

模糊商空间理论(模糊粒度计算方法)*

张铃^{1,2+}, 张钹^{2,3}

¹(安徽大学 人工智能研究所,安徽 合肥 230039)

²(清华大学 智能技术与系统国家重点实验室,北京 100084)

³(清华大学 计算机科学与技术系,北京 100084)

Theory of Fuzzy Quotient Space (Methods of Fuzzy Granular Computing)

ZHANG Ling^{1,2+}, ZHANG Bo^{2,3}

¹(Artificial Intelligence Institute, Anhui University, Anhui 230039, China)

²(State Key Laboratory of Intelligent Technology and System, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

³(Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

+ Corresponding author: Phn: 86-551-5107664, E-mail: zling@ahu.edu.cn

<http://www.ahu.edu.cn>; <http://www.tsinghua.edu.cn>

Received 2002-07-29; Accepted 2002-09-30

Zhang L, Zhang B. Theory of fuzzy quotient space (methods of fuzzy granular computing). *Journal of Software*, 2003,14(4):770~776.

Abstract: In this paper, the quotient space model is extended to the fuzzy granular world and two main conclusions are given. First, the following four statements are equivalent: (1) a fuzzy equivalence relation given in universe X , (2) a normalized isosceles distance given in quotient space $[X]$, (3) a hierarchical structure given in X , (4) a fuzzy knowledge base given in X . Second, the whole world with different fuzzy granularities composes a complete semi-order lattice. The results provide a powerful mathematical model and tool for granule computing.

Key words: granule computing; quotient space theory of problem solving; rough set theory; fuzzy set theory; quotient space model

摘要: 把商空间模型推广到模糊粒度世界,并给出了两个基本结论.一个结论是,下面4种提法等价:(1) 在论域 X 上给定一个模糊等价关系;(2) 给定 X 的商空间上的一个归一化等腰距离;(3) 给定 X 的一个分层递阶结构;(4) 给定一个 X 的模糊知识库.另一个结论是,所有模糊粒度世界全体,构成一个完备半序格.这些结论为粒度计算提供了一个强有力的数学模型和工具.

关键词: 粒度计算;问题求解的商空间理论;粗糙集理论;模糊集理论;商空间模型

中图法分类号: TP18 文献标识码: A

波兰学者 Pawlak^[1]提出了一个假设:人的智能(知识)就是一种分类的能力.这个假设可能不是很完备,但却

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60135010, 60175010 (国家自然科学基金)

第一作者简介:张铃(1937-),男,福建福清人,教授,博士生导师,主要研究领域为人工智能理论,机器学习理论和方法,粒度计算.

非常精炼.在此基础上,他提出概念可以用论域中的子集来表示.于是,在论域中给定一个等价关系以后,就为论域给定了一个知识基 (X,R) .然后,讨论一个一般的概念 x 如何用知识基中的知识来表示,即用知识基中的集合的并来表示,对于那些无法用 (X,R) 中的集合的并来表示的集合,他借用拓扑中的内核和闭包的概念,通过 R -下近似和 R -上近似,从而引入粗糙集,创立了“粗糙集理论”.目前,粗糙集理论已被广泛应用于各个领域,特别是数据挖掘领域,并获得了成功^[2].

最近,Zadeh 在文献[3~5]中讨论模糊信息粒度理论时,提出人类认知的 3 个主要概念,即粒度(granulation,包括将全体分解为部分)、组织(organization,包括从部分集成全体)和因果(causation,包括因果的关联),并进一步提出了粒度计算.他认为,粒度计算是一把大伞,它覆盖了所有有关粒度的理论、方法论、技术和工具的研究.他指出,“粗略地说,粒度计算是模糊信息粒度理论的超集,而粗糙集理论和区间计算是粒度数学的子集”.

