软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE

A* 树搜索算法代价与误差关系的研究*

金 海　　谢 卫

(华中理工大学计算机系,武汉 430074)

摘要 本文对Pearl提出的A*算法所使用的可采纳性启发式函数h的准确性和期望代价之间的精确关系的两个定理做了介绍,并提出和证明了为确保这两个定理正确性的附加条件.

关键词 树搜索,启发式函数,A*算法.

Pearl曾经对A^*算法所使用的可采纳性启发式函数h的准确性和期望代价(以扩展的结点数表示)之间的精确关系作了研究[1],其状态空间图是一个完全b元树,它以根作为开始结点,每一个单元的代价用双向弧表示,单个目标离开始结点差N个单元,为了简要地说明Pearl的观点,我们首先介绍正规函数的概念.正规函数是指在非负实数域上的非递减函数,Pearl使用的正规函数满足:

$$\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=\infty \qquad 和 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\Phi(x)}{x}=0 \tag{1}$$

对于每一个结点n,$h(n)$假设是一个随机变量,它的分布仅与它到目标结点的距离有关,不同的结点有独立的分布.下面是Pearl给出的一些定理.

定理1. 令Φ是满足(1)的一个正规函数,如果存在$\varepsilon>0$,$\alpha>1$使得对于所有的结点n,右式成立:

$$p\left[\frac{|h(n)-h^*(n)|}{\Phi(h^*(n))}\geqslant\varepsilon\right]\geqslant\frac{\alpha}{b}$$

则

$$E(Z(N))\geqslant N\ exp[e_1\Phi(N)+o(\Phi(N))]$$

定理2. 令Φ是满足(1)的一个正规函数,如果存在$\lambda>0$,$0<\beta<1$使得对于所有的结点n,右式成立:

$$p\left[\frac{|h(n)-h^*(n)|}{\Phi(h^*(n))}\geqslant\lambda\right]\leqslant\frac{\beta}{b}$$

则

$$E(Z(N))\leqslant N\ exp[e_2\Phi(N)+o(\Phi(N))]$$

这里$h^*(n)$表示从结点n到目标结点的距离,p表示概率,$Z(N)$表示采用A^*算法搜索离目标差N个结点时所扩展的结点数,$E(Z(N))$表示它的期望值,$c_i(i=1,2)$是常量,b表示每个结点所能扩展的结点数.

定理1和定理2给出了A^*算法采用的h的正规误差Φ与期望代价之间紧密而又固定的关系.例如定理1表示如果误差的下限至少是时间的$1/b$,则A^*算法的平均误差至少为

---

* 本文1992-12-11收到,1993-06-25定稿

作者**金海**,1966年生,博士生,主要研究领域为人工智能,智能机核心语言.**谢卫**,1967年生,讲师,主要研究领域为并行分布式.

本文通讯联系人:金海,武汉430074,华中理工大学计算机系

$N\ exp(e_1\Phi(N))$，定理 2 也与此同理.

本文将给出保证定理 1 和定理 2 正确性的有关 Φ 增长率的附加假设，这里给出的条件只是为了使定理 1 和定理 2 更加精确，而并不改变它们的本质内容.

1　对定理 1 和定理 2 更严格的假设

令 Φ 是一个正规函数，J 表示正整数集合，(1)是对 Φ 增长情况的一个假设，其它两个假设分别为：

对于任意的 $\varepsilon>0$，令 $D(j,\varepsilon)$ 是方程 $(2x+1)/\Phi(j+1)=\varepsilon$ 的解，这里 $j\in J$，则 $D(j,\varepsilon)=c\Phi(j)+o(\Phi(j))$，其中 $c=c(\varepsilon)$ 是一个依赖于 ε 的常量.　　(2)

存在 $B>0$，使得 $\dfrac{\Phi(2j)}{\Phi(j)}\leqslant B$，这里 $j\in J$，并且 $\Phi(j)\neq 0$　　(3)

