第4卷第4期
1993年8月

软件学报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol. 4, No. 4
Aug. 1993

N_L：松弛时序逻辑自然推理系统

何 锫　　　　唐稚松

（长沙交通学院，长沙 410076）（中国科学院软件所，北京 100080）

N_L: A LOOSE NATURAL DEDUCTION SYSTEM OF TEMPORAL LOGIC

He Pei

(*Changsha Communications Institute*, *Changsha* 410076)

Tang Zhisong

(*The Institute of Software*, *Academia Sinica*, *Beijing* 100080)

Abstract Owing to the characteristic of temporal logic, some rules of classical logic can't be used directly when doing temporal natural deduction. Though the N system shows us a solution of this problem in which all rules or deductions are divided into two types —— verticality and horizontality, the two-dimensional mode also gives rise to some difficulties in deduction. This paper presents an N_L system (a loose natural deduction system of temporal logic) that provides us with a unified view of all rules and deductions. In fact, we can prove as well that N_L is equivalent to N and that for every N deduction or proof there must exist an N_L deduction shorter in length than the former.

摘要 由于时序逻辑的特性所在，经典逻辑的某些规则不能直接用于时序自然推理。虽然N系统给出了一个解决办法——把所有规则或推理分为两类：垂直型和水平型，但这种二维模式又为推理带来了某些困难。本文提出了N_L松弛时序逻辑自然推理系统，它为以上两类推理提供了统一视角。我们可以证明：N_L与N等价；有N的证明则必有长度不超过它的N_L证明。

§1. 前　言

N系统[1,2]是命题时序逻辑的自然推理系统，且有以下三个特点：①包含两种推理规则——垂直(v)型和水平(h)型；②每步推理是v型还是h型，区分要求明显（或更进一步说，什么时候（过早不行）让v型结果过渡为h型时序定理以便随后进行水平推理，已成为证明的负担）；③演算会产生大量中间结果。因此，正如v，h所表明的那样，N系统具有明显的二维性。

本文1990年12月1日收到，1991年3月18日定稿。作者**何锫**，硕士，主要研究领域为计算机科学与软件工程。**唐稚松**，研究员，学部委员，主要研究领域为定理机器证明及函数式语言。

© 中国科学院软件研究所　http://www.jos.org.cn

本文提出的 N_L 松弛时序逻辑自然推理系统是 N 系统的直接改进.该系统以统一视角看待推理——把推理的区别转化为推理所获结果的两种特性,从而克服 N 系统的前述缺陷。故此,N 与 N_L 的本质差异在于:后者以思维的一维性及结果的二维特征取代前者."松弛"("松弛二维"的简称)的含义即寓于此.

§2. N_L 形式系统

2.1 字汇

N_L 所用文字:$P_1, P_2, \cdots$, falsity, $\neg$, $\rightarrow$, o, Unless, (,)

2.2 合式公式形成规则

字汇中文字构成的串称为合式公式,当且仅当它能由下述三个步骤的有限次实施而得.

Ⅰ. falsity, $P_1, P_2, \cdots$ 是公式(也称原子公式).

Ⅱ. 如果 A 为公式,则 $\neg A$, oA 是公式.

Ⅲ. 若 A,B 为公式,则 $(A \rightarrow B)$ 及 (A Unless B) 为公式.

2.3 推理规则

在未给出推理规则前,我们先介绍几个约定:诸推理规则中的"F","W"表示公式的集合(以串表示);"A","B","C"表示公式;若 $F = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 则 OF 表示 $\{OA_1, OA_2, \cdots, OA_n\}$;$l_1, l_2$ 为 {} 或 {{}},$l_1 \cup l_2$ 表示两个集合之并.