Zadeh 的工作激起了学术界对粒度计算研究的兴趣,Y.Y.Yao 和他的合作者对粒度计算进行了一系列的研究^[6~9],并将其应用于数据挖掘等领域.其工作要点是,用决策逻辑语言(DL-语言)来描述集合的粒度(用满足公式 ϕ 元素的集合来定义等价类 $m(\phi)$),建立概念之间的 IF-THEN 关系与粒度集合之间的包含关系的联系,并提出利用由所有划分构成的格来求解一致分类问题.这些研究为知识挖掘提供了新的方法和角度.

在文献[10]中我们进行了关于粒度问题的讨论,并指出“人类智能的一个公认的特点,就是人们能从极不相同的粒度(granularity)上观察和分析同一问题.人们不仅能在不同粒度的世界上进行问题的求解,而且能够很快地从一个粒度世界跳到另一个粒度世界,往返自如,毫无困难.这种处理不同粒度世界的能力,正是人类问题求解的强有力的表现”.

在文献[10]中,我们为这种“粒度世界模型”建立了一整套理论和相应的算法,并将其应用于启发式搜索、路径规划等方面.

我们的方法与目前流行的“粗糙集”方法共同之处在于,都是利用等价类来描述“粒度”,都是用“粒度”来描述概念.但是,讨论的着重点有所不同.我们的着重点是研究不同粒度世界之间的互相转换、互相依存的关系,是描述空间关系学说的理论;而目前的粒度计算(如粗糙集理论等)主要是研究粒度的表示、刻画和粒度与概念之间的依存关系.更主要的不同在于,我们的理论是在论域元素之间存在有拓扑关系的情况下进行研究的,即论域是一个拓扑空间.而现在的粗糙集理论,其论域只是简单的点集,元素之间没有拓扑关系,故这些讨论的情况只是我们所讨论的情况的一个非常特殊的特例.

Zadeh 讨论的粒度计算与 Pawlak 和我们讨论的粒度问题又有些不同.他主要讨论粒度的表示问题.即当人类进行各种思考和推理时,都离不开粒度,那么如何表示它们呢?一般就是用“语言”、“词(word)”来表示,这就牵涉到“词计算”问题.而对于词计算,现在最流行的方法是“模糊数学”的方法.于是,他得出的结论是,模糊数学应是粒度计算的主要工具之一.

按照 Zadeh 的看法,Pawlak 讨论的粒度是“清晰的粒度”,而他自己讨论的是“模糊粒度”.按 Zadeh 的定义,我们的商空间理论也是“粒度计算”这把大伞下的一个内容,也属于所谓的“清晰粒度”的范畴.

本文讨论如何利用 Zadeh 的模糊概念将我们的商空间理论推广成“模糊商空间理论”,然后给出几个相关的基本定理.

1 粒度世界模型(商空间模型)

本节简单介绍我们在文献[10](或文献[11])中建立的粒度世界模型.

1.1 不同粒度世界的描述

我们以三元组 (X,f,T) 来描述一个问题.其中 X 是论域, $f(\cdot)$ 表示论域上(元素)的属性, $f:X \rightarrow Y$, Y 可以是 n 维空间,也可以是一般的集合; T 是论域的结构,它表示论域中各元素之间的关系.

求解问题 (X,f,T) 就是对论域 X 及其相关的结构和属性进行分析和研究.当 X 很复杂时,人们常从比较“粗”的粒度来考察问题.所谓粒度,就是将论域中的子集当作新的元素进行研究,用数学术语来讲,就是对 X 进行划分,得到商集 $[X]$,然后对 $[X]$ 进行研究.

我们的第 1 个问题是:当给定 X 的一个商集时, $[X]$ 上的属性 f 和结构 T 应如何表示.即如何得到对应的问题 $\{[X],[f],[T]\}$,以及研究 $([X],[f],[T])$ 与 (X,f,T) 的关系.我们称其为投影问题(按照 Zadeh 的术语,即粒度问题).

其次,当我们从不同的角度(粒度)考察同一问题,得出几个不同粒度上的结果,如 $([X]_1,[f]_1,[T]_1),([X]_2,[f]_2,[T]_2),\dots$ 时,如何对所得的结果进行综合,给出对问题的新的结论.这就是我们要研究的第 2 个问题,即合成问题(按照 Zadeh 的术语即组织问题).

第 3,在不同粒度世界上如何进行推理.此即推理问题(按照 Zadeh 的术语即因果问题).

最后一个问题是,当我们进行不同粒度的思考时,应如何选取适当的粒度进行求解,以降低求解的复杂性.

凡此种种,我们在文献[10,11]中都进行了深入、全面的讨论,并得出了相应的结论.

本文的目的是将我们已经建立的理论推广到模糊商空间.

2 模糊商空间理论的基本性质

2.1 模糊商结构

定义 2.1. 设 X 是论域, X 上的一个模糊集 A 是指 $\forall x \in X$, 有一个指定的数 $\mu_A \in [0,1]$, 称为 x 对 A 的隶属程度, 映射:

$$\begin{aligned} \mu_A: X &\rightarrow [0,1] \\ x &\rightarrow \mu_A(x) \end{aligned}$$

称为 A 的隶属函数.

令 $T(X)$ 表示 X 上一切模糊子集的集合, 则 $T(X)$ 实际上是由 $\mu: X \rightarrow [0,1]$ 这个函数组成的一个函数空间.

定义 2.2. 设 $R \in T(X \times X)$, 若满足:

- (1) $\forall x \in X, R(x,x)=1$,
- (2) $\forall x,y \in X, R(x,y)=R(y,x)$,
- (3) $\forall x,y,z$, 有 $R(x,z) \geq \sup(\min(R(x,y), R(y,z)))$,

则称 R 是 X 上的一个模糊等价关系(与定义 2.2 相关的概念见文献[12]).

这个定义是合理的,在积空间中,一个满足一定条件的集合表示 X 上的一个等价关系.那么,在积空间上满足一定条件的模糊集合就对应于一个模糊等价关系.在定义 2.2 中,若 R 只取 0,1 值,则上面所定义的就是一般的等价关系.

命题 2.1. 设 R 是 X 上的一个模糊等价关系,若 $\forall x,y \in X, x \sim y \Leftrightarrow R(x,y)=1$, 则“ \sim ”是 X 上的一个普通等价关系, 令其对应的商空间为 $[X]$.

证明:自反性和对称性是显然的,以下证明传递性.设 $x \sim y, y \sim z \Rightarrow R(x,y)=1, R(y,z)=1$, 得到 $R(x,z) \geq \min(R(x,y), R(y,z))=1$, 故得到 $x \sim z$. \square

定理 2.1. 设 R 是 X 上的一个模糊等价关系, $[X]$ 是命题 2.1 中定义的商空间.

令

$$\forall a,b \in [X], d(a,b) = 1 - R(x,y), \forall x \in a, y \in b, \quad (1)$$

则 $d(\cdot, \cdot)$ 是 $[X]$ 上的距离函数.

证明:先证明 $\forall y \in X, x_1, x_2 \in a \in [X]$, 有 $R(x_1,y)=R(x_2,y)$. 由 R 定义的条件(3)得到 $R(x_1,y) \geq \min(R(x_1,x_2), R(x_2,y)) = \min(1, R(x_2,y)) = R(x_2,y)$. 同理可以得到 $R(x_2,y) \geq R(x_1,y)$. 故有 $R(x_1,y)=R(x_2,y)$. 由此得到 $\forall x_1, x_2 \in a, y_1, y_2 \in b$, 有 $R(x_1,y_1)=R(x_2,y_2)$. 故得到公式(1)对 $\forall a,b \in [X]$, 惟一确定一个非负数 $d(a,b)$.

下面证明 $d(\cdot, \cdot)$ 是 $[X]$ 上的一个距离函数. 因为若 $d(a,b)=0$, 得到 $d(a,b)=1-R(x,y)=0, \forall x \in a, y \in b$. 故得到 $R(x,y)=1 \Rightarrow x \sim y$, 即 $a=b$.

其次,由 $R(x,y)$ 的对称性,可得到 $d(a,b)$ 的对称性.

最后, $\forall a,b,c \in [X]$, 取 $x \in a, y \in b, z \in c$, 由 $R(x,z) \geq \min(R(x,y), R(y,z)) \Rightarrow 1 - R(x,z) \leq 1 - \min(R(x,y), R(y,z)) \Rightarrow d(a,c) \leq (1 - R(x,y)) + (1 - R(y,z)) = d(a,b) + d(b,c)$, 即 d 满足三角不等式, 故 d 是 $[X]$ 上的距离函数, 得到 $([X], d)$ 是一个距离空间. \square

定义 2.3. 设 R 是 X 上的一个模糊等价关系,称由定理 2.1 定义的距离空间 $([X],d)$ 为 R 对应的商结构空间.

命题 2.2. 设 R 是 X 上的一个模糊等价关系,令 $R_\lambda = \{(x,y) | R(x,y) \geq \lambda\}, 0 \leq \lambda \leq 1$, 则 R_λ 是 X 上的一个普通等价关系,称 R_λ 为 R 的截关系.

证明略.

令等价关系 R_λ 对应的商空间为 $X(\lambda)$. 由定义容易得到如下性质:若 $0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq 1 \Leftrightarrow R_{\lambda_1} \supset R_{\lambda_2} \Leftrightarrow X(\lambda_2)$ 是 $X(\lambda_1)$ 的商集,于是,商空间族 $\{X(\lambda) | 0 \leq \lambda \leq 1\}$ 按照商集的包含关系构成一个有序链,称 $\{X(\lambda) | 0 \leq \lambda \leq 1\}$ 为 X 上的一个分层递阶结构.

命题 2.3. 给定 X 上一个模糊等价关系,则对应一个 X 上的分层递阶结构.

证明略.

下面讨论归一化的距离在什么情况下可以产生对应的模糊等价关系.

定义 2.4. 设归一化距离空间 (X,d) (所谓归一化,即 $\forall a,b \in [X]$, 有 $d(a,b) \leq 1$), 若 X 中任取 3 点构成的三角形均为等腰三角形,且腰是大边,则称其为等腰距离.

命题 2.4. 设 d 是某模糊等价关系对应的归一化距离,则 d 是等腰的.

证明:反证之,假设不是等腰的,设存在 $x,y,z \in X$,不妨设 $d(x,z) > \max(d(x,y),d(y,z))$, 于是得到 $R(x,z) = 1 - d(x,z) < 1 - \max(d(x,y),d(y,z)) = \min(1 - d(x,y), 1 - d(y,z)) = \min(R(x,y), R(y,z))$, 得到 R 不满足模糊等价关系条件(3). \square

定理 2.2. 设 $[X]$ 是 X 的商空间,在 $[X]$ 上给定一个归一化等腰距离函数 $d(\cdot, \cdot)$, 令 $\forall x,y \in X, R(x,y) = 1 - d(x,y)$, 则 $R(x,y)$ 是 X 上的一个模糊等价关系.

证明:显然, $R(x,y)$ 满足模糊等价关系的条件(1)和条件(2). 以下证明条件(3)也满足.

$\forall x,y,z \in X$, 由于 d 是等腰距离, 故有

$$d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z)),$$

所以得到

$$1 - d(x,z) \geq 1 - \max(d(x,y), d(y,z)) = \min((1 - d(x,y)), (1 - d(y,z))),$$

即

$$R(x,z) \geq \min(R(x,y), R(y,z)).$$

上式右边对 y 取 \sup , 得到 $R(x,y)$ 满足模糊等价关系条件(3). \square

由定理 2.1 和定理 2.2 可知, X 上的一个模糊等价关系与 X 的某一个商空间上的归一化等腰距离函数是一一对应的. 这个等价关系使我们用距离空间为工具来研究模糊等价关系, 即可将模糊等价关系放在 (X,f,T) 的商空间理论中进行研究, 其中 T 是由某模糊等价关系给出的拓扑.

