传播式启发式图搜索算法PRA 及PRA*

王士同

(镇江船舶学院计算机系，镇江，212003)

PROPAGATIONAL HEURISTIC GRAPH SEARCH ALGORITHMS PRA AND PRA*

Wang Shitong

(Department of Computer, Zhenjiang Shipbuilding Institute, Zhenjiang, 212003)

ABSTRACT

In this paper, two new propagational heuristic graph search algorithms PRA and PRA* are presented, based on the concept of propagation. Algorithm PRA* is admissible, and it has an advantage over algorithm RA* on run time. Based on the concept of tie-resolution, the relation theorem between RA's run time and PRA's run time is investigated.

摘　要

本文基于传播值的概念，提出了一个新的传播式启发式图搜索算法PRA 及PRA*. 算法PRA* 是可采纳的，且在运行时间上优于算法RA*. 本文还基于约束消解的概念，研究了算法RA 与PRA 之间在运行结果上的关系定理.

§1. 引言

笔者曾经研究了随机产生式系统的启发式图搜索算法RA*，并以此为基础得到了一些重要的结果[1][3][4]. 和以前的研究方法不同，本文将从节点不重新被选择来予以扩展的角度来研究算法RA*，并提出了一个新的传播式启发式图搜索算法PRA*. 算法PRA* 是可采

1990 年2 月21 日收到，1990 年6 月29 日定稿. 本课题受国家自然科学基金资助.

纳的．算法PRA* 的基本思想是在算法RA* 基础上再使用一个QUEUE 队列表，用以传播有关值，并通过QUEUE 表，算法PRA* 实现了算法决不会第二次选择已扩展过的节点，即一个节点至多被扩展一次．从运行时间角度看，在最坏情况下，算法PRA* 的效率明显高于算法RA*．基于Martelli 提出的约束消解的概念，本文还研究了算法RA 与PRA 之间的重要的关系定理．

为了叙述方便，我们仍然采用文[1] 中所使用的符号，在下文，我们首先给出算法RA 与PRA，然后研究可采纳性算法PRA* 以及算法RA 与PRA 之间在运行结果上的关系定理．

§2. 算法RA 与PRA

算法RA

(1) 初始时OPEN、CLOSED 表为空．置初始节点s 到OPEN 表中；$g_T^r(s)\leftarrow 0$, $f_T^r(s)\leftarrow 0$.

(2) 重复以下的步骤，直到OPEN 表变空(在步骤2.1) 或者已发现一目标节点(在步骤2.3)．

(2.1) 若OPEN 表为空，则失败退出．

(2.2) 从OPEN 表中除去具有最大f_T^r 值的节点n, 同时置节点n 于CLOSED 表中．

(2.3) 若节点n 是目标节点，则退出，且最佳路径已找到，其耗散值为$f_T^r(n)$．

(2.4) 扩展节点n, 生成其所有的后继节点．若节点n 没有后继节点，则转(2)．对节点n 的每个后继节点n_i, 运用T 模[1] 计算

$$e(n_i)\leftarrow T(g_T^r(n), c(n, n_i))$$

其中$c(n, n_i)$ 表示节点n 与其后继节点n_i 间的边的耗散值．

(2.5) (1) 若n 的后继节点$n_i \notin OPEN\cup CLOSED$, 则

$$g_T^r(n_i)\leftarrow e(n_i)$$
$$f_T^r(n_i)\leftarrow T(g_T^r(n_i), h_T^r(n_i))$$

置节点n_i 于OPEN 表中．

(2) 若$n_i \in OPEN$ 且若$g_T^r(n_i)<e(n_i)$, 则

$$g_T^r(n_i)\leftarrow e(n_i)$$
$$f_T^r(n_i)\leftarrow T(g_T^r(n_i), h_T^r(n_i))$$

(3) 若$n_i \in CLOSED$, 且若$g_T^r(n_i)<e(n_i)$, 则

$$g_T^r(n_i)\leftarrow e(n_i)$$
$$f_T^r(n_i)\leftarrow T(g_T^r(n_i), h_T^r(n_i))$$

从CLOSED 表中除去节点n_i, 且置n_i 于OPEN 表中．

在上面所给的算法中，若对每个节点n, 恒有$h_T^r(n)\geq h_T^{r*}(n)$, 则算法RA 此时称之为算法RA*, 且是可采纳的．注意，这里所给出的算法RA 与文[1] 中的GRAPHSEARCH 算法相比，是按照Martelli 的思想略加改动了．这样做有助于提高搜索效率．

下文我们给出传播式启发式搜索算法PRA．在算法PRA 中使用了三个表：OPEN、CLOSED、QUEUE．我们先给出具体的算法，然后做一些解释，只要对算法RA 的步骤(2.5) 做如下的变动，便得到了算法PRA:

(2.5) 置队列表QUEUE 为空表

(2.6) (1) 若节点$n_i \notin OPEN\cup CLOSED$, 则

$$g_T^r(n_i)\leftarrow e(n_i)$$
$$f_T^r(n_i)\leftarrow T(g_T^r(n_i), h_T^r(n_i))$$

置节点n_i 于OPEN 表中．

(2) 若节点$n_i \in$OPEN, 且$g_T^r(n_i)<e(n_i)$, 则

$g_T^r(n_i) \leftarrow e(n_i)$

$f_T^r(n_i) \leftarrow T(g_T^r(n_i), h_T^r(n_i))$

(3) 若节点$n_i \in$CLOSED, 且$g_T^r(n_i)<e(n_i)$, 则置n_i 于QUEUE 表, 同时从CLOSED 表中删除节点n_i.

(2.7) 重复下列步骤, 直到QUEUE 为空.

(1) 从QUEUE 表中除去具有最大e 值的结点m. 置节点m 于CLOSED 表, 且$g_T^r(m) \leftarrow e(m)$.

(2) 若节点m 没有后继节点, 则转(2.7.1); 否则

(a) 对节点m 的每个后继节点d, 若$d \in$OPEN 且$g_T^r(d)<T(g_T^r(m), c(m, d))$, 则

$g_T^r(d) \leftarrow T(g_T^r(m), c(m, d))$

$f_T^r(d) \leftarrow T(g_T^r(d), h_T^r(d))$

(b) 对节点m 的每个后继节点d, 若$d \in$CLOSED, 且$g_T^r(d)<T(g_T^r(m), c(m, d))$, 则从CLOSED 表中除去d, 且

$e(m) \leftarrow T(g_T^r(m), c(m, d))$

置节点d 于QUEUE 表中.

(c) 对节点m 的每个后继节点d, 若$d \in$QUEUE, 且$e(d)<T(g_T^r(m), c(m, d))$, 则

$e(d) \leftarrow T(g_T^r(m), c(m, d))$

类似地, 若对每个节点恒有$h_T^r(n) \geq h_T^{r*}(n)$, 则此时上述的算法PRA 就称之为算法PRA*. 现在我们说明算法PRA 与算法RA 区别在何处. 考虑一个由传播式启发式图搜索算法PRA 所扩展的节点n, 若节点n 的后继节点$n_i \in$OPEN, 则算法PRA 和RA 相同, 在$g_T^r(n_i)<e(n_i)$时修改$g_T^r(n_i)$. 可是, 若$n_i \in$CLOSED, 且$g_T^r(n_i)<e(n_i)$, 则算法PRA 置节点n_i 于QUEUE 表中. QUEUE 表此时被用来传播g_T^r 值. 为了有效地传播, 在算法PRA 的步骤(2.7.1), 选择了QUEUE 表中具有最大e 值的节点m. 这保证了在执行步骤(2.7) 时, 在QUEUE 表中没有一个节点被选择多次, 即至多一次.

通过传播g_T^r 值的方法, 传播式启发式搜索算法PRA 扩展节点仅一次. 这与算法RA 有本质的不同. 算法RA 有可能扩展一个节点多次.

§ 3. 算法PRA* 优于算法RA*

定理1: 传播式算法PRA* 是可采纳的, 即若存在一条从初始节点s 到某一个目标节点的路径, 则算法PRA* 将由于找到一条最佳路径而结束.

证明: 根据上面第二节后部分的分析以及算法RA* 可采纳性[1] 证明, 易知算法PRA* 是可采纳的.

定义1: 对于算法RA*, 一个节点的选择次数为节点的扩展次数; 对于算法PRA*, 一个节点的选择次数: (1) 该节点的扩展次数; (2) 该节点从QUEUE 表中被选择的次数.

定理2: (a) 在最坏情况下, 算法RA* 的节点的选择总次数为$O(2^N)$; (b) 算法PRA* 的节点选择总次数为$O(N^2)$, 其中N 表示图的节点数.

证明: (a) 的证明可参见文献[2] 所述的方法来得到.

(b) 算法PRA* 至多从OPEN 表中进行N 次扩展, 这是因为如前所述, 该算法不可能多次扩展OPEN 表中的一个节点. 又由于对任两个可扩展的后继节点, 没有一个节点

会被从QUEUE 表里选择多次，故算法PRA* 在最坏情况下，至多的节点选择总次数为$O(N\times N)=O(N^2)$.

定理2 很重要，它揭示了算法PRA* 在算法的运行时间上优于算法RA*. 下文从算法所需的时空角度来考察算法RA* 和PRA*.

• 算法RA*

(1) 空间　对此算法而言，没有必要存贮整个隐式图. 对于每个节点只需知道下列属性就可以了：(a) OPEN.CLOSED 表；(b) g_T^r, h_T^r, f_T^r 值；(c) 一个后向指针，用以跟踪算法目前所知道的最佳路径. 据此可知，算法共需存贮空间为$O(N)$.

(2) 时间　如前所述，此算法在最坏情况下，需进行$O(2^N)$ 次节点选择. 由于从OPEN 表中选出节点在最坏情况下需$O(N)$ 次选择，故整个运行时间需$O(N\cdot 2^N)$.

• 算法PRA*

(1) 空间　因为隐式图在最坏情况下可能有$O(N^2)$, 且此时必须将整个图存贮起来，故需存贮空间为$O(N^2)$.

(2) 时间　如前所述，此算法在最坏情况下，需进行$O(N^2)$ 次节点选择，再加之每次选择所需的时间，故整个运行时间需$O(N^3)$.

§4. 算法RA 与PRA 之间的关系定理

当启发式估价函数h_T^r 不再满足$h_T^r(n)\geq h_T^{r^*}(n)$ 时，算法RA 与PRA 具有些什么性质呢？此两算法是否会给出具有相同路径耗散值的求解路径呢？这是本节要解决的问题，即根据Martelli 的约束消解概念来研究此问题.

设P_1, P_2 分别是由算法RA 和PRA 所发现的两个求解路径，当然有可能$P_1=P_2$. 对于P_2 路径上的每个节点m, 在算法PRA 执行的某一时刻，$g_T^r(m)$ 将取值$C^{P_2}(s,m)$. 这里$C^{P_2}(s,m)$ 表示从根节点s 到节点m 沿路径P_2 所需的耗散值. 注意，若节点m 是路径P_2 的端节点，则$m\in$CLOSED. 我们称P_2 上的节点m 为类型1 节点，若在PRA 运行期间，$g_T^r(m)$ 得到值$C^{P_2}(s,m)$, 且$m\in$OPEN. 否则节点m 称之为类型2 节点.

设P 是自根节点s 开始的任一路径，节点n 属于P, 若在算法RA 或PRA 执行的某一时刻有：$n\in$OPEN 且沿路径P 上的节点n 的所有父辈节点均属于CLOSED 表，则称节点n 是P 路径在此时刻时的最优节点. 很显然，此时刻有：$g_T^r(n)\geq c(s,m)$.

顺便提一下，可仿照$C^{P_2}(s,m)$ 的定义来定义$C^{P_1}(s,m)$; g_T^{PRA}, g_T^{rPRA}, h_T^{rRA}, h_T^{rPRA}, f_T^{rRA}, f_T^{rPRA}.

定理3:　若算法RA 和PRA 的约束消解[2](tie-resolution) 相同，且不为空，且各自所求得的求解路径P_1 和P_2 并不相同，则P_2 上必有一个类型2 的节点.