推理规则:

(ass)　$F, A \mid\!\frac{\{\}}{\quad} A$

(con)　$\dfrac{F \mid\!\frac{l_1}{\quad} A \qquad F \mid\!\frac{l_2}{\quad} B}{F \mid\!\frac{l_1 \cup l_2}{\quad} A, B}$

(tr)　$\dfrac{F \mid\!\frac{l_1}{\quad} W \qquad W \mid\!\frac{l_2}{\quad} A}{F \mid\!\frac{l_1 \cup l_2}{\quad} A}$

(O)　$\dfrac{F \mid\!\frac{\{\}}{\quad} A}{OF \mid\!\frac{\{\}}{\quad} OA}$

$(\neg -)$　$\neg\neg A \mid\!\frac{\{\}}{\quad} A$

$(\neg +)$　$\dfrac{F, A \mid\!\frac{\{\}}{\quad} \text{falsity}}{F \mid\!\frac{\{\}}{\quad} \neg A}$

(f−)　falsity $\mid\!\frac{\{\}}{\quad} A$

(f+)　$A, \neg A \mid\!\frac{\{\}}{\quad}$ falsity

$(\rightarrow -)$　$(A \rightarrow B), A \mid\!\frac{\{\}}{\quad} B$

$(\rightarrow +)$　$\dfrac{F, A \mid\!\frac{\{\}}{\quad} B}{F \mid\!\frac{\{\}}{\quad} (A \rightarrow B)}$

$(O\neg)$　$O\neg A \mid\!\frac{\{\}}{\quad} \neg OA$

$(\neg O)$　$\neg OA \mid\!\frac{\{\}}{\quad} O\neg A$

$(O\rightarrow)$　$O(A \rightarrow B) \mid\!\frac{\{\}}{\quad} (OA \rightarrow OB)$

(uanal)　(A Unless B), $\neg B \mid\!\frac{\{\}}{\quad}$ A, O(A Unless B)

(usyn)　$\dfrac{F, \neg B \mid\!\frac{\{\}}{\quad} A, O(A \text{ Unless } B)}{F \mid\!\frac{\{\}}{\quad} (A \text{ Unless } B)}$

(O+)　$A \mid\!\frac{\{\{\}\}}{\quad} OA$

(u+)　$(A \rightarrow (\neg B \rightarrow C)), (A \rightarrow (\neg B \rightarrow OA)) \mid\!\frac{\{\{\}\}}{\quad} (A \rightarrow (C \text{ Unless } B))$

§3. 语　义

设无穷集 $K = \{\eta_0, \eta_1, \cdots\}$ 是关于命题时序逻辑语言的时序(或 Kripke)结构,其中 η_i 为映射 $\eta_i: V \rightarrow \{0,1\}$(这里 V 是原子公式集),对任何 $i \in N$,公式 F,我们可递归地定义其值如下:

© 中国科学院软件研究所　http://www.jos.org.cn

1. $\begin{cases} K_i(v)=0 & v=\text{falsity} \\ K_i(v)=\eta_i(v) & v\in(V-\{\text{falsity}\}) \end{cases}$

2. $K_i(\neg A)=1\Leftrightarrow K_i(A)=0$

3. $K_i((A\rightarrow B))=1\Leftrightarrow K_i(A)=0$ 或 $K_i(B)=1$

4. $K_i(OA)=1\Leftrightarrow K_{i+1}(A)=1$

5. $K_i(\Box A)=1\Leftrightarrow$ 对任意 $j\geqslant i$ $K_j(A)=1$

6. $K_i((A \text{ Unless } B))=1\Leftrightarrow$ 对任意 $j\geqslant i$ $K_j(A)=1$,或存在 $m\geqslant i$ 使得 $K_m(B)=1$ 并且 $K_n(B)=0$ 及 $K_n(A)=1(i\leqslant n<m)$.

(以上诸下标均就自然数而言;关于"Unless"的语义定义,[3,4]稍有不同)

定义 1:设 K 是 Kripke 结构,F 为合式公式集,A 为合式公式:

1)若对任意 $i\geqslant 0$ 使得 $K_i(A)=1$,则称 A 在 K 中有效,记为 $K\models A$. 特别地,若 A 在任何结构中均有效,则说 A 有效,此时记为 $\models A$.

2)若对任意 $B\in F$,有 $K\models B$,则说 F 在 K 中有效,记为 $K\models F$. 特别地,若 F 在任何结构中有效,则说 F 有效,记为 $\models F$.

定义 2(**语义结果**):公式 A 是公式集 F 的语义结果(记为 $F\models A$),如果对任意结构 K:$K\models F\Rightarrow K\models A$.

引理 1:设 $F\overset{\{\}}{\vdash} A$ 是 N_L 的定理,则:

a)$F\models A$.

b)对任意 Kripke 结构 K 及 $i\in N$:$K_i(F)=1\Rightarrow K_i(A)=1$.(这里 $K_i(F)=1$ 是缩写,表示 F 中任意公式 B 满足 $K_i(B)=1$.)