上面已经证明, 给定一个 X 上的模糊等价关系对应一个惟一的 X 的分层递阶结构. 下面证明反之亦然.

定理 2.3. 设 $\{X(\lambda) | 0 \leq \lambda \leq 1\}$ 是 X 上的一个分层递阶结构, 则存在 X 上的一个模糊等价关系 R , 其截关系为 R_λ, R_λ 对应的商空间为 $X(\lambda), \lambda \in [0, 1]$.

证明: 由假设, $\{X(\lambda)\}$ 是 X 的分层递阶结构, 所以每个 $X(\lambda)$ 是 X 的商空间, 令 $X(\lambda)$ 对应的等价关系为 $R_\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$.

$\forall x,y \in X$, 定义

$$R(x,y) = \begin{cases} 1, & \forall \lambda, (x,y) \in R_\lambda \\ \inf \{\lambda | (x,y) \notin R_\lambda\}, & \text{其他} \end{cases}$$

$\forall x,y,z \in X$, 令 $R(x,y) = a_1, R(x,z) = a_2, R(y,z) = a_3$.

对 $\forall \varepsilon > 0$, 有 $a_1 - \varepsilon < d_1 \leq a_1, a_2 - \varepsilon < d_2 \leq a_2, d_3 < a_3 - \varepsilon < d_3 \leq a_3$.

$(x,y) \in R_{d_1}, (x,z) \in R_{d_2}, (y,z) \in R_{d_3}$.

若 $d_2 \geq \min(d_1, d_3)$, 则有 $R(x,z) \geq d_2 \geq \min(R(x,y) - \varepsilon, R(y,z) - \varepsilon) \geq \min(R(x,y), R(y,z)) - \varepsilon$.

若 $d_2 < \min(d_1, d_3)$, 设 $d_3 \leq d_1$, 由 $(x,y) \in R_{d_1}, (y,z) \in R_{d_3}$, 得到 $(x,y) \in R_{d_3}$, 即 $x \sim y, y \sim z (R_{d_3})$, 得到 $x \sim z (R_{d_3})$, 即

$$R(x,z) \geq d_3 = \min(d_1, d_3) \geq \min(R(x,y), R(y,z)) - \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 再将上式的右边对 y 取 \sup , 最后得到

$$R(x,z) \geq \sup_y (\min(R(x,y), R(y,z))),$$

得到 $R(x,y)$ 是 X 上的一个模糊等价关系, 且其截关系为 R_λ . \square

我们将上述结论归结成下面的定理:

基本定理. 下面的断言是等价的:

- (1) 在 X 上给定一个模糊等价关系;
- (2) 在 X 的商空间上给定一个归一化的等腰距离;
- (3) 给定 X 的一个分层递阶结构.

通过这个定理,我们可以将模糊粒度计算化为一个在结构 $([X], d)$ 上进行的计算,于是,可以用我们提出的商空间理论进行研究.

3 模糊商空间的结构

下面来说明用模糊等价关系所描述的模糊商空间的结构和性质.

3.1 模糊商空间的结构

定义 3.1. 设 R 是 X 上的一个模糊等价关系,由命题 2.1 得到一个与它等价的 X 的商空间 $[X]$ 上的归一化等腰距离 $d(\dots)$. 对 $\forall a \in [X]$, 定义 $\mu_a(b) = 1 - d(a, b)$, $\forall b \in [X]$. 于是,每个 μ_a 就定义了 $[X]$ 上的一个模糊集. 由这些模糊集构成的空间就是对应于模糊等价关系 R 的模糊商空间 $\{\mu_a | a \in [X]\}$, 或称其为 X 上的一个模糊知识基.

定义 3.2. 设 R_1, R_2 是 X 上的两个模糊等价关系,若对 $\forall (x, y) \in (X \times X)$, 有 $R_2(x, y) \leq R_1(x, y)$, 则称 R_2 比 R_1 细, 记为 $R_1 < R_2$.

定理 3.1. 在上述定义的关系“ $<$ ”下,所有 X 上的模糊商空间全体构成一个完备半序格 \mathbf{R} .

证明:任意给定一族 $\{R_a, a \in I\} \subset \mathbf{R}$, 定义 $R^- : R^-(x, y) = \inf_a \{R_a(x, y)\}$; $R- : R-(x, y) = \sup \{\lambda | \exists x = x_0, x_1, \dots, x_m = y, R_{a_i}, \dots, R_{a_m} \text{ 满足 } R_{a_i}(x_{i-1}, x_i) \geq \lambda, i = 1, 2, \dots, m\}$.

下面证明 R^- 是 $\{R_a\}$ 的上确界.

首先证明它是模糊等价关系. 其自反性和对称性是显然的.

设给定 $\forall x, y, z, R_a$, 有

$$R_a(x, z) \geq \sup_y (\min(R_a(x, y), R_a(y, z))),$$

上式的右边对 a 取 inf, 得到

$$\forall x, y, z, \text{ 有 } R_a(x, z) \geq \sup_y (\min(\inf_a R_a(x, y), \inf_a R_a(y, z))) = \sup_y (\min(R^-(x, y), R^-(y, z))).$$

再在左边对 a 取 inf, 得到

$$R^-(x, z) \geq \sup_y (\min(R^-(x, y), R^-(y, z))),$$

得到 R^- 是一个模糊等价关系.

现在设 R^* 是 $\{R_a\}$ 的上界, 即

$$\forall x, y, a, \text{ 有 } R^*(x, y) \leq R_a(x, y).$$

任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在 a_0 :

$$R^*(x, y) \leq R_{a_0}(x, y) \leq \inf_a R_a(x, y) + \varepsilon \leq R^-(x, y) + \varepsilon,$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得到

$$R^*(x, y) \leq R^-(x, y),$$

即得到 R^- 是 $\{R_a\}$ 的上确界.

现在证明 $R-$ 是 $\{R_a\}$ 的下确界.

先证明 $R-$ 是一个模糊等价关系, 模糊等价关系的条件(1)和条件(2)显然满足, 下面只要证明 $R-$ 满足模糊等价关系的条件(3)即可.

任意给定 x, y, z , 设 $R-(x, y) = a_1, R-(x, z) = a_2, R-(y, z) = a_3$. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 d_1, d_2, d_3 有

$$a_1 - \varepsilon < d_1 \leq a_1, a_2 - \varepsilon < d_2 \leq a_2, a_3 - \varepsilon < d_3 \leq a_3,$$

$$x = x_0, x_1, \dots, x_m = y; y = y_0, y_1, \dots, y_n = z,$$

$$R_{a_1}, \dots, R_{a_m}; R_{b_1}, \dots, R_{b_n}$$

使得

$$R_a(x_{i-1}, x_i) \geq d_1, i=1, \dots, m; R_b(y_{j-1}, y_j) \geq d_3, j=1, \dots, n.$$

不妨设 $d_1 \geq d_3$, 取 $x_{j+m} = y_j, R_{a_{(j+m)}} = R_b, j=1, \dots, n$, 则有 $x = x_0, x, \dots, x_{m+n}$, 及 $R_a(x_{i-1}, x_i) \geq d_3, i=1, \dots, n+m$.

按定义得到

$$R_-(x, z) \geq d_3 = \min(d_1, d_3) \geq \min(R_-(x, y), R_-(y, z)) - \varepsilon.$$

上式右边对 y 取 \sup , 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 最后得到

$$R_-(x, z) \geq \sup_y (\min(R_-(x, y), R_-(y, z))),$$

即模糊等价关系的条件(3)满足, 故 R_- 是一个模糊等价关系.

最后证明 R_- 是下确界. 任意给定 $\{R_a\}$ 的一个下界 R^* , 则对任意 R_a, x, y 有 $R^*(x, y) \geq R_a(x, y)$. 设 $R_-(x, y) = a$, 任取 $\varepsilon > 0$, 则按定义, 存在 $x = x_0, x, \dots, x_m = y; R_{a_1}, \dots, R_{a_m}$, 使得 $R_{a_i}(x_{i-1}, x_i) \geq a - \varepsilon, i=1, 2, \dots, m$. 做截关系 $R^*_{a-\varepsilon}$ 因为 $R^*(x_{i-1}, x_i) \geq a - \varepsilon$, 得到 x, y 在截关系 $R^*_{a-\varepsilon}$ 下是等价的, 即 $R^*(x, y) \geq a - \varepsilon$. 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得到 $R^*(x, y) \geq a = R_-(x, y)$. 得到 $R^* \geq R_-$, 即 R_- 是 $\{R_a\}$ 的下确界. \square

这样, 我们就能把在精确粒度下的商空间的理论和方法推广到模糊粒度计算中.

4 结 论

作为模糊粒度计算的起步, 本文讨论模糊商空间理论. 所得到的主要结果有: 证明了利用模糊等价关系可以将原来的商空间理论推广成模糊商空间理论, 并给出了几个基本的定理. 第一, 下面的叙述是等价的: (1) 在 X 上给定一模糊等价关系 R ; (2) X 的商空间 $[X]$ 上给定一个归一化的等腰距离 d ; (3) 给定 X 的一个分层递阶结构 $\{X(\lambda)\}$; (4) 给定一个 X 的模糊知识基. 第二, X 上所有模糊等价关系构成一个完备半序格. 这两个结论为粒度计算提供了强有力的数学模型和工具. 下一步的研究工作是把这些理论和方法应用于数据挖掘等领域.

本文的主要概念和部分内容是我们 10 多年前提出来的. 近年来看到国内掀起的“粗糙集热”和最近 Zadeh 提出的“粒度计算”, 联想到我们 10 多年前提出的商空间理论, 发现这三者之间有着紧密的联系, 故作此文, 想从商空间观点重新研究并深化这些内容(其中定理 2.1 和基本定理是新得出的, 定理 2.1 是对原定理的改进). 同时, 我们也想说明, “粗糙集理论”相当于无拓扑结构的商空间理论, Zadeh 的模糊粒度计算可以很容易地从我们的理论给出(见定理 2.1), 利用商空间理论能将这三者理论有机地联系起来. 相信本文的工作对进一步发展粒度计算会有一定的帮助.

References:

- [1] Pawlak Z. Rough Sets Theoretical Aspects of Reasoning About Data. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [2] Dubois, D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets. International Journal of General Systems, 1990, 17(2): 191~209.
- [3] Zadeh LA. fuzzy logic=computing with words. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1996, 4(1): 103~111.
- [4] Zadeh LA. Towards a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 19(1): 111~127.
- [5] Zadeh LA. Some reflections on soft computing, granular computing and their roles in the conception, design and utilization of information/intelligent systems. Soft Computing, 1998, 2(1): 23~25.
- [6] Yao YY. Granular computing: basic issues and possible solutions. In: Wang PP, ed. Proceedings of the 5th Joint Conference on Information Sciences, Vol I. Atlantic, NJ: Association for Intelligent Machinery, 2000. 186~189.
- [7] Yao YY, Li X. Comparison of rough-set and interval-srt models for uncertain reasoning. Fundamental Informatics, 1996, 27(1): 289~298.
- [8] Yao YY, Wong SKM, Wang LS. A nonnumeric approach to uncertain reasoning. International Journal of General Systems, 1995, 23(2): 343~359.
- [9] Yao YY, Ning Z. Granular computing using information table. In: Lin TY, Yao YY, Zadeh LA, eds. Data Miming, Rough Sets and Granular Computing. Heidelberg: Physica-Verlag, 2000. 102~124.
- [10] Zhang B, Zhang L. Theory and Applications of Problem Solving. North-Holland: Elsevier Science Publishers B.V., 1992.
- [11] Zhang B, Zhang L. Theory of Problem Solving and Its Applications. Beijing: Tsinghua University Press, 1990 (in Chinese).

