ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.19, No.3, March 2008, pp.492−499
DOI: 10.3724/SP.J.1001.2008.00492

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

最大简单共享问题的快速近似算法*

李　建+, 张　韬, 谢之易, 朱　洪

(复旦大学 计算机科学与工程系,上海 200433)

An Efficient Approximation Algorithm for Maximum Simple Sharing Problem

LI Jian+, ZHANG Tao, XIE Zhi-Yi, ZHU Hong

(Department of Computer Science and Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-21-55075121, E-mail: lijian83@fudan.edu.cn, http://homepage.fudan.edu.cn/~lijian

Li J, Zhang T, Xie ZY, Zhu H. An efficient approximation algorithm for maximum simple sharing problem. *Journal of Software*, 2008,19(3):492−499. http://www.jos.org.cn/1000-9825/19/492.htm

Abstract: This paper introduces a crossing elimination model based on a node duplication method and the authors want to minimize the number of duplication. It is related with an artificial problem, called the maximum simple sharing problem. First it is proved to be NP-hard, then a simple greedy algorithm which achieves an approximation factor of 3. Next the maximum disjoint simple sharing problem is introduced, which is naturally a 2-approximation of the maximum simple sharing problem, and the paper shows that this problem can be solved optimally by reducing to the perfect matching problem in a series of carefully constructed graphs. At last, the approximation factor is further improved to 12/7 with a local search technique.
Key words: approximation algorithm; crossing elimination; node duplication; NP-hard; maximum simple sharing

摘　要: 介绍了一种基于复制结点的消除线路交叉的模型.该模型提出了一个优化问题,就是最小化结点复制的数量.同时提出一个自定义问题——“最大简单共享问题”,并证明最小化结点复制的数量与最大共享问题是等价的.证明了最大简单共享问题是NP-hard的,给出了一种简单的贪心算法,并证明该贪心算法的近似度为3.引入一个“最大互斥简单共享问题”,该问题是最大简单共享问题的 2-近似.将其转化为在一系列图上的完美匹配问题,使该问题可以在多项式时间内得到完美解决.最后,在最大互斥简单共享的基础上,用局部搜索的方法将近似度提高到12/7.
关键词: 近似算法;线路交叉;结点复制;NP-难;最大简单共享
中图法分类号: TP301　　**文献标识码**: A

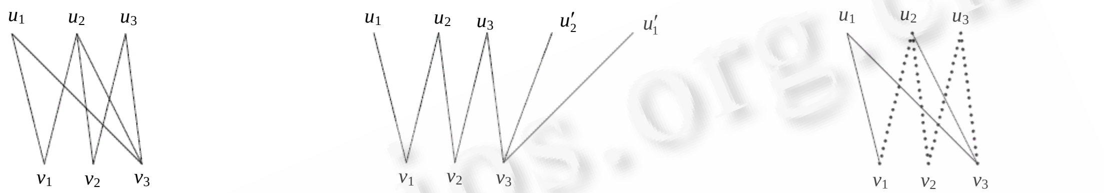
在一些电路设计问题中,实现线路交叉不仅难以实现而且代价非常昂贵.例如,在分子级量子元胞机(quantum dot cellular automata,简称QCA)线路中[1−3],实现线路交叉对化学家来说是非常困难的事情(至少目前来说是这样)[5],因为QCA线路的逻辑操作和数据传输是通过库仑作用而不是电流.有大量的关于设计QCA设备的研究工作见文献[1−3,5].消除线路交叉在二元决策图表(binary decision diagram,简称BDD)的物理综合中也有应用.无线路交叉的有序BDD可被用来克服由Cao和Koh提出的计时封闭问题[6].另外,还有许多关于在电

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60496321 (国家自然科学基金); the Shanghai Science and Technology Development Fund of China under Grant No.O3JC14014 (上海市科技发展基金)

Received 2006-03-29; Accepted 2007-01-23

路布线中最小化线路交叉数的理论与实际应用的研究工作,见文献[7].

在我们的模型中,线路可以表示成一个二分图 $G(U,V;E)$.数据从 U 中的结点被传输到 V 中的结点.U 和 V 中的结点都被安排在两条平行的直线上,一条安排 U 中的结点,一条安排 V 中的结点,线路必须从两条直线之间的区域经过.我们只能复制 U 中的结点来消除线路交叉.另外,我们可以指定 U 和 V 中结点的顺序.还有一个约束:被复制出来的结点的连接能力是有限的,这样一个结点只能连接 V 中的一个结点,但原来 U 中的结点可以连接任意数量的 V 中的结点.在很多实际情况下,我们只复制原始点的一部分功能,因此要求这个约束成立[5].图 1(a)、图 1(b)是我们基于复制结点方法来解决线路交叉问题的一个实例.结点复制的代价一般很大,因此,我们的目标是最小化结点复制的数量.



(a) 原来的二分图 G
(a) Original bipartite graph G

(b) G 的布局.我们复制 u_1 和 u_2 来消除所有线路交叉
(b) The layout of G. We duplicate u_1 and u_2 to eliminate all wire cross

(c) 虚线是一条包含两个共享的简单路径
(c) Dotted line is a simple path containing two sharing

Fig.1
图 1

在第 1 节中,我们引入了最大简单共享问题(maximum simple sharing,简称 MSS),并证明最小化结点复制的数量和 MSS 问题是等价的.然后,我们专注于 MSS 问题.在第 2.1 节,我们证明 MSS 问题是 NP-hard 的.因此,该问题不可能在多项式时间内得到最优值,除非 $P=NP$.因此,我们将目标放到设计多项式时间的近似算法上面.首先,回忆一下近似度的概念.我们称一个最大化问题有α-近似,如果存在一种算法使得该问题的最优解最多是算法得到的解的α倍,同时,我们称这种算法是该问题的一种有α近似度的近似算法[8].本文第 2.2 节,给出了一种简单的有着 3 倍近似度的贪心算法.在第 2.3 节,我们引入了一个被称为最大互斥简单共享的问题.该问题的最优解是 MSS 问题的一个 2-近似,有趣的是,通过构造一组图,并且在这组图上求完美匹配问题,可以在多项式时间内解决该问题.在第 2.4 节,我们应用局部搜索的算法将近似度最后提高到 12/7.最后,我们总结了所做的工作并提出了进一步的研究方向.

需要指出的是,我们的问题是文献[4]提出的 NDCE 问题的一个变种.他们的模型是通过结点复制的方法来消除线路交叉,但前提假设是被复制出来的结点与原结点具有同样的连接能力.他们将问题等价为一个“最大共享问题(maximum sharing problem)”[4,9].该问题与我们这里提出的最大简单共享问题很类似,这个问题也是 NP-hard 的.但两个问题的组合结构有着本质的不同,因此,在设计近似算法方面用到的方法也是完全不同的.最大共享问题可以通过一种类似图的路径覆盖的方法得到一个 3/2 近似度的近似算法[9].

1 最小化结点复制个数与 MSS 问题的等价性

本节将引入最小结点复制个数问题和 MSS 问题的形式定义,并证明二者实际上是等价的.

定义 1(**最小结点复制个数问题**). 给定一个二分图 $G(U,V;E)$,最少复制多少个 U 中的结点,可(在适当指定 U 和 V 中结点的相对顺序后)消除 G 中所有的边交叉?

其中,边交叉是指由于 G 中的边必须从 U,V 所在的两条直线间经过,而 U,V 中结点的任何排列顺序都不能避免有边相交的情况.所谓复制是指在 U 中加入新结点,且每个新结点只能连接一条边到 V.我们说复制结点 u,是指在 U 中加入一个新结点 u',连接一条原来连接到 u 的边,而 u 则不再连接此边(如图 1(b)所示).

定义 2(**简单共享**). 给定一个二分图 $G(U,V;E)$,一个简单共享(simple sharing)是两条相邻的边(u,v)和(u,w),这里 $u\in U$ 且 $v,w\in V$.

例如,一条两个端点在 V 中的长度为 k 的简单路包含 $k/2$ 个简单共享.以后,我们用 $((u,v)(u,w))$ 来记一个简单共享.

定义 3(最大简单共享问题). 给定一个二分图 $G(U,V;E)$,找到一组两个端点在 V 中的点互不相交的简单路,使得这些路中包含的简单共享最多.

图 1(c)中显示了一个图中的两个简单共享.为方便起见,以后我们提到一条路时,都是指两个端点在 V 中的路.我们有时称 U 中的结点为上结点,称 V 中的结点为下结点.

下面来证明这两个问题的等价性.

不失一般性,我们假设图 G 中每个结点的度数都是大于等于 2 的.

事实上,度数为 1 的结点可以很容易地被插入到最后布局的某些地方而不引起线路交叉.因此,给定一个图时,我们可以先去掉度数为 1 的结点,当布局完成时,再插入度数为 1 的结点.

定理 1. 给定一个二分图 $G(U,V;E)$,其中,每个顶点的度数都至少是 2,则有:存在一个 MSS 问题的解包含 m 个简单共享,当且仅当我们能够通过复制 $|E|-|U|-m$ 个 U 中的结点来消除所有线路交叉.

证明:记这个无交叉的线路布局为 $G'(U',V';E')$.U' 包含 $|U|$ 个原来的结点和后来加进去复制的结点.V' 中的结点与 V 中一样.一方面我们可以看到,若所有 U' 中的结点的度数都为 1,则(适当排序后)一定无交叉.所以,我们可以平凡地通过复制 $|E|-|U|$ 个结点来解决问题,即对于每条边都对应一个 U' 中的结点.因为原来有 $|U|$ 个结点,那么,我们需要复制 $|E|-|U|$ 个结点.这样,U' 中的每个点的度数都为 1.但是,显然这不是最优解,因为原来的 $|U|$ 个结点可以有更强的连接能力,因此,我们可以让它们连接更多的点来减少结点复制的个数.现在,如果在 G 中有 m 个简单共享,我们可以将这 m 对 V 中的点连续地摆放,使得相邻的点有一个 U' 中的公共邻居,即出现一个简单共享.一个简单共享可以减少一个复制,所以,我们一共可以减少 m 个复制.注意到这 m 个共享是 MSS 问题的解,而解中属于不同简单路的共享没有公共结点,故仍不存在交叉.欲证另一方向,首先我们看到:

观察 1. U' 中的结点度数最多为 2.

这是因为我们不能复制 V 中的结点且 V 中点的度数均大于等于 2,所以,若 U' 中有一点度数大于 2,则肯定会出现线路交叉.

如果 G 能够通过复制 $|E|-|U|-m$ 个 U 中的结点来消除所有线路交叉,则必存在 m 个度数为 2 的上结点(由观察 1).另外,我们很容易发现,若 3 个共享有一个公共下结点,则必产生交叉,所以,由这些度数为 2 的上结点所形成的 m 个共享必构成 MSS 问题的解. □

如图 1(c)所示,G 中有 2 个简单共享,我们通过复制 $|E|-|U|-m=7-3-2=2$ 个结点消除了所有的线路交叉.现在最小化结点复制与 MSS 问题的等价性已经由定理 1 建立起来了.

下面我们将专注于解决 MSS 问题.

2 最大简单共享问题

首先证明 MSS 问题是 NP-hard 的.然后,我们给出一种简单的贪心算法,并证明它能够达到的近似度为 3,并引入一个称为最大互斥简单共享(maximum disjoint simple sharing,简称 MDSS)问题.该问题的最优解是 MSS 问题的一个 2-近似.我们将设计一个多项式时间算法,最优地解决 MDSS 问题;最后,我们用局部搜索的方法将近似度提高到 12/7.

2.1 MSS问题是NP-hard问题

定理 2. MSS 问题是一个 NP-hard 问题.

证明:首先给出 MSS 问题的判定问题版本:给定一个二分图 $G(U,V;E)$ 和一个给定的参数 k,问是否存在一系列点不相交的简单路,它们包含至少 k 个简单共享.我们将著名的 NP-Complete 问题——哈密尔顿路问题(Hamitonian path problem)[10]规约到该问题.哈密尔顿问题是这样的:给定一个图 $G(V,E)$,是否存在一条简单路通过所有结点 1 次且仅 1 次.现在我们来构造一个 MSS 问题的实例 $G'(U',V';E')$.对于 G 的每条边,我们将其打断成 2 条边,并插入一个新结点连接这两条边.令 V' 为原图 G 的点集,U' 为新插入点的集合,容易看到,G' 是一个二

分图,因为每条边的一个端点在 V'中,另一个端点在 U'中.一个关键的观察是,G 有一条哈密尔顿路当且仅当 G' 有$|V|-1$ 个简单共享.另外,G'最多有$|V|-1$ 个简单共享.因此,我们令参数 $k=|V|-1$,即完成证明. □

2.2 一种简单的贪心算法:3-近似

我们先给出算法描述,然后在定理 3 中分析它的近似度.

算法 1. 贪心拓展.

初始时,记所有结点为未被使用过的结点.

不断进行下面的操作直到什么都不能做为止:

  在由所有未被使用过的结点诱导的子图中,选择一个 V 中的结点 v,

  向两个方向任意拓展一条简单路径,直到不能拓展为止.

  将这条路径上的所有点标记为使用过的结点.

定理 3. 对 MSS 问题,贪心拓展算法能够达到 3 倍的近似度.

证明:当算法停止时,原图的点集很自然地被划分为 4 部分,A,B,C 和 D,这里,$U=A\cup B,V=C\cup D$,并且 A 和 C 中都是使用过的结点.显然,$B\cup D$ 诱导的子图不包含任何简单共享,否则,算法能够继续拓展而不会停止.我们称算法找到的每条路径的两个 C 中端点为外点,其他 C 中的结点为内点,而 D 中的结点为无关点.记 $OPT(G)$为 MSS 问题的一个最优解.记$|OPT(G)|$为最优解的值,即包含的简单共享数,也即 OPT 中上结点的个数.

由上面的定义,贪心算法得到的简单共享的数量为$|A|$,所以,我们的任务就是证明$|OPT|\le 3|A|$.为方便起见,我们权且用$B\cup V$来代表$B\cup V$诱导的子图.首先,注意到$|OPT(G)|\le|A|+|OPT(B\cup V)|$,这是因为这两个最优解可能会有点的相交.假设拓展了 m 条路径,我们将证明$|OPT(B\cup V)|\le 2|A|-m\le 2|A|$,因此有$|OPT|\le|A|+|OPT(B\cup V)|\le 3|A|$,这样就可以完成证明.

现在来证$|OPT(B\cup V)|\le 2|A|-m$.首先我们看到:

观察 2. $OPT(B\cup V)$中的任何共享的两个下结点必为两种情况之一:

(1) 为同一条路的两个外点;

(2) 至少有 1 个是内点.

如果一个是外点,另一个是无关点,或者是两个属于不同路的外点,则贪心算法必已拓展了此共享,故不可能属于 $OPT(B\cup V)$.

观察 3. C 中共有$|A|-m$ 个内点.

前面假设贪心算法的解中有 m 条路径,所以,$|C|=|A|+m$;$|A|-m$ 个为内点,$2m$ 个为外点.

由于只有 m 条路,$OPT(B\cup V)$中最多只有 m 个共享是第 1 种情况.其余共享的两个下结点必有 1 个是内点,也就是说,每个内点最多"贡献"$OPT(B\cup V)$中的 2 个共享;又因为 C 中只有$|A|-m$ 个内点,所以,其余的共享顶多只有 $2(|A|-m)$个.综上,$OPT(B\cup V)$最多包含 $2|A|-m$ 个简单共享,即$|OPT(B\cup V)|\le 2|A|-m$. □

作为一个具体的例子,我们来看图 2.

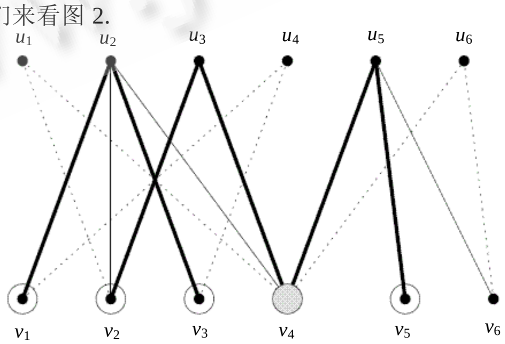


Fig.2 A solution obtained by greedy algorithm

图 2 贪心算法可能得到的一个解

其中,$A=\{u_2,u_3,u_5\}$,$C=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$.粗线部分是贪心算法得到的解,共有 2 条简单路,$m=2$,故$|C|=3+2=5$,其中,3–2=1 个为内点(实心圈),2×2=4 个为外点(空心圈).虚线部分则是 $OPT(B\cup V)$,而$|OPT(B\cup V)|=3<2\times 3-2$.

定理 4. 贪心拓展算法的运行时间是 $O(|E|)$.

证明:在算法运行过程中,每条边最多被访问 1 次.这是由于当我们的算法在考察某一上结点是否可拓展时,一旦发现一个相邻的未访问下节点,便会立即拓展路径并标记为已访问;下次该上结点再被访问时,只可能是通过一条未访问过的边,且由于该上结点已标记为已访问,故不会再继续考察它的邻边.另外,算法的初始化所需的时间为 $O(|U|+|V|)$;又$|U|,|V|\le|E|$,故为 $O(|E|)$. □

在下文中,我们称一个不能被贪心拓展算法直接拓展的解为不可拓展解.即如果不破坏当前找到的路径,不可拓展解不能通过简单的加边使得简单共享数增多;否则,我们称一个解为可拓展解.容易看到,贪心拓展算法得到的为不可拓展解,且我们可以用贪心拓展算法在多项式时间内将任意一个解拓展为不可拓展解.

2.3 最大互斥简单共享问题:2-近似

我们先引入最大互斥简单共享问题(maximum disjoint simple sharing,简称 MDSS).“互斥简单共享”意味着每个简单共享是点不相交的,也就是说,要求我们找到一系列长度为 2 的简单路.如图 3 的左面所示,虚线表示了 2 个互斥简单共享.我们的目标仍然是找到最大数量的简单共享数.很容易看到,MDSS 问题的最优解是 MSS 问题的一个显然的 2-近似.下面我们介绍 MDSS 问题的算法.

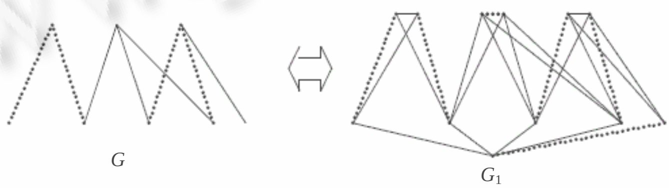


Fig.3 An MDSS in G and its corresponding maximum weight perfect matching in G_1

图 3 G 中 MDSS 和 G_1 中的一个最大权完美匹配的对应关系

算法 2. MDSS 的算法.

对于每个点 $u\in U$,我们将其分成 2 个点 u 和 u',并添加一条权重为 0 的边将它们连接起来.u 和 u'邻接的 V 中的点集和原来一样,且这些边的权重都为 0.5.我们称当前的图为 G_0.然后,我们向 G_0 中添加一个邻接 V 中所有结点的点 w_1,这些边的权重为 0.我们称得到的图为 G_1.不断地添加这样的点得到 $G_2,G_3,\ldots,G_{|V|}$.我们用图 4 给出了这个构造的一个例子.按顺序在 $G_0,G_1,\ldots,G_{|V|}$上运行最大权完美匹配算法.假设 G_k 有一个权重为 W_k 的最大权完美匹配(某些 G_i 将不包含完美匹配,这时,我们令 $W_k=0$).令 $W=\max_k(W_k)$.可以证明最大互斥简单共享的数量为 W.

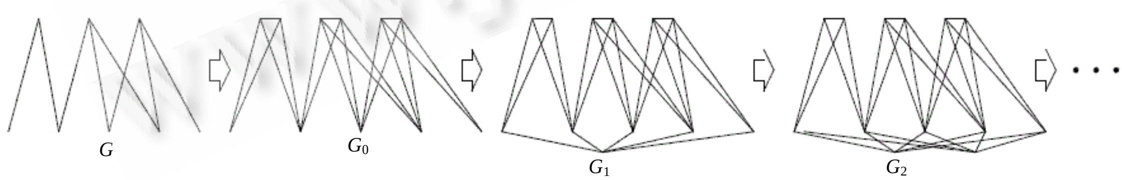


Fig.4 The construction of G_i

图 4 G_i 的构造

我们通过证明一些引理来说明这一算法的正确性.

引理 1. 如果 G_i 有一个完美匹配,u 和 u'(从原来的图 G 中的 u 点分出来的两个结点)或者由边(u,u')来匹配,或者由边(u,v_1)和(u',v_2)来匹配,这里,$v_1,v_2\in V$ 且 $v_1\ne v_2$.

引理 2. 如果 G_i 有一个权重为 W_i 的完美匹配 M_i,那么,G 有 W_i 个互斥简单共享.

证明:由引理 1,如果 M_i 包含边(u,v_1)和(u',v_2),这里,$v_1,v_2\in V$ 且 $v_1\neq v_2$,我们在 G 中构造一个简单共享$((u,v_1),(u,v_2))$.很容易看到,我们构造的这些共享是互斥的,并且我们得到 W_i 个这样的简单共享. □

引理 3. 如果 G 有 W 个互斥简单共享,则 $G_{|V|-2W}$ 有一个权重为 W 的完美匹配 M.

证明:考虑 $G_{|V|-2W}$,我们将从 G 中的 W 个互斥简单共享构造出在 $G_{|V|-2W}$ 中的一个权重为 W 的完美匹配 M.如果 G 中有一个简单共享$((u,v_1)(u,v_2))$,我们添加两条边(u,v_1)和(u',v_2)作为匹配 M 的边.如果 $u\in U(\in G)$没有参与到任何互斥简单共享中,则添加边(u,u')到匹配 M 中.这样,在 V 中还剩下$|V|-2W$ 个没有被匹配的点,但它们恰好可以被$|V|-2W$ 个后来加进去的点所匹配.容易看到,我们加的边形成一个完美匹配且有权重和为 W. □

图 3 说明了 G 中 MDSS 和 G_1 中的一个最大权完美匹配的对应关系(G 中的虚线为 MDSS 问题的一个解,而 G_1 中的虚线为一个最大权完美匹配).

我们知道,n 个结点的一般图上的最大权完美匹配问题有 $O(n^3)$时间的算法.而且对于在原图基础上加上一个结点和一些与其相邻的边所构成的新图,只需 $O(n^2)$时间就可得到其上的最大权完美匹配问题的解.这恰好适用于我们的算法.所以有以下结论:

定理 5. 对 MDSS 问题,上述算法可以在 $O(|U|+|V|)^3$ 时间内求出最优解.

推论 1. MSS 问题存在一个近似度为 2 的 $O(|U|+|V|)^3$ 时间近似算法.

2.4 用局部搜索算法将近似度提高到12/7

同样地,我们先给出局部搜索算法的描述,然后再分析其近似度.

算法 3. 局部搜索.

步骤 1. 先用算法 2 得到 MDSS 问题的一个解;

步骤 2. 将当前解拓展成一个不可拓展解;

步骤 3. 对于每个“孤立的”简单共享(即一个没有被包含在长度大于 2 的路中的简单共享)$((u,v),(u,w))$,对每个 U 中没有被使用的点 u',我们将这个共享的顶点 u 换到 u'(即新的简单共享变成$((u',v)(u',w))$).如果当前解为可拓展解,那么转步骤 2;如果已不存在孤立的简单共享或对于任意一个孤立的简单共享和未被使用的上结点的组合,当前解都是不可拓展的,那么算法停止.

定理 6. 上述算法的运行时间最多是 $O(|U||E|)$.

证明:首先我们注意到,只有不到$|U|$个孤立的共享可用于拓展.其次,由于在做交换之前,步骤 2 已将解拓展成不可拓展解了,故可能的拓展只能是通过原上结点的其他邻边来进行.这就意味着,对每个共享只需尝试 1 次交换拓展(无论成功与否);若失败,则即使换其他上结点也一样不能拓展.若成功,则可接着考虑下一个孤立共享.所以,上述算法顶多拓展$|U|$次,而每次拓展的时间不超过 $O(|E|)$(由定理 4),故定理得证. □

定理 7. 对 MSS 问题,局部搜索算法可以达到 12/7 的近似度.

证明:我们记 MSS 的最优解为 OPT,OPT_D 为 MDSS 问题的最优解,我们算法得到的解为 SOL.假设 SOL 是 MSS 问题的一个β近似,即$|OPT|=\beta|SOL|$,显然,这里β最多为 2.假设$|SOL|=(1+\alpha)|OPT_D|$,即在步骤 2 和步骤 3 中添加了$\alpha|OPT_D|$个简单共享到 MDSS 的最优解中.很容易看到,在 SOL 中,最多有 $2\alpha|OPT_D|$个内点和$\alpha|OPT_D|$个长度超过 2 个简单路径.我们的思路是,通过分析$|SOL|$和$|OPT|$的关系来得到α和β的不等式,从而用α来限定β的范围.首先,我们将在后面证明

$$5\alpha|OPT_D|\geq(\beta-1)|SOL| \tag{1}$$

通过将右面的$|SOL|$替换为$(1+\alpha)|OPT_D|$,就得到 $5\alpha\geq(\beta-1)(1+\alpha)$,所以,

$$\beta\leq\frac{6\alpha+1}{1+\alpha} \tag{2}$$

另一方面,因为$|OPT_D|\geq\frac{1}{2}|OPT|$,故 $|SOL|=(1+\alpha)|OPT_D|\geq\frac{(1+\alpha)|OPT|}{2}=\frac{(1+\alpha)\beta}{2}$.

于是,我们又有

$$\beta \le \frac{2}{1+\alpha} \tag{3}$$

由式(2)、式(3),

$$\beta = \min\left\{\frac{6\alpha+1}{1+\alpha}, \frac{2}{(1+\alpha)} \mid \alpha \ge 0\right\},$$

右边在α=1/6 时取最大值,于是就得到了$\beta \le 12/7$.

现在来证明式(1).我们的思路仍是利用 *OPT* 中上结点与 *SOL* 中内点的关系来进行分析.回忆 *SOL* 中的每条路径的两个端点,我们称为外点,这些路径中的其他结点称为内点,*V* 中没有出现在路径上的点为无关点.如果 *OPT* 中有一个简单共享((u,v)(u,w)),我们称 *u* *OPT*-连接 *v* 和 *w*,以及 *v* 和 *w* *OPT*-连接 *u*.

在 *U* 中,记出现在 *OPT* 中但未出现在 *SOL* 中的点集为 *OPT\SOL*.类似地,在 *SOL* 中出现但未在 *OPT* 中出现的点集为 *SOL\OPT*.现在,我们将 *OPT\SOL* 中的结点分成 4 类(如图 5 所示).

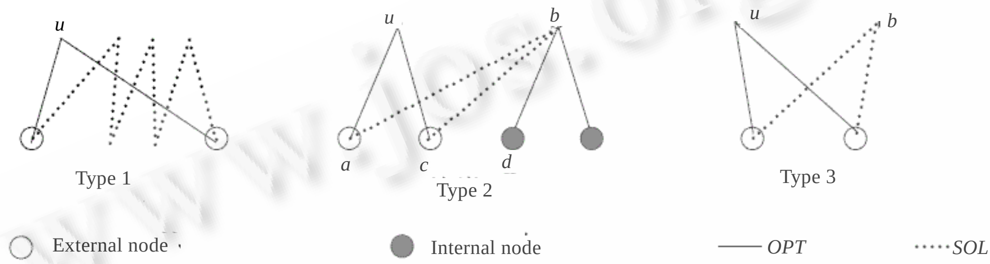


Fig.5 First three types of nodes in *OPT\SOL*

图 5 *OPT\SOL* 中的前 3 类点

种类 1. $u \in OPT\backslash SOL$ *OPT*-连接到两个外点,且这两个外点是 *SOL* 中一条长度至少是 4 的路径的两个端点.

种类 2. $u \in OPT\backslash SOL$ *OPT*-连接到两个外点,且这两个外点是 *SOL* 中一条长度为 2 的路径 $P=\{a,b,c\}$的端点,且 $b \in OPT$.我们断言,除了 *a* 点和 *c* 点外,*b* 点连接的所有点都为内点.否则,假设 *b* 连接了一个结点 *d* 且 *d* 不是内点,那么,在我们算法的某一个循环的步骤 2 中,我们会将简单共享((b,a)(b,c))交换到((u,a)(u,c)),这样,当前解就不是一个不可拓展解了,因为我们可以通过加入((b,a)(b,d))或((b,c)(b,d))来拓展当前解,因此产生了矛盾.现在,我们将 *u* 分配给 *b* *OPT*-连接的一个内点 *d*(如果存在的话).我们称通过 *b* 将 *u* 分配给 *d*.

种类 3. $u \in OPT\backslash SOL$ *OPT*-连接到两个外点,且这两个外点是 *SOL* 中一条长度为 2 的路径 $P=\{a,b,c\}$的两个端点,且 $b \notin OPT$.

种类 4. $u \in OPT\backslash SOL$ *OPT*-连接到至少 1 个内点 *i*.我们将 *u* 分配给 *i*.这一次,我们称通过 *u* 将 *u* 分配给 *i*.

注意到不会有其他种类存在,这是因为,如果一个点 $u \in OPT\backslash SOL$ *OPT*-连接了一个外点 *v*、一个无关点 *w*,那么,我们就能够加入一个简单共享((u,v)(u,w))来拓展当前解,与我们得到了一个不可拓展解相矛盾.

因为$|OPT\backslash SOL|+|SOL|=|SOL\backslash OPT|+|OPT|$,我们可以得到$|OPT\backslash SOL|=(\beta-1)|SOL|+|SOL\backslash OPT|$.现在,记种类 *i* 中的结点个数为 k_i,则 $k_1+k_2+k_3+k_4=|OPT\backslash SOL|=(\beta-1)|SOL|+|SOL\backslash OPT|$.同时可以发现,$k_3 \le |SOL\backslash OPT|$,因此,就得到了$k_1+k_2+k_4 \ge (\beta-1)|SOL|$.另一方面,前面提到至多存在$\alpha|OPT_D|$条长度大于 2 的路径,所以 $k_1 \le \alpha|OPT_D|$.现在,我们只要找 k_2+k_4 的上界就行了,注意到:

引理 4. 每个内点可以分配到最多 2 个 *OPT\SOL* 中的结点.

证明:考虑一个内点 *i*,它最多 *OPT*-连接两个点 *a* 和 *b*.通过观察可以发现,*OPT\SOL* 中最多各有 1 个点可以分别通过 *a* 和 *b* 分配给 *I*,并且不可能通过其他非 *a* 和 *b* 的点将任何结点分配给 *i*. □

我们曾提到最多会有 $2\alpha|OPT_D|$个内点,通过引理 4,则有 $k_2+k_4 \le 4\alpha|OPT_D|$,所以

$$5\alpha|OPT_D| \ge k_1+k_2+k_4 \ge (\beta-1)|SOL|.$$ □

3 结 论

本文介绍了一种通过结点复制来消除线路交叉的方法,并证明了最小化结点的复制数量实际上与 MSS 问题是等价的.我们证明了 MSS 的 NP 难解性,并给出了若干近似算法,我们得到的目前最好的算法能够达到 12/7 的近似度.该问题是否有更好近似度的近似算法和问题的不可近似性还有待进一步研究.

References:

[1] Antonelli DA, Chen DZ, Dysart TJ, Hu XS, Khang AB, Kogge PM, Murphy RC, Niemier MT. Quantum-Dot cellular automata (QCA) circuit partitioning: Problem modeling and solutions. In: Proc. of the 41st ACM/IEEE Design Automation Conf. (DAC). 2004. 363−368.

[2] Niemier MT, Kogge PM. Exploring and exploiting wire-level pipelining in emerging technologies. In: Proc. of the 28th Annual Int'l Symp. on Computer Architecture. 2001. 166−177.

[3] Tougaw PD, Lent CS. Logical devices implemented using quantum cellular automata. Journal of Applied Physics, 1994,75:1818.

[4] Chaudhary A, Chen DZ, Hu XS, Niemier MT, Ravinchandran R, Whitton KM. Eliminating Wire crossings for molecular quantum-dot cellular automata implementation. In: Proc. of the IEEE/ACM Int'l Conf. on Computer-Aided Design. 2005. 565−571.

[5] Amlani I, Orlov A, Snider GL, Lent CS. Demonstration of a functional quantum-dot cellular automata cell. Journal of Vacuum Science and Technology B, 1998,16:3795−3799.

[6] Cao A, Koh CK. Non-Crossing ordered BDD for physical synthesis of regular circuit structure. In: Proc. of the Int'l Workshop on Logic and Synthesis. 2003. 200−206.

[7] Shahrokhi F, Sykora O, Szely LA, Vrto I. Crossing number: Bounds and applications. In: Barany I, Boroczky K, eds. Proc. of the Intuitive Geometry, Bolyai Society Mathematical Studies 6. 1997. 179−206.

[8] Vazirani VV. Approximation Algorithms. Springer-Verlag, 2001.

[9] Li J, Chaudhary A, Chen DZ, Fleisher R, Hu XS, Niemier MT, Xie Z, Zhu H. Approximating the Maximum Sharing Problem. In: Proc. of 10th Workshop on Algorithms and Data Structures. 2007. 52−63.

[10] Garey MR, Johnson DS. Computers and Intractability—A Guide to the Theory of NP-Completeness. New York: W. H. Freeman and Company, 1979.

李建(1983－),男,河北青苑人,硕士生,主要研究领域为算法与计算复杂性.

张韬(1982－),男,硕士生,主要研究领域为算法.

谢之易(1977－),男,硕士生,主要研究领域为算法与计算复杂性.

朱洪(1939－),男,教授,博士生导师,主要研究领域为算法与复杂性,量子计算,计算密码学.