Pearl 在证明定理 1 时假设(1)可以推出(3)，并且在证明两个定理时都假设(1)可以推出(2)，但实际上(1)既不蕴含(2)，也不蕴含(3). 因此这就必须提出一个更严格的假设来确保定理 1 和定理 2 的正确性. 事实上，存在一个正规函数 Φ 和常量 $c_1>0$，使得在定理 1 的假设下，对于无穷多的 N，有：

$$\frac{E(Z(N))}{N}\leqslant c_1\theta(\Phi(N)) \tag{4}$$

我们可以选择一个 Φ 使得 θ 是任意数的对数函数的组合；并且存在一个正规函数 Φ 和常量 $c_2>0$，使得在定理 2 的假设下，对于无穷多的 N，有：

$$\frac{E(Z(N))}{N}\geqslant exp[c_2\eta(\Phi(N))+o(\eta(\Phi(N)))] \tag{5}$$

我们也可以选择一个 Φ 使得 η 是任意数的对数函数的组合. 所有的反例其基本内容都是 Φ 在慢速增长和快速增长期间发生了变化[2].

为了保证定理 1 和定理 2 的正确性，直接的方法就是将(3)加到它们的假设里去，对于反例中 Φ 的快速突发增长受(3)所限制，即当 Φ 的值加倍时，它的相对增长受 B 的约束. 当 Φ 满足(3)时，并不再需要(2)了. 改进后的定理 1 和定理 2 如下所示，其中约束(b)和(d)分别对应于定理 1 和定理 2 的结论.

定理 3.

(i)　(a)若 Φ 满足定理 1 的假设，则存在常量 $c_1,c_2,c_3,c_4>0$，使得 $c_1exp(c_2\Phi(N))$ 和 $c_3Nexp(c_4\Phi(N/2))$ 是 $E(Z(N))$ 的下限；

(b)若 Φ 满足定理 1 的假设和(3)，则存在常量 $c_5,c_6>0$，使得 $c_5Nexp(c_6\Phi(N))$ 是 $E(Z(N))$ 的下限；

(ii)　(c)若 Φ 满足定理 2 的假设，则存在常量 $c_1,c_2>0$，使得 $c_1Nexp(c_2\Phi(2N))$ 是 $E(Z(N))$ 的上限；

(d)若 Φ 满足定理 2 的假设和(3)，则存在常量 $c_3,c_4>0$，使得 $c_3Nexp(c_4\Phi(N))$ 是 $E(Z(N))$ 的上限；

证明：令 F_n 为 $(h(n)-h^*(n))/\Phi(h^*(n))$ 的分布函数

(i)令 $B(j,\varepsilon)=(\varepsilon/2)\Phi(j)-1/2$，使得当 $k\in[1,B(j,\varepsilon)]$ 时，有：

$$(2k+1)/\Phi(j+k)\leqslant\varepsilon\ \Phi(j)/\Phi(j+k)\leqslant\varepsilon$$

因此，由定理 1 的假设和以下 3 式[1]：

$$P[f(n_{j_k})\leqslant N]\geqslant q_{j_k}\geqslant P[f(n_{j_k})\leqslant N-1]\quad g(n_{j_k})=N-j+k\quad h^*(n_{j_k})=j+k$$

我们有：$$\frac{\alpha}{b}\leqslant F_{n_{j_k}}(-\varepsilon)\leqslant F_{n_{j_k}}\left[-\frac{2k+1}{\Phi(j+k)}\right]=P[g(n_{j_k})+h(n_{j_k})\leqslant N-1]\leqslant q_{j_k}$$

因此，由式[1]：$$E(Z)=N+\frac{b-1}{b}\sum_{j=1}^{N}\sum_{d=1}^{\infty}b^d\prod_{k=1}^{d}q_{j_k}$$