证明：　设路径P_2 上每个节点均为类型1; m_1 是算法RA 结束时P_2 路径上的最优结点. 注意，由于$P_1\neq P_2$, 故必存在这样的节点m_1, 此时$f_T^{rRA}(m_1)\geq T(c^{P_1}(s,m_1), h_T^{rRA}(m_1))$. 根据假设，$m_1$ 是类型1 节点，故当节点m_1 由算法PRA 扩展时，$g_T^{rPRA}(m_1)=C^{P_2}(s,m)$. 设节点$n_1$ 是当算法PRA 扩展节点m_1 时的路径P_1 的最优节点. 由于算法PRA 优先选择节点m_1 而不选择节点n_1, 故当节点m_1 由算法PRA 扩展时，有：

$$\begin{aligned}T(C^{P_2}(s,m_1), h_T^{rPRA}(m_1)) &= f_T^{rPRA}(m_1)\\ &\geq f_T^{rPRA}(n_1)\geq T(C^{P_1}(s,n_1), h_T^{rRA}(n_1)) \qquad (*1)\end{aligned}$$

设节点m_2是算法RA在最后一次扩展节点n_1时的路径P_2上的最优节点，且设$m_1=m_2$，则由于算法RA优先选择节点n_1而不选择m_2即选节点m_1，故有

$$f_T^{rRA}(n_1)=T(C^{P_1}(s,n_1),\ h_T^{rRA}(n_1)) \geq f_T^{rRA}(m_1)\geq T(C^{P_2}(s,m_1),\ h_T^{rPRA}(m_1)) \qquad (*2)$$

根据式(*1)、(*2)有

$$f_T^{rRA}(n_1)=f_T^{rPRA}(n_1)=f_T^{rPRA}(m_1)=f_T^{rRA}(m_1)$$

可是，此时算法RA与PRA的约束消解将不相同．这样就必须有$m_2\neq m_1$．这意味着$C^{P_2}(s,m)>C^{P_1}(s,m)$，因为$m_1$节点是算法RA结束时的路径$P_2$上的最优节点．

类似地，设节点n_2是当算法PRA扩展节点m_2时的路径P_1上的最优节点，则可证明$n_2\neq n_1$，且$C^{P_1}(s,n_2)\geq C^{P_2}(s,n_1)$．照此下去，我们可得如下的节点序列：

$n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots \in P_1$

$m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots \in P_2$

其中$C^{P_1}(s,n_1)<C^{P_1}(s,n_2)<C^{P_1}(s,n_3)<\cdots\cdots$

$C^{P_2}(s,m_1)<C^{P_2}(s,m_2)<C^{P_2}(s,m_3)<\cdots\cdots$

设求解路径P_1和P_2有着相同的初始节点序列sq(若只有s也可以)．若$\forall_i$，m_i节点是节点q沿路径P_2的后继节点，即若$C^{P_1}(s,q)=C^{P_2}(s,q)>C^{P_2}(s,m_i)$，则当$m_i$节点由算法PRA扩展时，即节点$m_i$是沿路径$P_2$上的最优节点，q已属于CLOSED表．类似地，$\forall_{i'}$，若节点$n_{i'}$是节点q沿路径$P_1$的后继节点，则$m_{i'+1}$必然是q沿路径$P_2$上的后继节点，这样上述的两个序列就会不通过节点q．由于P_1，P_2路径上的节点是有限的，故得出矛盾，进而定理获证．

设由算法RA和PRA所得的求解路径分别是P_1、P_2，且初始部分是相同的，即令为sq，则在算法RA和PRA运行过程中必存在一条路径$q''p$使得节点p是类型2节点，当然q''可以是初始节点s．假设沿P_2路径上的p结点的直接父辈是类型1，沿P_2路径从p到节点m'的所有节点(不包括m')是类型2节点，又设q'是这样的一个节点，它属于节点q''到q的路径上，且由算法RA和PRA所扩展的所有结点均优先于q'先扩展．注意，节点q'与q''不可能相同，而q'有可能与q相同．设节点n'是当算法PRA扩展类型1节点m'时的路径P_1上的最优节点，m''是当算法RA扩展n'节点时的路径P_2上的最优节点，则节点m''必在从节点p到m'的沿路径P_2的路径上，m''可能与节点p相同，但绝不会与m'相同．于是我们有下列定理．

定理4: 若算法RA与PRA的不为空的约束消解相同，且各自所得的求解路径P_1和P_2并不相同，则$C^{P_2}(s,p)\geq C^{P_2}(s,m'')>C^{P_2}(s,m')$.

证明： 根据定理三以及上述讨论可立即推得．

定理5: 若当算法PRA运行时，从OPEN表中所选择的节点没有任何约束需要消解，则由算法RA和PRA所求得的求解路径P_1、P_2是相同的，且$f_T^{rRA}=f_T^{rPRA}$.

证明： 假设当算法PRA运行时，算法RA与PRA间存在着不相同的约束消解，显然根据约束消解的定义有$f_T^{rRA}\neq f_T^{rPRA}$，故当然不会有$P_1=P_2$.

假设算法RA与PRA约束消解相同，且约束消解为空，即当算法PRA运行时，从OPEN表中选择的节点不需约束消解，又设P_1与P_2不相同，则根据定理3、4有：

$$T(C^{P_1}(s,m''),\ h_T^{rRA}(m''))\geq T(C^{P_2}(s,q'),\ h_T^{rPRA}(q')) \geq T(C^{P_1}(s,m'),\ h_T^{rRA}(m'))$$

注意，此不等式之所以成立，是由于节点m''是类型2节点，且在节点q'之前由算法PRA予以扩展，$C^{P_2}(s,m'')$是当节点m''由PRA扩展时的$g_T^{rPRA}(m'')$的值．又节点q'在节

点m′ 之前由PRA 算法予以扩展，类似地可以有

$$T(C^{P_2}(s,m'),\ h_T^{rPRA}(m'))\geq T(C^{P_1}(s,n'),\ h_T^{rRA}(n'))$$
$$\geq T(C^{P_2}(s,m''),\ h_T^{rPRA}(m''))$$

注意，算法PRA 优先选择节点m′ 而不是节点n′，而算法RA 优先选择节点n′ 而不是m″. 因为根据恒成立的等式：

$$C^{P_1}(s,m')-C^{P_2}(s,m')=C^{P_1}(s,m'')-C^{P_2}(s,m'')$$

且根据模T 的性质，易知上述两不等式将变成等式，这是不可能的，因为约束消解为空，故根据反证法知$P_1=P_2$，也就是$f_T^{rRA}=f_T^{rPRA}$. 定理获证.

定理5 是一个非常重要的定理，它表示在不保证可采纳性的条件下，欲使算法RA 与PRA 求得的结果相同所必须的条件.

§5. 结论

本文提出了一个新的传播式的启发式图搜索算法PRA 及PRA*. 算法PRA* 在运行时间上优于算法RA*，同时还得到了重要的算法RA 与PRA 间的关系定理. 本文研究的思路有一定的新颖性，相信有助于启发式技术的进一步研究.

参考文献

[1] 王士同，随机产生式系统的启发式图搜索算法RA* A* 的推广，计算机学报，1988.5.
[2] A.Martelli, On the Complexity of Admissible Search Algorithms, Artificial Intelligence, No.8, 1977.
[3] 王士同，启发式算法RA* 的改进算法IRA* 及IRA′，计算机学报，1991.3.
[4] 王士同，AND/OR 图的新的启发式图搜索算法NAO*，计算机学报，1991. 1.
[5] N.J.Nilsson, Principles of Artificial Intelligence, Tioge Publishing Co. 1980.
[6] J.Pearl, HEURISTICS; Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving, Addison-Wesley Press, 1984.
[7] 王士同等，模糊数学在人工智能中的应用，机械工业出版社，1990 年.
[8] 王士同著，人工智能中的模糊启发式搜索技术，机械工业出版社，1992.

第五次全国数据结构学术研讨会在长沙召开

第五次('91) 全国数据结构学术研讨会由中南工业大学主办，东北工学院、清华大学、国防科技大学、湘潭大学、湖南医科大学、长沙铁道学院协办，于一九九一年十月四日至九日在湖南举行. 来自全国60 余所高等院校的70 余名代表出席了会议. 会议开幕式上中南工业大学党委书记兼校长刘业翔教授、湖南省计算机学会理事长刘尚威教授讲了话. 大会交流了学术和教学方面的论文30 篇，并邀请国防科技大学胡守仁教授、东北工学院姚天顺教授、北京大学张乃孝副教授等作了专题学术报告.

与会代表经过学术交流和热烈讨论，一致认为：计算机科学的发展为“数据结构”这一基础学科的研究开辟了广阔的天地，提出了大量新的研究课题. 在这种形势下加强数据结构的理论和应用研究、加强交流和协作，对促进计算机科学的发展具有十分重要的意义.

与此同时召开了学科委员会成员会议，总结和肯定了前三年数据结构学科在科研和教学方面所取得的成绩，决定了“促进数据结构科研和教学，开展学术交流”的工作方针，调整和加强了学科委员会，并希望尽快确定本学科委员会的上级专业委员会.