证明:施归纳于推理规则.

i)基始:对(ass),($\neg-$),(f$-$),(f$+$),($\rightarrow-$),($O\neg$),($\neg O$),($O\rightarrow$),引理显见成立,现就(uanal)$(A \text{ Unless } B),\neg B\overset{\{\}}{\vdash} A,O(A \text{ Unless } B)$论证如下:

证明 a):设结构 $K\models\{(A \text{ Unless } B),\neg B\}$,欲证 $K\models\{A,O(A \text{ Unless } B)\}$仅需证 $K\models A$ 便可.

因为 $K\models(A \text{ Unless } B)$,$K\models\neg B$,

又 对任意 $i\in N$:

$K_i((A \text{ Unless } B))=1\Leftrightarrow$ 对任意 $j\geqslant i$

$K_j(A)=1$,或有 $m\geqslant i$ 使得 $K_m(B)=1$

且对任何 $n(i\leqslant n<m)K_n(A)=1$,

$K_n(B)=0$.(语义定义)

(以上诸下标均为自然数)

所以 对任意 $i\in N$ 有$\forall$ $j\geqslant i$ $K_j(A)=1$.

由此易见 $K\models A$,即 a)成立.

证明 b):由题设、语义定义,结论显然.

ii)归纳:于情形(con),(tr),当 $l_1=l_2=\{\}$时,证明是平凡的. 情形(O),($\neg+$),($\rightarrow+$)及(usyn),证明相似,以下就(usyn):

$$\frac{F,\neg B\overset{\{\}}{\vdash} A,o(A \text{ Unless } B)}{F\overset{\{\}}{\vdash}(A \text{ Unless } B)}$$

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

进行论证.

证明 a):设 $K\models F$,则于任意 $i\in N$,易推无论 $K_i(B)=1$ 或 $K_i(B)=0$(此时需用归纳假设)均有:$K_i((A\ \text{Unless}\ B))=1$,即 a)成立.

证明 b):证明极易,略.

iii)结论:由归纳基始 i)及归纳步骤 ii),引理成立. 证毕.

引理 2:设 $F\mid\!\frac{\{\{\}\}}{\quad}A$ 是 N_L 的定理,则 $F\models A$.

证明:施归纳于推理规则.

i)基始:情形(O+),引理显见成立,以下仅就(u+)$(A\to(\neg B\to C)),(A\to(\neg B\to oA))\mid\!\frac{\{\{\}\}}{\quad}(A\to(C\ \text{Unless}\ B))$进行论证.

设 $K\models\{(A\to(\neg B\to C)),(A\to(\neg B\to oA))\}$,我们可从两个方面讨论,即任意 $i\in N$,如果 $K_i(A)=1$,则:

a)当 $j>i$(i,j 相等论证平凡)使得 $K_j(B)=1$ 且 $K_m(B)=0(i\leqslant m<j)$,求证 $K_m(C)=1\ (i\leqslant m<j)$.

证明:第一步证对任何 $r\in N$,若 $K_r(A)=1,K_r(B)=0$ 就有 $K_r(c)=1$.

因为

$$\left.\begin{array}{l}K_r(A)=1\\K_r(B)=0\\K\models\{(A\to(\neg B\to C)),(A\to(\neg B\to OA))\}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}K_r(A)=1\\K_r(B)=0\\K_r((A\to(\neg B\to C)))=1\end{cases}$$

所以 $K_r(c)=1$.

第二步证当 $K_i(A)=1,K_m(B)=0\ (i\leqslant m<j)$时,$K_m(A)=1(i\leqslant m<j)$.

因为　$K\models(A\to(\neg B\to OA))$

所以　$K_i(A)=1,K_m(B)=0(i\leqslant m<j)$时,下列推理链中每组成立.

$$\begin{cases}K_i(A)=1\\K_m(B)=0(i\leqslant m<j)\\K\models(A\to(\neg B\to oA))\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}K_{i+1}(A)=1\\K_m(B)=0(i+1\leqslant m<j)\\K\models(A\to(\neg B\to oA))\end{cases}$$

……

$$\begin{cases}K_{j-1}(A)=1\\K_{j-1}(B)=0\\K\models(A\to(\neg B\to oA))\end{cases}$$

所以　$K_m(A)=1\ (i\leqslant m<j)$.

