

λ -变换: 一种用于形状精确描述的数学工具*

王 斌^{1,2}

¹(南京财经大学 信息工程学院, 江苏 南京 210023)

²(电子商务省级重点实验室(南京财经大学), 江苏 南京 210023)

通讯作者: 王斌, E-mail: wangbin@njue.edu.cn



摘 要: Radon 变换是一种用于形状分析的非常有用的数学工具. 它是一种无损变换, 利用该变换, 可以方便地抽取到目标形状结构的重要视觉特征. 但因为该变换含有目标的大小、位置和方向信息, 所以并不能将其直接用于目标形状的识别任务. 现有的基于 Radon 变换的形状分析方法虽然通过各种途径消除这些信息, 以保证抽取的形状特征的不变性, 但这些操作也损失了大量有用的形状信息, 使得描述的精度有限. 为解决该问题, 提出了一种 λ -变换的数学工具. 该变换利用平行直线的相对位置关系(用一个属于区间 $[0, 1]$ 的变量 r 来表达)和它们对形状函数的积分, 构造了一个变量 r 和直线的方向角变量 θ 的二维函数, 用于形状的描述和差异性度量. 从理论上分析了 λ -变换满足对平移、缩放的不变性, 以及对旋转变换仅使其在 θ 维发生平移的特性, 也从理论上分析了 λ -变换对 Radon 变换信息的保持特性, 而这种保持特性使得该变换比其他基于 Radon 变换的形状描述子具有更高的描述精度. λ -变换的有效性和相较于其他同类方法的优越性, 通过几组常用形状图像检索实验得到验证.

关键词: Radon 变换; 图像分析; 形状描述; 目标识别; 图像检索

中图法分类号: TP391

中文引用格式: 王斌. λ -变换: 一种用于形状精确描述的数学工具. 软件学报, 2017, 28(12): 3293–3305. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/5314.htm>

英文引用格式: Wang B. λ -Transform: A mathematical tool for accurate shape description. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2017, 28(12): 3293–3305 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/5314.htm>

λ -Transform: A Mathematical Tool for Accurate Shape Description

WANG Bin^{1,2}

¹(School of Information Engineering, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210023, China)

²(Key Laboratory of Electronic Business (Nanjing University of Finance and Economics), Nanjing 210023, China)

Abstract: Radon transform is a useful mathematical tool for shape analysis. It is a lossless transform and makes the extraction of structural shape features become very easy. However it cannot be directly applied to shape recognition due to its sensitivity to translation, scaling and rotation of the shape. The existing Radon transform based methods have had many attempts to remove the information of size, position and orientation of the shape from the Radon transform. However in these methods, the invariant features are achieved at the expense of useful shape features. To address this issue, a novel mathematical tool termed λ -transform is proposed for shape description.

* 基金项目: 国家自然科学基金(61372158); 江苏省自然科学基金(BK20141487); 江苏省科技计划(产学研合作前瞻性联合研究)(BY2016009-03); 江苏省高校优秀科技创新团队(2017-15); 江苏省高校优势学科建设工程资助项目(PAPD)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (61372158); Natural Science Foundation of Jiangsu Province of China (BK20141487); Science and Technology Planning Project (Cooperation of Industry, Education and Academy) of Jiangsu Province of China (BY2016009-03); Program for Outstanding Science and Technology Innovation Team of Jiangsu Higher Education Institutions (2017-15); Project Funded by the Priority Academic Program Development of Jiangsu Higher Education Institutions (PAPD)

收稿时间: 2017-01-18; 修改时间: 2017-04-07; 采用时间: 2017-05-31; jos 在线出版时间: 2017-07-12

CNKI 网络优先出版: 2017-07-12 15:35:21, <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2560.TP.20170712.1535.013.html>

The λ -transform utilizes the relative position information between the parallel lines (encoded in a variable $r \in [0, 1]$) and their integrals over the shape to construct a 2D function of the variable r and the direction angle θ of the line for shape description. This study theoretically proves that λ -transform is invariant to the translation and scaling and a rotation only makes it shift along the θ direction. It also theoretically concludes that λ -transform can effectively preserve the useful information of Radon transform. These desirable characteristic make λ -transform outperform the other Radon based methods for shape recognition. Tests on the proposed λ -transform are carried out on several commonly used shape image datasets, and the experimental results indicate it achieves better performance over other Radon based shape descriptors.

Key words: Radon transform; image analysis; shape description; object recognition; image retrieval

形状是目标的一种重要视觉特征,是人对目标进行识别的一个重要依据.形状分析是计算机视觉和图像处理研究领域的基本问题,已产生了大量的应用,如肿瘤形状图像的检索^[1]、基于叶片形状的植物分类^[2,3]、湖泊形状的遥感图像分析^[4]、字符识别^[5]、商标图像的检索^[6]、鱼类图像的检索^[7,8]等.形状分析的核心任务是形状描述,即抽取目标的有辨识能力的形状特征,以完成最终的目标识别任务.迄今为止,已提出了大量的形状描述方法,以用于目标图像的分类、识别和检索,相关的综述性论文见文献[9–11].

一类方法着眼于将数学工具 Radon 变换^[12]用于形状图像的描述任务.Radon 变换通过将 2D 函数 $f(x, y)$ 沿其域上的直线进行积分,得到另一以直线的两个参数 λ 和 θ 为自变量的 2D 函数 $f^{(R)}(\lambda, \theta)$, 这里, $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ 是坐标原点到直线的带符号的投影距离, $\theta \in [0, \pi)$ 是直线的方向角.图 1 给出了一个形状图像(可以一般地表示为二值函数 $f(x, y)$, 当点 (x, y) 位于形状区域内, 则 $f(x, y) = 1$; 否则 $f(x, y) = 0$) 的 Radon 变换的示意图, 虚线表示用于对形状进行积分操作的直线, 该直线上的实线段部分表示积分直线与形状区域的交.

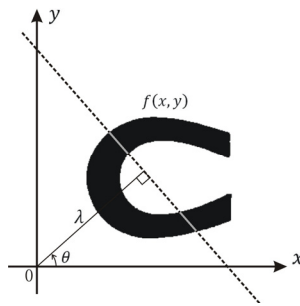


Fig.1 A graphical illustration of the Radon transform of a shape image

图 1 一个形状图像的 Radon 变换的示意图

Radon 变换从各个方向透射目标形状,通过对目标形状区域的直线积分,有效地抽取了目标形状的形态学特征和内部结构信息.但 Radon 变换对目标形状的平移、缩放和旋转非常敏感,当形状图像函数 $f(x, y)$ 发生平移,变为 $g(x, y) = f(x - x_0, y - y_0)$ 时(这里, (x_0, y_0) 是平移参数),两者的 Radon 变换 $f^{(R)}$ 和 $g^{(R)}$ 的关系为

$$g^{(R)}(\lambda, \theta) = f^{(R)}(\lambda - x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta, \theta) \quad (1)$$

当 $f(x, y)$ 发生缩放,变为 $g(x, y) = f(\alpha x, \alpha y)$ 时(这里, $\alpha > 0$ 是尺度参数),两者的 Radon 变换 $f^{(R)}$ 和 $g^{(R)}$ 的关系为

$$g^{(R)}(\lambda, \theta) = \frac{1}{\alpha} f^{(R)}(\alpha \lambda, \theta) \quad (2)$$

当 $f(x, y)$ 发生旋转,变为 $g(x, y) = f(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0, -x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0)$ 时(这里, θ_0 是旋转参数),两者的 Radon 变换 $f^{(R)}$ 和 $g^{(R)}$ 的关系为

$$g^{(R)}(\lambda, \theta) = f^{(R)}(\lambda, \theta - \theta_0) \quad (3)$$

由上面的公式可以看出:当目标发生平移时,在 Radon 变换的 λ 变量中嵌入了平移参数;当目标发生缩放时,在 θ 变量和变换的幅值中嵌入了缩放参数;而当目标发生旋转时,在 θ 变量中嵌入了旋转参数.因此,将 Radon 变换应用于形状图像的描述和识别的一个关键是:如何消除变换中的跟形状无关的位置、大小和方向信息,而且保

持有用的形状信息.

本文的主要贡献是,提出了一种称为 λ 变换的新的数学工具,用于精确的形状描述.现有的基于 Radon 变换的方法,大多着眼于通过某种操作,如积分、傅里叶变换等,以消除 Radon 变换的 λ 维中所包含的形状的位置和大小信息,将 Radon 变换变为只含一个自变量 θ 的一维函数,以方便于后续的形状匹配任务.但在归一化操作中,也随之损失了大量的有用形状信息.与这些方法不同的是,本文提出的 λ 变换是一个二维函数,在获得不变形状描述的同时,不仅有效地保持了 Radon 变换在各个方向的直线积分信息,而且也保持了同方向直线的相对位置信息.我们从理论和大量的形状图像检索实验上证明了该变换的有效性.

1 相关工作

与本文相关的是近些年来提出的各种基于 Radon 变换的形状分析方法,其中一类方法着眼于消除 Radon 变换中的方向、位置和大小信息,以有效地用于目标识别任务.Tabbone 等人^[13]将 Radon 变换的平方函数,沿 λ 维进行积分,从而得到一个以 θ 为自变量的一维函数,称为 R-变换, λ 维的积分操作消除了目标形状的位置信息,再用一维傅里叶变换,通过舍弃系数中的相位信息和对系数的幅度值的归一化操作,进一步消除形状的方向和大小信息.Hoang 等人^[14]提出了一种泛化的 R 变换,将原来取 Radon 变换的 2 次幂推广为取任意次幂.R 变换及其泛化版本不仅移除了与形状特征无关的位置、方向和大小信息,而且从空间上凸显了形状在各个方向上的形状模式,该方法已成功用于人的行为识别^[15,16].Chen 等人^[17]利用双树复小波变换能多分辨率地产生平移不变特征的优点和傅里叶变换能抽取旋转不变特征的特性,在形状的 Radon 变换域抽取不变形状特征.该方法不仅计算效率高,而且还有较高的识别精度.近年来,一些工作尝试用梅林变换和傅里叶变换的组合,来消除 Radon 变换中的位置、方向和大小信息.Wang 等人^[18]用傅里叶-梅林变换作用于 Radon 变换,构造出一个旋转和缩放不变的二维函数(其两个自变量分别为傅里叶变换和梅林变换的时域变量),然后,基于该函数抽取出能量、标准差和熵特征用于 K 邻近分类.Hoang 等人^[19]将傅里叶-梅林变换先应用于 Radon 变换的 λ 维,以移除变换中的平移参数和尺度因子,再施以傅里叶变换,以消除旋转参数,所产生的不变形状描述子可以鲁棒地用于遮挡和变形的目标识别.Xiao 等人^[20]则在 Radon 变换域,用伪傅里叶-梅林变换,获取模糊、平移、旋转和缩放不变描述子.

上述方法的主要特点是对 Radon 变换,通过进一步施加各类变换来产生不变形状描述子.而另一些研究工作则考虑直接从 Radon 变换域中抽取形状特征.Chen 等人^[21]在 Radon 变换域抽取各个方向的峰值、均匀度、紧致性等形态特征和谱特征的组合,构成不变形状描述子.该方法不仅对简单的轮廓线形状具有较高的识别精确率,还能精确识别具有复杂内部结构的区域形状.Nacereddine 等人^[22]提出:在形状描述阶段对 Radon 变换不作任何处理,而在形状匹配阶段,在两个形状的比较中,通过它们的 Radon 变换估计一个形状相对于另一个形状的位置、大小和方向参数,然后用这些参数将该形状的 Radon 变换归一到另一个形状.经过这种相对归一的 Radon 变换与另一形状的 Radon 变换的绝对差之和,作为它们的距离度量.该方法的优点是:在基于 Radon 变换的形状比较中,利用了 Radon 变换的所有信息,因此识别的精度高.但该方法在进行形状匹配时,需要预先依据两个待匹配形状的 Radon 变换进行相似性变换参数的估计,才能完成形状的差异性度量,因此形状的匹配效率不高.

2 λ -变换

为完成不变形状描述和识别任务,本文提出了一种 λ -变换的形状描述方法.

2.1 定义

一个形状图像可表示为二值函数 $f(x,y)$,定义为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } (x,y) \in D \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

这里, D 是该形状的域.令 $f^{(R)}(\lambda,\theta)$ 为该函数的 Radon 变换.因 Radon 变换的两个自变量 λ,θ 的定义区间分

别为 $(-\infty, +\infty)$ 和 $[0, \pi)$, 为方便后面的函数构造, 我们对其进行如下拓展:

$$f^{(\bar{R})}(\lambda, \theta) = \begin{cases} f^{(R)}(\lambda, \theta), & \theta \in [0, \pi) \\ f^{(R)}(-\lambda, \theta - \pi), & \theta \in [\pi, 2\pi) \end{cases} \quad (5)$$

我们称上述定义的函数 $f^{(\bar{R})}(\lambda, \theta)$ 为拓展的 Radon 变换.

由 Radon 变换的周期性和对称性: $f^{(R)}(\lambda, \theta) = f^{(R)}(\lambda, \theta \pm 2\pi)$, $f^{(R)}(\lambda, \theta) = f^{(R)}(-\lambda, \theta \pm \pi)$ 及其平移、旋转和缩放特性 (公式(1)~公式(3)), 可以得出: 拓展的 Radon 变换与原 Radon 变换一样, 具有相同的平移、旋转和缩放特性.

用拓展的 Radon 变换, 我们构造如下两个一维函数:

$$\lambda_{f,1}(\theta) = \arg \min_{\lambda} \{f^{(\bar{R})}(\lambda, \theta) > 0\} \quad (6)$$

$$\lambda_{f,2}(\theta) = \arg \max_{\lambda} \{f^{(\bar{R})}(\lambda, \theta) > 0\} \quad (7)$$

其中, 自变量 $\theta \in [0, 2\pi)$. 这两个函数的几何意义是: 由它们所确定的参数对 $(\lambda_{f,1}(\theta), \theta)$, $(\lambda_{f,2}(\theta), \theta)$, 可以给出在 θ 方向, 将形状夹在中间的两条平行直线, 图 2 给出了这两条直线的示意图.

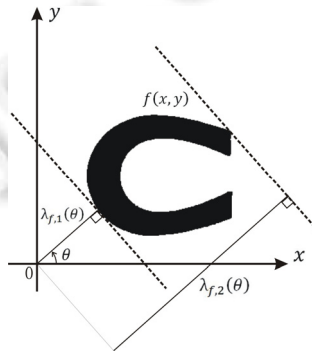


Fig.2 An example of illustrating two parallel lines (marked by dotted line) in θ direction

图 2 在 θ 方向, 将形状夹在中间的两条平行直线(虚线表示)的示意图

由函数 $\lambda_{f,k}(\theta) (k=1,2)$ 的定义和拓展的 Radon 变换的性质 (公式(1)~公式(3)), 可以推导出这两个函数 $\lambda_{f,k}(\theta) (k=1,2)$ 在函数 $f(x,y)$ 发生平移、缩放或旋转变为函数 $g(x,y)$ 时, 具有如下性质.

- 平移: $\lambda_{g,k}(\theta) = \lambda_{f,k}(\theta) + x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta (k=1,2)$. 这里, x_0, y_0 是平移参数;
- 缩放: $\lambda_{g,k}(\theta) = \frac{1}{\alpha} \lambda_{f,k}(\theta) (k=1,2)$. 这里, $\alpha > 0$ 是缩放因子;
- 旋转: $\lambda_{g,k}(\theta) = \lambda_{f,k}(\theta - \theta_0) (k=1,2)$. 这里, $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ 是旋转角.

下面我们用函数 $\lambda_{f,k}(\theta) (k=1,2)$ 构造二维函数 $\bar{\lambda}_f(r, \theta)$, 其定义如下:

$$\bar{\lambda}_f(r, \theta) = \left(\frac{\lambda_{f,1}(\theta) + \lambda_{f,2}(\theta)}{2} \right) + r \left(\frac{\lambda_{f,1}(\theta) - \lambda_{f,2}(\theta)}{2} \right) \quad (8)$$

这里, 函数 $\bar{\lambda}_f(r, \theta)$ 的两个自变量的取值范围分别为 $r \in [0, 1]$ 和 $\theta \in [0, 2\pi)$. 由该函数的定义, 我们可以得出: 当 $r=0$ 时, 所得到的直线 $(\bar{\lambda}_f(0, \theta), \theta)$ 与直线 $(\lambda_{f,1}(\theta), \theta)$ 和直线 $(\lambda_{f,2}(\theta), \theta)$ 等距离; 当 $r=1$ 时, 得到的直线 $(\bar{\lambda}_f(1, \theta), \theta)$ 即为直线 $(\lambda_{f,1}(\theta), \theta)$, 而直线 $(\bar{\lambda}_f(1, \theta + \pi), \theta + \pi)$ 与直线 $(\lambda_{f,2}(\theta), \theta)$ 为同一直线. 因此, 变量 r 记录了平行直线的相对位置关系.

由函数 $\lambda_{f,k}(\theta) (k=1,2)$ 的平移、缩放和旋转特性, 可推出函数 $\bar{\lambda}_f(r, \theta)$ 具有与之相同的平移、缩放和旋转特性, 即:

- 平移: $\bar{\lambda}_g(r, \theta) = \bar{\lambda}_f(r, \theta) + x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta$;

- 缩放: $\bar{\lambda}_g(r, \theta) = \frac{1}{\alpha} \bar{\lambda}_f(r, \theta)$;
- 旋转: $\bar{\lambda}_g(r, \theta) = \bar{\lambda}_f(r, \theta - \theta_0)$.

用上述定义的函数 $\bar{\lambda}_f(r, \theta)$ 和 $f(x, y)$ 的拓展的 Radon 变换 $f^{(\bar{R})}(\lambda, \theta)$, 我们构造一个自变量为 $r \in [0, 1]$ 和 $\theta \in [0, 2\pi)$ 的二维函数:

$$f^{(\lambda)}(r, \theta) = \frac{f^{(\bar{R})}(\bar{\lambda}_f(r, \theta), \theta)}{\sqrt{S}} \quad (9)$$

这里, S 是形状函数 $f(x, y)$ 的面积, 定义为

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy \quad (10)$$

我们称上述构造的函数 $f^{(\lambda)}(r, \theta)$ 为函数 $f(x, y)$ 的 λ -变换.

2.2 不变性分析

由 λ -变换的定义, 可以得到如下结论.

定理 1. λ -变换满足对平移和缩放的不变性, 且形状的旋转对其仅产生在 θ 维的平移.

证明: 当形状函数 $f(x, y)$ 发生平移变为 $g(x, y) = f(x - x_0, y - y_0)$ 时, 由公式(9)可推出, g 和 f 有着相同的面积 S . 由拓展的 Radon 变换的平移性质(公式(1))和函数 $\bar{\lambda}_f(r, \theta)$ 平移性质, 我们有:

$$\begin{aligned} g^{(\lambda)}(r, \theta) &= \frac{g^{(\bar{R})}(\bar{\lambda}_g(r, \theta), \theta)}{\sqrt{S}} \\ &= \frac{f^{(\bar{R})}(\bar{\lambda}_g(r, \theta) - x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta, \theta)}{\sqrt{S}} \\ &= \frac{f^{(\bar{R})}(\bar{\lambda}_f(r, \theta) + x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta, \theta)}{\sqrt{S}} \\ &= \frac{f^{(\bar{R})}(\bar{\lambda}_f(r, \theta), \theta)}{\sqrt{S}} \\ &= f^{(\lambda)}(r, \theta). \end{aligned}$$

由上述推导可得出, λ -变换满足平移不变性.

