w_1(M_1 - P_1) \quad w_2(M_1 - P_2) = w_3(P_2 - M_3)$$

从而可以求出曲线 $\overline{P_1P_2}$ 的另外两上控制点 m_1, m_2 位置以及相应的权值.依据此法可以生成连结 P_0, P_1, \dots, P_5 的各 NURBS 曲线段.

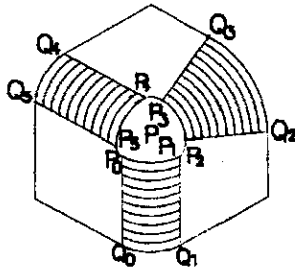


图 7

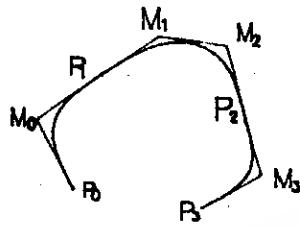


图 8

在顶点 P 处可构造一个平面 A , 该平面是过渡曲面于该点的切平面, 依据下述方法构造另外一组边界线, 经过 P_i 与 P 点 ($i=0, 1, \dots$) 可构造一条 NURBS 曲线, 满足 (1) 在 P_i 处与 $Q_i P_i C'$ 连接. (2) 在 P 该曲线的切矢位于平面 A 内. 图 9 所示的是对于图 4 中的 P 点进行磨光时所构成的边界网络线.

我们令 NURBS 曲线 $\overline{P_i P}$ 的 4 个控制点权值均为 1.0, 不失一般性设 $\overline{P_0 P}$ 的 4 个控制点为 P_0, M_0, M_1, P , 而 $\overline{P_1 P}$ 的 4 个控制点 P_1, M_2, M_3 与 P , 一般可令 M_0 与 M_2 位于同一平行于截面的平面内, 而 M_1 与 M_3 亦位于同一个这样的平面内, 其余的 4 条曲线 $\overline{P_2 P}, \overline{P_3 P}, \overline{P_4 P}$ 与 $\overline{P_5 P}$ 均可以同样方法生成.

不失一般性, 我们构造由 $\overline{P_0 P_1}, \overline{P_0 P}$ 和 $\overline{P_1 P}$ 所围成的 NURBS 面的控制信息, 然后构造由 $\overline{P_1 P}, \overline{P_2 P}$ 和 $\overline{P_1 P_2}$ 所围成的 NURBS 曲面的控制信息.

如图 10 所示, 由于 $\overline{P_0 P_1}$ 的 3 个控制点及权值均已求出, 对于 M_0 和 M_2 点, 由于二者位于同一截面内, 可定义该二点处的切矢方向分别于圆弧 $\overline{P_0 P_1}$ 于 P_0, P_1 点处的切矢方向相同, 据此可以设定 S_2 位置, 同理 S_1 的位置亦可以设定, S_1 点与 S_2 点的权值均设为 S_3 点的权值. 这样我们生成了一 2×3 次 NURBS 曲面 Ω_0 , 其 u 一节点矢量为 $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$, v 节点矢量为 $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$, 同样道理可生成由曲线 $\overline{P_2 P_3}, \overline{P_2 P}, \overline{P_3 P}$ 围成的 NURBS 面 Ω_1 , 和由 $\overline{P_4 P_5}, \overline{P_4 P}$ 和 $\overline{P_5 P}$ 围成的 NURBS 面 Ω_2 .

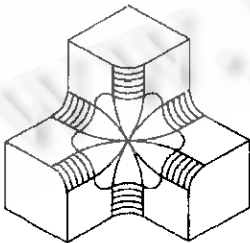


图 9

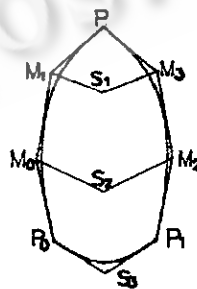


图 10

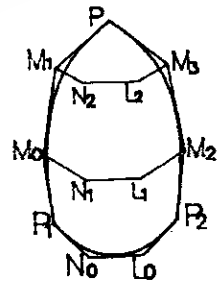


图 11

在目前发表的大多数算法中, 点 P 与 P_2, P_3 与 P_4 和 P_5 与 P_0 是相重合的, 从而由面 $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ 构成顶点 P 的过渡曲面, 这样在它们的共同边界处就很难到更高阶的连续性. 在我们的算法中引入了“补面”以获得它们之间的 C^1 过渡.

如图 11 所示, 我们将构造由曲线 $\overline{P_1 P}, \overline{P_1 P_2}, \overline{P_2 P}$ 所围成的 NURBS 曲面 (3×3 次). 如

前所述,我们已生成点 M_0, M_1, M_2, M_3 且其权值均为 1.0,同时亦生成了点 N_0 和 L_0 及其权值. 由于该曲面与曲面 Ω_0 在边接处 C' 连续,因而依据定理 5,可以确定 N_2 和 N_1 的位置,它们的权值等于 N_0 的权值. 同样道理,可依据定理 5 确定 L_2 和 L_1 点的位置(其权值等于 L_0 点的权值). 这样我们生成了这个双三次的 NURBS 曲面. 依据同样道理,可以生成由 $\overline{P_3P}$, $\overline{P_3P_4}$ 和 $\overline{P_4P}$ 以及曲线 $\overline{P_5P}$, $\overline{P_0P}$, $\overline{P_5P_0}$ 所围成的 3×3 次 NURBS 曲面的控制信息. 这 3 个曲面称为“补面”.

综上,我们构造了用以磨光多面体顶点的 NURBS 曲面的控制信息,由于在构造过程中完全遵循了连续性准则. 所以所构造的 NURBS 曲面 C' 连续. 从上述构造 NURBS 曲面的方法中可以看出:这个方法适用于任意拓扑形状的多面体顶点的过渡.

6 例 子

对于某立方体的顶点 P ,若其相邻边采用相同的等半径过渡,则可利用 $1/8$ 球面来磨光顶点 P ,如图 12 所示,L. Piegl^[10]已详细介绍了其 NURBS 控制信息的生成.

对于图 4 中的磨光例子,利用 NURBS 曲面以磨光顶点 P ,如图 13 所示. 对于具有任意拓扑形状的多面体的顶点的磨光例子,如图 14,15 和 16,17 所示.

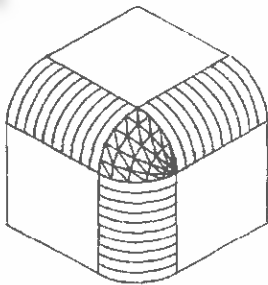


图 12

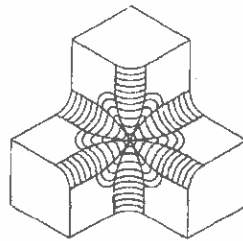


图 13

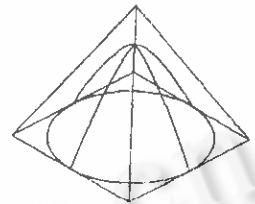


图 14

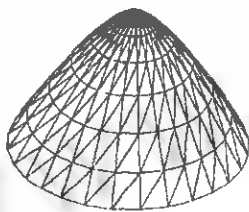


图 15

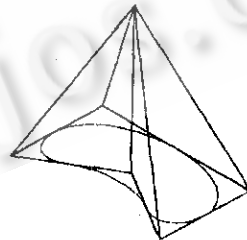


图 16

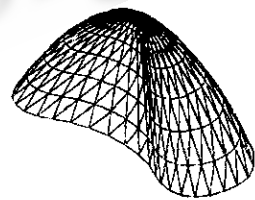


图 17

7 结 论

本文提出一种利用 NURBS 曲面描述多面体顶点和边的磨光曲面的算法,算法中引入了“补面”以产生对顶点的 C' 连续的过渡曲面,算法简单且统一,适合于任意拓扑形状的多面体的过渡.

参考文献

- 1 Doo D, Sabin M. Behavior of recursive division surfaces near extraordinary points. CAD, 1978, **10**(6):356—360.
- 2 Catmull E E, Clark J H. Recursively generated B spline surfaces on arbitrary topological meshes. CAD, 1978, **10**(6):350—355.
- 3 Chiyokura H, Kimura F. Design of solids with free form surfaces. Comput. Graph, 1983, **17**(3):289—298.
- 4 Chiyokura H. An extended rounding operation for modelling solids with free-form surfaces. IEEE CG&A, 1987, **7**(12):27—36.
- 5 Szilvasi Nagy M. Flexible rounding operation for polyhedra. CAD, 1991, **23**(9):629—633.
- 6 Hartmann E. Blending of implicit surface with functional splines. CAD, 1990, **22**(8):500—506.
- 7 Li Jinggong, Josef Hoschenk, Hartmann E. G^1 functional splines for interpolation and approximation for curves, surface and solids. CAGD, 1990, **7**(2):209—220.
- 8 Wang Xuefu, Sun Jianguang, Qin Kaihuai. Blending polyhedra with sweeping. Proc. of the 3rd International Conference on CG&CAD, Beijing, Aug. 1992.
- 9 John, Gregory A, Jorg M Hahn. Geometric continuity and convex combination patches. CAGD, 1987, **4**(1):79—90.
- 10 Piegl L, Wayne Tiller. Curve and surface constructions using rational B-splines. CAD, 1987, **19**(9):485—498.

BLENDING POLYHEDRA WITH NURBS

Wang Xuefu Sun Jianguang Qin Kaihuai

(Department of Computer Science, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract An approach of blending edges and vertices of a polyhedron with NURBS surfaces that are C^1 continuous along their common boundaries is presented in this paper. In general, the edge blending is a bit easier, but the vertex blending is more difficult. The approach presented in this paper can unify the transaction of these two cases. Compared with other method presented, first, NURBS surface can represent the edge blending surface (constant radius blending or variable radius blending) precisely; second, in blending the vertex, they depart the blending surfaces of its adjacent edges, so they don't need to meet with each other, then "supplementary surfaces" are generated to make C^1 transitions between them. They generate the blending surfaces by constructing boundary curve networks with C^1 continuity, then according to the continuity rule, generating the NURBS surfaces.

Key words Polyhedra, boundary curve networks, blending, continuity, NURBS surface, knot with multiplicity.