综上两步:$K_m(C)=1(i\leqslant m<j)$成立.

b)当任意 $j\geqslant i$ $K_j(B)=0$ 时,求证 $K_i(\Box C)=1$.

证明:因为 $K_i(A)=1$

又　对任意 $j\geqslant i,K_m(B)=0\ (i\leqslant m<j+1)$(由 b)前提推得)

由 a)证明过程易知:$K_m(C)=1(i\leqslant m<j+1)$.

所以 $K_j(C)=1\ (j\geqslant i)$.

综合 a),b)易见 $K_i(A)=1$ 时,必有 $K_i((C\ \text{Unless}\ B))=1$. 因此无论 $K_i(A)=0$或 1,$K_i(A\to(C\ \text{Unless}\ B))$,均为 1. 引理成立.

ii)归纳:情形(con),(tr)证明相似. 以下

$$\text{就(tr)}\quad\frac{F\mid\!\frac{l_1}{\quad}W(\text{非空})\qquad W\mid\!\frac{l_2}{\quad}A}{F\mid\!\frac{l_1\cup l_2}{\quad}A}$$

进行论证.

设 $l_1=l_2=\{\{\}\}$,则由归纳假设,引理成立;若 $l_1\neq l_2$,由归纳假设及引理 1,该引理仍成立.

iii)结论:由归纳基始 i)及归纳步骤 ii),引理恒成立. 证毕.

定理 1(可靠性):设 $F\mid\!\frac{l}{\quad}A$ 为 N_L 的定理,这里 l 为$\{\}$或$\{\{\}\}$,则 $F\models A$.

证明:由引理 1 及引理 2,定理得证.

引理 3:设 $F\mid\!\frac{\quad}{v}A$ 为 N 系统的 v 型定理,则相应的 N_L 有 $F\mid\!\frac{\{\}}{\quad}A$.

© 中国科学院软件研究所　http://www.jos.org.cn

证明：施归纳于 N 的推理规则，引理得证.

引理 4：设 $F\vdash_{h}A$ 是 N 的定理，则相应的 N_L 有 $F\vdash^{l}A$. 这里 l 为{}或{{}}.

证明：施归纳于 N 的推理规则.

i)基始：于情形(N 的)(O+)，(u+)及(vh)，引理显见成立. 证(vh)需用引理 3.

ii)归纳：于 N 的(conh)，(trh)，依归纳假设及 N_L 的(con)，(tr)，引理仍成立.

综上所述，引理得证.

定理 2(**完备性**)：设 $F\models A$，则 N_L 中有 $F\vdash^{l}A$. 这里 l 为{}或{{}}.

证明：因 $F\models A$，由 N 的完备性及引理 4，定理得证.

至此我们知道：①N，N_L 等价；②N_L 的规则较 N 少三条. 那么 N_L 的证明是否因此而繁琐呢？以下定理将给出满意答复.

定义 3(**证明**)：N(N_L)的证明是有穷序列：$S_1,S_2,\cdots,S_n$. 该序列的任意项 S_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 或为 N(N_L)诸规则的基始情形或由子列 $S_1,S_2,\cdots,S_{i-1}$ 中某些项依 N(N_L)规则所推得并且 S_n 为所求证的定理.

定理 3：有 N 的证明，必有长度不超过它的 N_L 证明(证明指就同一定理的求证而言).

此定理的证明较易，略.

§4. 结　论

和 N 系统一样，N_L 是可靠且完备的命题时序逻辑自然推理系统，它也可扩充至一阶时序逻辑；N_L 的规则较 N 少，但就同一定理的最佳证明而言，它的长度始终较短；N_L 压缩 N 的概念层次，避免了 N 中推理的 v，h 区分要求，实现了思维线性化.

参考文献

1 黎仁蔚，N 系统：一个自然时序演绎系统，《科学通报》，1988 年第 6 期.

2 黎仁蔚，INCAPS：一个交互式计算机辅助定理证明系统，《计算机学报》，1989 年第 12 期.

3 Kröger，Temporal Logic of Programs，Springer—Verlag，1987.

4 Manna，Z.，Verification of Sequential Programs：Temporal Axiomatization，in Theoretical Foundation of Programming Methodology，1982.

www.jos.org.cn

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn