

多裁剪自由曲面生成有限元网格的实现*

张 苏⁺, 施法中

(北京航空航天大学 机械工程与自动化学院,北京 100083)

Implementation of Finite Element Method Mesh Generation from Multiple Trimmed Free Surfaces

ZHANG Su⁺, SHI Fa-Zhong

(School of Mechanical Engineering and Automation, BeiHang University, Beijing 100083, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-10-82316584, E-mail: josef_z@sina.com

Received 2004-05-27; Accepted 2005-01-07

Zhang S, Shi FZ. Implementation of finite element method mesh generation from multiple trimmed free surfaces. *Journal of Software*, 2005,16(11):2008–2013. DOI: 10.1360/jos162008

Abstract: In this paper, some key techniques about FEM surface mesh generation from multiple trimmed free surfaces are presented. The Advancing Front method is adopted and its kernel algorithm is given. A new method combining the parametric space method and direct 3D method is used during the surface calculation. As for the parametric space calculation to find an optimal 3D point, the Tangent Vector Inversion is presented so as to cut down iteration. Test results show this algorithm is quicker and more robust. The FEM mesh generated from large multiple trimmed free surfaces can be applied to finite element method directly.

Key words: mesh generation; multiple trimmed free surface; advancing front method; tangent vector inversion

摘 要: 论述了多裁剪自由曲面生成有限元曲面网格的几个关键技术.采用了推进波前法生成曲面网格,给出了核心算法;在曲面算法中运用了介于参数法与直接法之间的新方法.针对求解曲面上最优点的参数域反算问题,引入了切矢逆求方法,可使迭代次数大为降低.测试表明,该算法快速、稳定.对大型的多裁剪自由曲面生成的曲面有限元网格,可直接用于有限元计算.

关键词: 网格剖分;多裁剪自由曲面;推进波前法;切矢逆求

中图法分类号: O242 文献标识码: A

近 20 年来,随着计算机技术的成熟,有限元技术得到了迅猛的发展.作为有限元前处理的网格剖分技术一直是有限元技术中相对独立又蓬勃发展的一个分支.这是由于:首先,有限元计算能力的日益强大,迫切要求全自动的、庞大的网格数据;其次,随着 CAD 技术的日臻完善,造型出的模型越来越复杂,要求把复杂的 CAD 模型转化为网格模型,进而进行有限元分析已成为潮流.此外,在数控加工、逆向工程、虚拟制造及图形图像处理等

* Supported by the National High-Tech Research and Development Plan of China under Grant No.863-511-820-020 (国家高技术研究发展计划(863))

作者简介: 张苏(1967 -),男,河北宣化人,博士,工程师,主要研究领域为 CAD/CAM/CAE;施法中(1939 -),男,教授,博士生导师,主要研究领域为 CAD/CAM/CAE,板料成形数值模拟.

方面,也存在着相同或类似的技术要求.这是促进了有限元网格技术发展的外因.

在有限元网格剖分技术中,曲面网格扮演着很重要的角色.一方面,它可以直接用于有限元计算,如作为各种膜单元、壳单元等;另一方面,它又是生成体单元的边界条件.曲面单元的好坏,直接影响到最终生成的体单元的质量.曲面单元的研究是目前的一个热点^[1].就单张曲面而言,生成曲面单元一般可以分为两大类:映射法和直接法^[2].映射法^[3,4]应用得较多.其基本思想是:在曲面的参数域内先进行二维区域的网格剖分,之后将这些网格通过变换,成为空间的曲面网格.这种方法通用性好,只要是参数曲面,均可以实现.它的缺点是:如果参数域与空间曲面的映射关系远异于线性关系,那么生成的网格将产生扭曲,严重时将使有限元计算无法进行.直接法^[5]的基本思想是,直接在空间生成曲面网格,一般采用推进波前法^[6],需要进行大量的求交运算,该方法生成的网格质量好,但效率低.

针对上述情况,人们进行了多种方法的探索,改进的映射法是广泛引起注意的领域.关振群等人^[7]采取在空间首先布点,然后在参数域内用 Delaunay 法“结点连元”生成网格.George 与 Borouchaki^[8]以及熊英等人^[9]提出了准 Delaunay 法则,即在参数域内用椭圆替代圆进行 Delaunay 剖分,这样可以抵消映射不良所引起的扭曲.李明春等人^[4]采取在参数域内试点,再在空间验证质量的办法.