当形状函数 $f(x, y)$ 发生缩放, 变为 $g(x, y) = f(\alpha x, \alpha y)$ 时, 由公式(9)可推出, g 的面积为 S/α^2 . 由拓展的 Radon 变换的缩放性质(公式(2))和函数 $\bar{\lambda}_f(r, \theta)$ 的缩放性质, 我们有:

$$g^{(\lambda)}(r, \theta) = \frac{g^{(\bar{R})}(\bar{\lambda}_g(r, \theta), \theta)}{\sqrt{S/\alpha^2}} = \frac{\frac{1}{\alpha} f^{(\bar{R})}(\alpha \bar{\lambda}_g(r, \theta), \theta)}{\sqrt{S/\alpha^2}} = \frac{f^{(\bar{R})}(\alpha \bar{\lambda}_g(r, \theta), \theta)}{\sqrt{S}} = \frac{f^{(\bar{R})}(\bar{\lambda}_f(r, \theta), \theta)}{\sqrt{S}} = f^{(\lambda)}(r, \theta).$$

由上述推导可得出, λ -变换满足缩放不变性.

当形状函数 $f(x, y)$ 发生旋转, 变为形状函数 $g(x, y) = f(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0, -x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0)$ 时, 由公式(9)可推出, g 和 f 有着相同的面积 S . 由拓展的 Radon 变换的旋转性质(公式(3))和函数 $\bar{\lambda}_f(r, \theta)$ 的旋转性质, 我们有:

$$g^{(\lambda)}(r, \theta) = \frac{g^{(\bar{R})}(\bar{\lambda}_g(r, \theta), \theta)}{\sqrt{S}} = \frac{f^{(\bar{R})}(\bar{\lambda}_f(r, \theta - \theta_0), \theta - \theta_0)}{\sqrt{S}} = f^{(\lambda)}(r, \theta - \theta_0).$$

由上述推导可得出, 旋转变换仅使 λ -变换在 θ 维发生平移. □

在图 3 中, 我们给出了一幅形状图像及其平移、缩放、旋转图像(如图 3(a)所示)的 λ -变换图像(如图 3(c)所示). 这里, 我们将 λ -变换以灰度图像的形式显示, 以便于观察. 图像的横轴对应于 λ -变换的 θ 轴, 纵轴对应于 λ -变换的 r 轴, 灰度则对应于 λ -变换的值, 灰度值越大, 表明 λ -变换的值越大, 否则则越小. 为便于比较, 我们还在图 3(b)中给出了这 4 个形状图像的 Radon 变换图像, 其中, 图像的横轴对应于 Radon 变换的 θ 轴, 纵轴对应于 Radon 变换的 λ 轴, 灰度对应于 Radon 变换的值. 从图 3 可以看出: 我们提出的 λ -变换满足对平移和缩放的不变性, 而 Radon

变换对平移和缩放非常敏感,当图像发生旋转时, λ -变换和 Radon 变换一样,仅发生在 θ 轴方向上的平移.

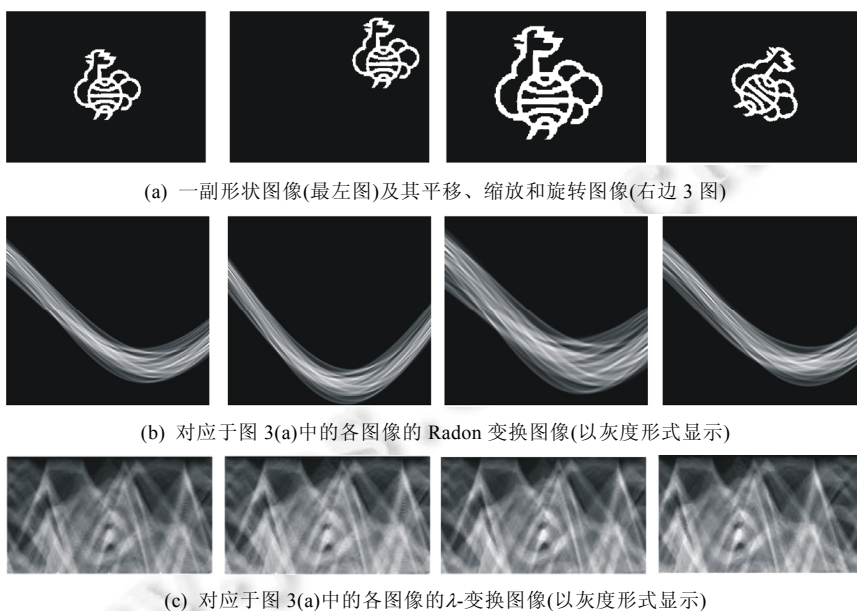


Fig.3 λ -Transform image and Radon transform image for a shape undergoing translation, scaling and rotation

图 3 形状图像在发生平移、缩放和旋转下的 λ -变换图像和 Radon 变换图像

2.3 描述的精确性

Radon 变换能够精确地描述形状,但现有的基于 Radon 变换的形状描述方法在移除目标形状的大小、方向和位置信息的同时,也丢失了大量的形状的有效信息,如文献[13]提出的 R-变换和文献[14]提出的泛化的 R-变换,通过去掉 Radon 变换的 λ 维来产生不变形状描述子;而文献[19]提出的方法,在用傅里叶-梅林变换消除 Radon 变换中的形状的大小和位置信息的过程中,舍弃变换系数中相位信息来达到描述子的不变性.下面我们来分析 λ -变换与 Radon 变换的关系.

形状的 Radon 变换 $f^{(R)}(\lambda, \theta)$ 可以看成对形状函数的所有直线积分的集合.给定一个方向角 $\theta \in [0, \pi)$, 当 $\lambda \in [\lambda_{f,1}(\theta), \lambda_{f,2}(\theta)]$, 所确定的直线 (λ, θ) 落在形状的有效区域内,我们称为有效直线积分;而当 $\lambda \notin [\lambda_{f,1}(\theta), \lambda_{f,2}(\theta)]$, 则直线 (λ, θ) 在形状的有效区域之外,此时 $f^{(R)}(\lambda, \theta) = 0$, 表明此时的直线积分不含形状信息.在 λ -变换与 Radon 变换的关系方面,我们有如下结论:

定理 2. 令 $f^{(R)}(\lambda, \theta)$ 和 $f^{(\lambda)}(r, \theta)$ 分别为函数 $f(x, y)$ 的 Radon 变换和 λ -变换.给定 $\theta \in [0, \pi)$, 对于任意 $\lambda \in [\lambda_{f,1}(\theta), \lambda_{f,2}(\theta)]$, 当 $\lambda \leq (\lambda_{f,1}(\theta) + \lambda_{f,2}(\theta))/2$ 时,存在 $r \in [0, 1]$, 有 $f^{(R)}(\lambda, \theta) = f^{(\lambda)}(r, \theta)\sqrt{S}$; 而当 $\lambda > (\lambda_{f,1}(\theta) + \lambda_{f,2}(\theta))/2$ 时,则存在 $r \in [0, 1]$, 有 $f^{(R)}(\lambda, \theta) = f^{(\lambda)}(r, \theta + \pi)\sqrt{S}$. 这里, S 是形状 $f(x, y)$ 的面积.

证明:先证当 $\lambda \leq (\lambda_{f,1}(\theta) + \lambda_{f,2}(\theta))/2$ 时结论成立.令:

$$r = \frac{\lambda - (\lambda_{f,1}(\theta) + \lambda_{f,2}(\theta))/2}{(\lambda_{f,1}(\theta) - \lambda_{f,2}(\theta))/2},$$

我们显然有 $0 \leq r \leq 1$, 且 $\bar{\lambda}_f(r, \theta) = \lambda$. 由 λ -变换和拓展 Radon 变换的定义,可以得出:

$$f^{(\lambda)}(r, \theta) = \frac{f^{(\bar{R})}(\bar{\lambda}_f(r, \theta), \theta)}{\sqrt{S}} = \frac{f^{(R)}(\lambda, \theta)}{\sqrt{S}},$$

即, $f^{(R)}(\lambda, \theta) = f^{(\lambda)}(r, \theta)\sqrt{S}$.

再证当 $\lambda > (\lambda_{f,1}(\theta) + \lambda_{f,2}(\theta))/2$ 时结论成立.由拓展的 Radon 变换的定义和公式(5)、公式(6)可推出 $\lambda_{f,1}(\theta + \pi) =$

$-\lambda_{f,2}(\theta)$ 和 $\lambda_{f,2}(\theta+\pi)=-\lambda_{f,1}(\theta)$. 令:

$$r = \frac{-\lambda - (\lambda_{f,1}(\theta+\pi) + \lambda_{f,2}(\theta+\pi))/2}{(\lambda_{f,1}(\theta+\pi) - \lambda_{f,2}(\theta+\pi))/2},$$

则有 $0 \leq r \leq 1$, 且 $\bar{\lambda}_f(r, \theta+\pi) = -\lambda$. 再由λ-变换和拓展 Radon 变换的定义, 我们可得出:

$$f^{(\lambda)}(r, \theta+\pi) = \frac{f^{(\bar{R})}(\bar{\lambda}_f(r, \theta+\pi), \theta+\pi)}{\sqrt{S}} = \frac{f^{(\bar{R})}(-\lambda, \theta+\pi)}{\sqrt{S}}.$$

又因 $\theta+\pi \in [\pi, 2\pi)$, 由拓展的 Radon 变换的定义, 我们有 $f^{(\bar{R})}(-\lambda, \theta+\pi)/\sqrt{S} = f^{(R)}(\lambda, \theta)/\sqrt{S}$, 从而可推得 $f^{(\lambda)}(r, \theta+\pi) = f^{(R)}(\lambda, \theta)/\sqrt{S}$, 即 $f^{(R)}(\lambda, \theta) = f^{(\lambda)}(r, \theta+\pi)\sqrt{S}$.

由上述定理可以看出: 一个形状的在各个方向上的任意一个有效的直线积分, 在λ-变换中都有归一化的直线积分与其对应, 因此, Radon 变换的各条直线的积分信息在λ-变换中都得到有效的保持, 且λ-变换中的 r 变量记录了同方向直线的相对位置关系, 从而使得λ-变换在满足不变性的同时, 还具有高的描述精度, 相较于现有的基于 Radon 变换的方法, 能更好地满足高精度形状识别任务的需要. 在后面的实验部分, 我们将通过大量的形状检索实验来验证其描述的精确性.

2.4 形状差异性度量

给定形状 f 和形状 g , 我们通过比较它们的λ-变换 $f^{(R)}(\lambda, \theta)$ 和 $g^{(R)}(\lambda, \theta)$, 来度量它们的差异性. 根据定理 1, λ-变换满足对平移和缩放的不变性, 而旋转仅使λ-变换发生在θ维的平移, 我们在两个形状的λ-变换的比较中, 采用固定其中一个, 而对另一个在θ维不断地进行平移后, 再与前者进行比较, 取所有比较的最小值, 从而消除了形状的旋转对形状差异性度量的影响, 其数学定义如下:

$$d(f, g) = \min_{\theta_0 \in [0, 2\pi)} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f^{(\lambda)}(r, \theta) - g^{(\lambda)}(r, \theta + \theta_0)| dr d\theta \quad (11)$$

$d(f, g)$ 的值越大, 则表明两个形状差异越大; 否则越小.

3 实验结果和讨论

我们用 3 个公开的形状图像测试集来评估本文提出的λ-变换在目标识别中的性能, 其中: 两个测试集属于简单形状(如图 4 和图 5 所示), 该类形状的形状像素点的分布区域是联通的, 且其外轮廓所围区域内没有空洞, 即, 外轮廓所围区域的所有点都属于形状区域; 另一测试集属于复杂形状, 该类形状存在形状区域不联通, 或形状区域外轮廓所围区域内有空洞, 有着复杂的内部结构.

因本文提出的方法是基于 Radon 变换的形状描述和识别方法, 所以我们选取 3 种近些年发表的基于 Radon 变换的方法作为主要的比较对象. 这 3 种方法是: 文献[19]提出的融合 Radon 变换与傅里叶-梅林变换的方法 RFM, 文献[21]提出的组合 Radon 特征方法 RCF, 文献[22]提出的基于 Radon 变换的相似性参数恢复方法 R-RST. 此外, 我们还将本文提出的λ-变换方法与经典的形状描述方法 Zernike 矩方法^[23]进行了比较.

3.1 简单形状测试

Kimia-99^[24]和 Kimia-216^[25]是两个简单形状测试集, 许多形状描述和识别方法, 包括我们选择用来比较的基于 Radon 变换的方法^[19,21,22], 在这两个测试集上报告了测试结果. Kimia-99^[24]测试集有 9 类形状, 每类 11 个样本(如图 4 所示), Kimia-216^[25]测试集中则有 18 类形状, 每类 12 个样本(如图 5 所示), 它们的同类形状中, 存在刚性或非刚性的形变. 同文献[19,21,22]一样, 我们采用标准的图像检索性能评估方法——查准率(precision)/召回率(recall)曲线^[25]. 采用该性能评估方法, 测试集中的每一个形状图像作为检索样本, 跟测试集中的所有样本进行比较, 在返回的前 n 个差异性最小的样本中, 统计检索正确的样本数(即, 与检索样本属于同一类的样本的个数)记为 r , 设测试集中与检索样本属于同一类的样本总数为 m , 则该次检索的查准率为 $P=r/n$, 召回率为 $R=r/m$, 所有检索样本的查准率和召回率的平均构成的一对数据, 对应于以查准率为纵坐标, 查全率为横坐标的坐标平面的一个点, 让检索返回的样本数 n 从 1 变化到 K , 构成一个 K 个点的曲线, 称为查准率(precision)/召回率(recall)曲线.

这里, K 一般取同一类中的样本的总数, 如: 对于 Kimia-99 测试集, K 取 11; 而对于 Kimia-216, K 则取 12.

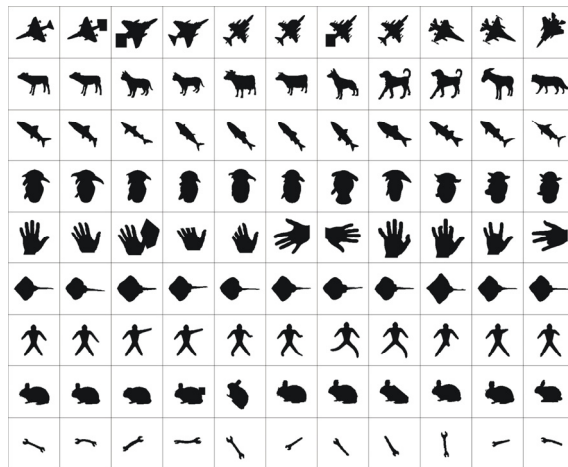


Fig.4 All the images included in the Kimia-99 shape dataset^[24]

图 4 Kimia-99 形状测试集^[24]中的所有形状样本图像

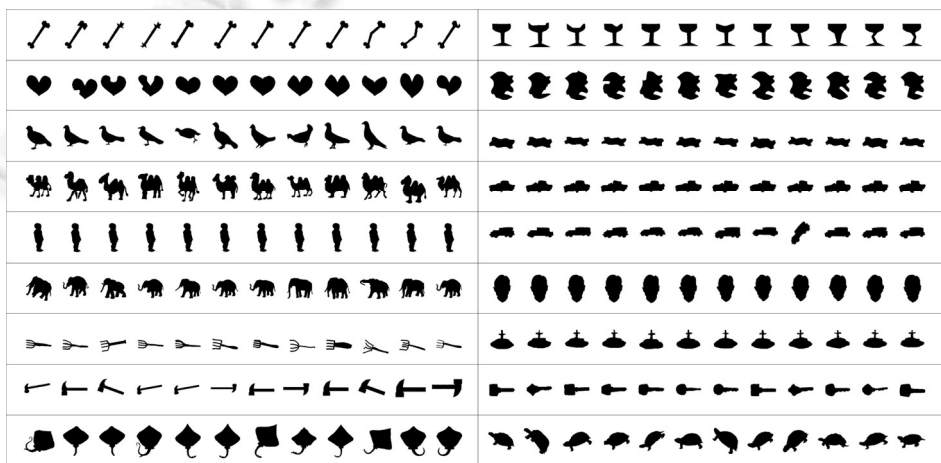


Fig.5 All the images included by the Kimia-216 shape dataset^[25]

图 5 Kimia-216 形状测试集^[25]中的所有形状样本图像

图 6 和图 7 给出分别给出了本文提出的 λ -变换方法和其他参与比较的方法在这两个简单形状测试集上的检索结果. 从图 6 可以看出: 在 Kimia-99 形状测试集上, 本文提出的 λ -变换 (λ -Transform) 的查准率/召回率曲线要好于参与比较的其他两种基于 Radon 变换的方法——RCF^[21]和 R-RST^[22]以及经典的 Zernike 矩方法. 这里, RCF 的实验结果直接引自文献[21], R-RST 和 Zernike 的实验结果皆直接引自文献[22]. 比较图 6 中的 4 条曲线可以发现: 在本文提出方法的检索结果曲线上, 各点对应的查准率/召回率都要高于参与比较的其他 3 种方法, 当检索返回的形状样本数达到 11 时, 本文提出方法的查准率/召回率都比 RCF 方法高出了近 2 个百分点, 而比 Zernike 方法则高出了近 8 个百分点. 再观察图 7 给出的在 Kimia-216 形状测试集上的各方法的检索结果曲线可看出: 本文提出的方法在曲线各点上的查准率/查全率要远高于参与比较的其他 3 种方法: RFM^[19], RCF^[21]和 Zernike 矩方法. 这里, RFM 的实验结果则直接引自文献[19], RCF 和 Zernike 矩的实验结果皆直接引自文献[21]. 图 6 和图

7 给出的实验结果一致性地表明,本文提出的 λ -变换在检索性能上要优于参与比较的基于 Radon 变换的方法和经典的 Zernike 矩方法。

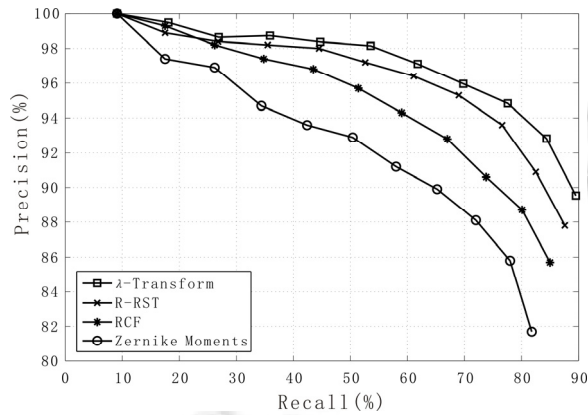


Fig.6 Precision/Recall curves derived from the proposed λ -Transform, the other two Radon transform based methods: RCF^[21] and R-RST^[22], and the classical Zernike moments on the Kimia-99 shape dataset^[24]

图 6 在 Kimia-99 形状测试集^[24],本文提出的 λ -变换与其他两种基于 Radon 变换的方法——RCF^[21]和 R-RST^[22]以及经典的 Zernike 矩方法的查准率/召回率曲线

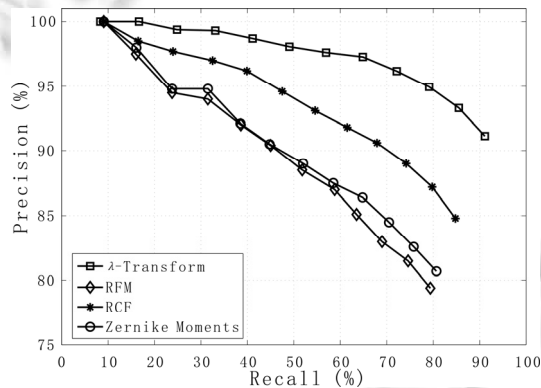


Fig.7 Precision/Recall curves derived from the proposed λ -Transform, the other two Radon transform based methods: RFM^[19] and RCF^[21], and the classical Zernike moments on the Kimia-216 shape dataset^[25]