我们可以得到：$$E(Z_j(N))=\frac{b-1}{b}\sum_{d=1}^{\infty}b^d\prod_{k=1}^{d}q_{j_k}\geqslant\frac{b-1}{b}\sum_{d=1}^{B(j,\varepsilon)}b^d\prod_{k=1}^{d}q_{j_k}\geqslant\frac{b-1}{b}\alpha^{B(j,\varepsilon)}$$

这是定理 3(i)的第 1 个下限，由于 $E(Z)\geqslant E(Z_N(N))$，则第 2 个下限为：

$$E(Z(N))\geqslant\sum_{j=N/2}^{N}E(Z_j(N))\geqslant\frac{b-1}{b}\sum_{j=N/2}^{N}\alpha^{B(j,\varepsilon)}\geqslant\frac{N}{2}\frac{b-1}{b}\sum_{j=N/2}^{N}\alpha^{B(N/2,\varepsilon)}$$

当 Φ 满足(3)时，第 3 个下限与第 2 个类似.

(ii)令 $L(j,\lambda)=(\lambda/2)\Phi(2j)$，使得当 $L(j,\lambda)\leqslant j$ 且 $k\in[L(j,\lambda),j]$时，有：

$$2k/\Phi(j+k)\geqslant 2L(j,\lambda)/\Phi(j+k)=\lambda\Phi(2j)/\Phi(j+k)\geqslant\lambda$$

因此，由定理 2 的假设和以下 3 式[1]：

$$P[f(n_{j_k})\leqslant N]\geqslant q_{j_k}\geqslant P[f(n_{j_k})\leqslant N-1]\quad g(n_{j_k})=N-j+k\quad h^*(n_{j_k})=j+k$$

我们有：$$\frac{\beta}{b}\geqslant F_{n_{j_k}}(-\lambda)\geqslant F_{n_{j_k}}\left[\frac{-2k}{\Phi(j+k)}\right]=P[g(n_{j_k})+h(n_{j_k})\leqslant N]\geqslant q_{j_k}$$

因此，由式[1]：$$E(Z)=N+\frac{b-1}{b}\sum_{j=1}^{N}\sum_{d=1}^{j}b^d\prod_{k=1}^{d}q_{j_k}$$

我们可以得到：$$E(Z_j(N))=\frac{b-1}{b}\sum_{d=1}^{j}b^d\prod_{k=1}^{d}q_{j_k}\leqslant\frac{b-1}{b}\left[\sum_{d<L(j,\lambda)}b^d+\sum_{d=L(j,\lambda)}^{j}\beta^d\right]$$

$$\leqslant\frac{b-1}{b}\left[\frac{b^{L(j,\lambda)}}{b-1}+\frac{\beta^{L(j,\lambda)}}{1-\beta}\right]$$

$$\leqslant b^{L(j,\lambda)}+O[\beta^{L(j,\lambda)}]\leqslant 2b^{L(j,\lambda)}$$

当 $N>j>j_1$ 时，对某些充分大的 $j_1\in J$，由于 $0<\beta<1$，则：

$$E(Z(N))=N+\sum_{j=1}^{N}E(Z_j(N))\leqslant N+c(j_1)+2\sum_{j=j_1}^{N}b^{L(j,\lambda)}\leqslant N[1+2b^{L(j,\lambda)}]+c(j_1)$$

其中 $c(j_1)$是所有偏离目标的子树 $T_1,\cdots,T_{j_1-1}$中结点数的总和，这就是定理 3(ii)的第 1 个上限，当 Φ 满足(3)时，第 2 个上限与第 1 个类似.　证毕

2　意义及说明

由于无法了解当 n 在整个状态空间上变化时下式的分布情况：

$$Y(n)=\frac{[h(n)-h^*(n)]}{\Phi(h^*(n))}\tag{6}$$

所以一个比较合理的假设就是 $Y(n)$具有相同的分布情况，在这种情况下，Φ 的解释就比较方便. 令 $m=E|Y(n)|$，则除了在正确的概率为 1 的情况以外 $m>0$，且与 n 值无关. 将 E 应用到(6)式的两端，得到：

$$m\Phi(h^*(n))=E|h(n)-h^*(n)|$$

也就是说，$m\Phi(k)$是结点 n 的 $h(n)$的期望误差值，它与目标差 k 个结点. 因此 Φ 是衡量启发式函数精确性的很好的方法，并且它还可以用 $\Phi(N)$值来紧紧地约束 A^* 算法的代价值 $E(Z(N))$. 这也就是定理 1、2、3 所希望达到的目的.

1. (3)式的意义：对定理 1 和定理 2 所作的附加假设，即 Φ 必须满足(3)式，使得定理更加精确，但又没有改变它的本质内容. 这些定理的关键是说明在简化的状态空间模型中，A^* 算法的代价是 h 误差的指数函数，而用来衡量误差的却是对数函数和亚线性多项式，即 $\Phi(x)=[\log(1+x)]^{\alpha}$(其中 $\alpha\geqslant1$)和 $\Phi(x)=x^{\alpha}$(其中 $0\leqslant\alpha\leqslant1$)，这样的 Φ 满足(3)式. 事实上，(1)和(3)两式就是这些函数的概括.

2. (3)式的说明：如果(3)式不满足，则由定理 1 和定理 2 预测的极限值 $E(Z(N))$就会与实际值有区别，其差别值是一个任意数的指数或对数函数的组合，这在(4)式和(5)式中已做了说明，因此，(3)式也称为平滑性[3,4]，亚线性函数在慢速增长的指数级长周期和快速增长的指数短周期之间是不平滑的. 下面是一个满足(1)式的一个不平滑函数的实例：定义 Φ 是 J 的一个子集上的函数，$\Phi(1)=1$，当 $j>1$ 时，$\Phi(j!)=(j-2)!$，并且 $\Phi(j!+1)=(j-1)!$，将 Φ 按照分段线性扩充到非负实数域上，令其仅在 $j!$ 和 $j!+1$ 点改变斜率，当 x 越来越大时，$\Phi(x)$的值则变成被很陡的锯齿分割开来的越来越大的一段一段，这些锯齿位于 $[j!, j!+1]$的间隙中. 而这些正规函数就会产生象(4)式和(5)式的情况发生.

要求正规函数 Φ 具有平滑性可以看作是对启发函数的均匀性限制. 启发误差的期望值 $m\Phi$ 仅仅在当一个结点在状态空间中移到相邻位置上时才发生变化. 当结点越来越接近目标时，平均启发误差并不是陡然下降，而是经过一个长时间的相对稳定. 启发函数具有平滑的平均误差时，我们就可以对 A^* 算法的代价比一般情况下(定理 3 的条件(a)和(c))作更严格的限制，这可以从定理 3 的条件(b)和(d)得到.

参考文献

1 Pearl J. Heuristic: intelligent search strategies for computer problem solving. Addison—Wesley, Reading, Mass, 1984.

2 Davis H W. Some effects of heuristic errors in admissible A* tree—searching. Tech. Rep. WSU—CS—89—01, Department of Computer Science and Engineering, Wright State Univ., Dayton, Ohio, 1989.

3 Brassard G. Crusade for a better notation. ACM SIGACT News, 1985, **17**: 60—64.

4 Brassard G, Bratley P. Algorithm: theory and practice. Prentice—Hall, N. J., 1988.

STUDY OF COST—ERROR RELATIONSHIP IN A* TREE—SEARCHING ALGORITHM

Jin Hai Xie Wei

(*Department of Computer Science, Huazhong University, Wuhan* 430074)

Abstract Two theorems of the relationships between the validity of admissible heuristic function h and the expected cost in the A* algorithm made by Pearl is introduced first. An additional assumption required for the validity of these two theorems is given and also be proved in the paper.

Key words Tree searching, heuristic function, A* algorithm.