图 7 在 Kimia-216 形状测试集^[25],本文提出的 λ -变换与其他两种基于 Radon 变换的方法——RFM^[19]和 RCF^[21]以及经典的 Zernike 矩方法的查准率/召回率曲线

3.2 复杂形状测试

另外一组实验是用复杂形状来测试本文提出方法的性能.这里采用是与文献[21]相同的实验方案,该方案从 MPEG-7(CE-2)区域形状测试集中选取了 504 幅形状图像构成了一个复杂形状测试集,其中,所有的样本被分成 24 组,每一组由 21 个相似的形状组成(它包括其中一个样本的 5 个缩放版本、5 个旋转版本和 10 个投射变换版本),图 8 给出了该测试集中的 24 种形状样本,而图 9 给出的是其中一类样本的 21 副图像示例.比较图 8 中的复杂形状与图 4、图 5 中的简单形状可以发现:复杂形状相较于简单形状,其形状区域存在不联通,或在外轮廓所围的区域内有空洞,形状区域有着复杂的内部结构.该形状常见于一些商标、徽标等形状图像应用。

图 10 给出了本文提出的 λ -变换(λ -Transform)、两种基于 Radon 变换的方法——RFM^[19]和 RCF^[21]以及经典的 Zernike 矩方法(Zernike moments)的查准率/召回率曲线,这里,Zernike 和 RCF 的实验结果皆直接引自文献[21].比较图中 3 条曲线的对应各点可以看出:本文提出方法的查准率和查全率均高于其他参与比较的 3 种方法,

当检索返回的形状样本数达到 21 时,其查准率和召回率比其他 3 种方法高出了近 8 个百分点.该实验结果说明,本文提出的方法在检索性能上要远优于参与比较的其他 3 种方法.



Fig.8 24 samples from different classes contained the complex shape dataset^[21]

图 8 复杂形状测试集^[21]中的 24 类形状样本



Fig.9 21 samples from a same class in the complex shape dataset^[21]

图 9 复杂形状测试集^[21]中的一类样本的 21 副图像

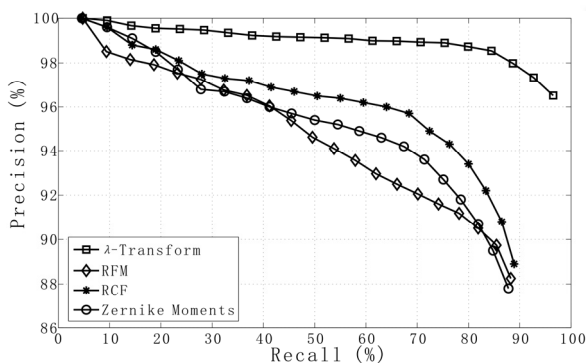


Fig.10 Precision/Recall curves derived from the proposed λ -Transform, the other two Radon transform based methods: RFM^[19] and RCF^[21], and the classical Zernike moments on the complex shape dataset^[21]

图 10 在复杂形状测试集^[21],本文提出的 λ -变换与其他两种基于 Radon 变换的方法——RFM^[19]和 RCF^[21]以及经典的 Zernike 矩方法的查准率/召回率曲线

3.3 噪声干扰测试

为测试本文提出的方法对噪声干扰的鲁棒性,我们采用与文献[21]相同的实验方案.对 Kimia-99^[24]测试集中的每一个样本,加入噪声强度分别为 0.2,0.4,0.6 和 0.8 的椒盐噪声,由此得到 4 个加入了不同噪声强度干扰的形状测试集.图 11 给出了一个原形状样本和其受到不同强度噪声干扰的 4 个样本图像.将本文提出的方法在 4 个噪声干扰的形状测试集分别进行形状检索实验,绘制出相应的查准率/召回率曲线.图 12 分别给出了本文提

出的方法在原 Kimia-99^[24]测试集上和这 4 个噪声干扰的测试集上的查准率/召回率曲线,进行对比.



Fig.11 An original shape (the leftmost figure) from the Kimia-99^[24] dataset and its four versions distorted by salt and pepper noises of different intensities: 0.2, 0.4, 0.6 and 0.8 (the four figures on the right)

图 11 取自 Kimia-99^[24]形状测集中的一个形状样本(最左图)和对其加入了不同强度的椒盐噪声的形状样本(右边 4 图,噪声强度分别为 0.2,0.4,0.6 和 0.8)

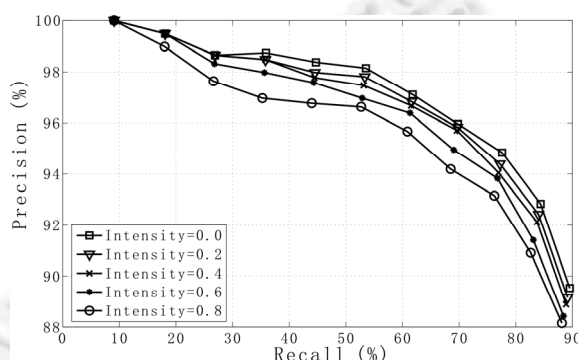


Fig.12 Comparisons of the precision/recall curves derived from the proposed λ -transform on the original Kimia-99 shape dataset^[24] and its four versions distorted by salt and pepper noises of different intensities: 0.2, 0.4, 0.6 and 0.8

图 12 本文提出的方法在原 Kimia-99 形状测试集^[24]形状测试集及其受到不同强度噪声干扰产生的测试集上的查准率/召回率曲线(噪声强度分别为 0.2,0.4,0.6 和 0.8)的比较

从图 12 可以看出,5 条查准率/召回率曲线非常靠近.在噪声强度为 0.2 时,本文提出的方法在曲线上各点的查准率和召回率下降不超过 0.45 个百分点;在噪声强度为 0.4 时,在曲线各点的查准率和召回率下降不超过 0.80 个百分点;而当噪声强度为 0.8 时,在曲线各点的查准率和召回率下降也不超过 2 个百分点.在检索返回的形状样本数达到 11 时,仍然取得了 88.15%的查准率和召回率.该实验结果验证了本文提出的方法对噪声干扰的鲁棒性.

4 结 论

本文提出了一种新的用于形状描述的数学工具—— λ -变换,用于目标的不变识别任务.该变换具有 Radon 变换所不具备的对平移和缩放的不变性,而 Radon 变换的旋转仅发生在角度方向的平移的优良特性,在 λ -变换中得到保持.现有的基于 Radon 变换的形状描述方法,在抽取不变形状特征过程中损失了大量有用的形状信息.而 λ -变换则有效保持了各个方向上的形状的直线积分信息和同方向的直线在形状区域的相对位置关系,从而保证了描述的精确性.此外,由于本文提出的方法与 Radon 变换的方法一样,对形状图像进行直线积分操作,因此能对噪声进行有效的压制,从而具有对噪声干扰的鲁棒性.通过在分属于简单形状和复杂形状的 3 个标准的形状图像测试集上的检索实验得出:本文提出的 λ -变换具有比流行的基于 Radon 变换的形状描述子和经典的 Zernike 矩更高的检索精确率和召回率,从而验证了该方法的有效性.该方法对噪声干扰的稳定性,也通过实验得到了验证.值得指出的是, λ -变换不仅适用于目标形状识别任务,还具有应用于形状分析的其他问题的潜力,如目标形状的对称性分析、方向检测等.

References:

- [1] Korn P, Sidiropoulos N, Faloutsos C, Siegel E, Protopapas Z. Fast and effective retrieval of medical tumor shapes. *IEEE Trans. on Knowledge and Data Engineering*, 1998,10(6):889–904. [doi: 10.1109/69.738356]
- [2] Wang B. A Fourier shape descriptor based on multi-level chord length function. *Chinese Journal of Computers*, 2010,33(12): 2387–2396 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3724/SP.J.1016.2010.02387]
- [3] Horaisova K, Kukal J. Leaf classification from binary image via artificial intelligence. *Biosystems Engineering*, 2016,142:83–100. [doi: 10.1016/j.biosystemseng.2015.12.007]
- [4] Li J, Narayanan RM. A shape-based approach to change detection of lakes using time series remote sensing images. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, 2003,41(11):2466–2477. [doi: 10.1109/TGRS.2003.817267]
- [5] Yap PT, Jiang X, Kot AC. Two-Dimensional polar harmonic transforms for invariant image representation. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2010,32(7):1259–1270. [doi: 10.1109/TPAMI.2009.119]
- [6] Wei CH, Li Y, Chau WY, Li CT. Trademark image retrieval using synthetic features for describing global shape and interior structure. *Pattern Recognition*, 2009,42(3):386–394. [doi: 10.1016/j.patcog.2008.08.019]
- [7] Wang B, Gao Y. Hierarchical string cuts: a translation, rotation, scale and mirror invariant descriptor for fast shape retrieval. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2014,23(9):4101–4111. [doi: 10.1109/TIP.2014.2343457]
- [8] Petrakis EGM, Diplaros A, Millos E. Matching and retrieval of distorted and occluded shapes using dynamic programming. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2002,24(11):1501–1516. [doi: 10.1109/TPAMI.2002.1046166]
- [9] Loncaric S. A survey of shape analysis techniques. *Pattern Recognition*, 1998,31(8):983–1001. [doi: 10.1016/S0031-2023(97)00122-2]
- [10] Zhang D, Lu G. Review of shape representation and description techniques. *Pattern Recognition*, 2004,37(1):1–19. [doi: 10.1016/j.patcog.2003.07.008]
- [11] Zhou Y, Liu J, Bai X. Research and perspective on shape matching. *ACTA Automatica Sinica*, 2012,38(6):889–910 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3724/SP.J.1004.2012.00889]
- [12] Deans SR. *The Radon Transform and Some of Its Applications*. 2nd ed., New York: Dover Publications, Inc., 2007. 187–198.
- [13] Tabbone S, Wendling L, Salmon J. A new shape descriptor defined on the radon transform. *Computer Vision and Image Understanding*, 2006,102(1):42–51. [doi: 10.1016/j.cviu.2005.06.005]
- [14] Hoang TV, Tabbone S. The generalization of the R-transform for invariant pattern representation. *Pattern Recognition*, 2012,45(6): 2145–2163. [doi: 10.1016/j.patcog.2011.11.007]
- [15] Wang Y, Huang K, Tan T. Human activity recognition based on R transform. In: *Proc. of the IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2007. 1–8. [doi: 10.1109/CVPR.2007.383505]
- [16] Khan ZA, Sohn W. Abnormal human activity recognition system based on R-transform and kernel discriminant technique for elderly home care. *IEEE Trans. on Consumer Electronics*, 2011,57(4):1843–1850. [doi: 10.1109/TCE.2011.6131162]
- [17] Chen GY, Bui TD, Krzyżak A. Invariant pattern recognition using radon, dual-tree complex wavelet and Fourier transforms. *Pattern Recognition*, 2009,42(9):2013–2019. [doi: 10.1016/j.patcog.2008.10.008]
- [18] Wang X, Xiao B, MA JF, Bi XL. Scaling and rotation invariant analysis approach to object recognition based on Radon and Fourier-Mellin transforms. *Pattern Recognition*, 2007,40(12):3503–3508. [doi: 10.1016/j.patcog.2007.04.020]
- [19] Hoang TV, Tabbone S. Invariant pattern recognition using the RFM descriptor. *Pattern Recognition*, 2012,45(1):271–284. [doi: 10.1016/j.patcog.2011.06.020]
- [20] Xiao B, Ma JF, Cui JT. Combined blur, translation, scale and rotation invariant image recognition by Radon and pseudo-Fourier-Mellin transforms. *Pattern Recognition*, 2012,45(1):314–321. [doi: 10.1016/j.patcog.2011.06.017]
- [21] Chen YW, Chen YQ. Invariant description and retrieval of planar shapes using Radon composite Features. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2008,56(10):4762–4771. [doi: 10.1109/TSP.2008.926692]
- [22] Nacereddine N, Tabbone S, Ziou D. Similarity transformation parameters recovery based on Radon transform. Application in image registration and object recognition. *Pattern Recognition*, 2015,48(7):2227–2240. [doi: 10.1016/j.patcog.2015.01.017]
- [23] Khotanzad A, Hong YH. Invariant image recognition in Zernike moments. *IEEE Trans. on Pattern Analysis Machine Intelligence*, 1990, 12(5):250–261. [doi: 10.1109/34.55109]

- [24] Sharvit D, Chan J, Tek H, Kimia BB. Symmetry-Based indexing of image database. *Journal of Visual Communication & Image Representation*, 1998,12(4):366–380. [doi: 10.1006/jvci.1998.0396]
- [25] Sebastian TB, Klein PN, Kimia BB. Recognition of shapes by editing their shock graphs. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004,26(5):550–571. [doi: 10.1109/TPAMI.2004.1273924]

附中文参考文献:

- [2] 王斌.一种基于多级弦长函数的傅里叶形状描述子. *计算机学报*, 2010,33(12):2387–2396. [doi: 10.3724/SP.J.1016.2010.02387]
- [11] 周瑜,刘俊涛,白翔.形状匹配方法研究与展望. *自动化学报*, 2012,38(6):889–910. [doi: 10.3724/SP.J.1004.2012.00889]



王斌(1969—),男,湖北汉川人,博士,教授,
CCF 高级会员,主要研究领域为计算机视
觉,图像处理,模式识别.