本文的方法属于改进的映射法,采用推进波前法在参数域内生成网格,但所有产生的节点坐标则通过空间曲面来确定.这样就保证了网格的质量.这一方法的难点在于如何确定空间曲面上满足条件的一个点以及反算出它在参数域内的对应点.通常的试凑法效率较低,没有竞争力.本文提出的切矢逆求法可以迅速找到参数域内的对应点,根据程序跟踪,一个点的确定一般只需要一到两次迭代,极大地减少了计算时间.

在复杂多裁剪自由曲面网格剖分中,其他问题是如何将各个曲面片缝合在一起,从而使整张曲面没有缝隙(不漏水(watertight)),此问题的解决可参见文献[10].

1 参数域内推进波前法的实现

推进波前法的概念

推进波前法^[11,12]的概念是:设定当前边界,然后由此边界向内生成网格,同时更新边界.反复进行上述操作,层层推进,直到当前边界消失.对于二维区域,不论边界是否为凸的,均可以实现网格剖分.如果区域内有孔,则活动边界不止一条.在活动边界更新过程中,复杂的情况是,活动边界之间有可能合并,或者一条可能变为两条.为了生成单元的方便,一般使外活动边界按逆时针方向给定,内活动边界按顺时针方向给定.这样,在生成新单元时,就不必判断结点顺序了.

单元密度控制是网格剖分中的一项不可或缺的步骤.有多种方法可以实现.本文方法如下:在参数域先 Delaunay 剖分,将所有活动边界的结点生成粗网格,再由这些结点的三维空间位置为其确定网格密度.当推进波前法执行时,由这些粗网格来控制网格密度.另外,对于空间曲面网格,还隐含着一个密度控制就是曲面曲率的控制.本文的方法兼顾到曲率的影响.当欲生成的单元与此局部曲面间的相对误差大于某个给定数时,缩小该单元,直到满足要求.

推进波前法的实现

本文采用 ADT^[13]结构存储粗网格数据,这样新结点在寻找落入哪个粗网格内时,将大大减少遍历时间.推进波前法的核心算法如下:

```

Creat_ADT(); //建立粗网格,并建立 ADT 树,以提高遍历速度
do
{
  for (int i=0; i<ActiveBounds.GetSize(); i++) //循环每条活动边界
  {
    int j=GetSmallActiveBounds(); //找到该活动边界的最短边,设两端点为 A,B
    Node nd;
  }
}

```

```

double r=5AB;
    nd=SetCandidateNewPoint(j); //根据单元密度函数找到 j 边生成单元时的最理想新结点
    L100: SetNsArray(); //找到距离 nd 小于 r 的所有活动边界顶点,从小到大,形成链表 Ns,如果链首元素
    与 nd 距离大于  $\delta$ (给定小值),则将 nd 置于链首
    bool flag=MakeNewElement(A,B); //把 A,B 依次与 Ns 中的元素一一相连,形成单元.如果此单元中不包含
    其他 Ns 成员,且不与所有的活动边界相交,则可形成单元,否则试用 Ns 下一个元素
    if (!flag) //如果所有 Ns 成员均不符合形成单元的条件,则放大 r 的范围,重试
    {
        r=5r;
        goto L100;
    }
    UpdateActiveBounds(); //更新活动边界
} //循环每条活动边界结束
bool flag1=ActiveBounds.GetSize(); //如果活动边界已完全消失,则 flag1=false,否则 flag1=true
} while (flag1) //如果仍有活动边界,重复上述过程,否则结束.
执行该程序简述如下:

```

(1) 如果尚有活动边界存在,则进入 do-while 循环,在该循环中,遍历每条活动边界,对该条活动边界找到它的最短边长,从此边向内生成单元.

(2) 设该边端点为 A, B ,其在参数域内的对应点为 a, b .根据密度函数,在三维曲面上找到它最合适的新结点 C 点及其参数域内的对应点 c (详细过程见第 2 节).

(3) 找到距离 C 点小于 5 倍 AB 长度的所有活动边界顶点,从小到大排列,形成链表 Ns ,如果链首元素与 C 点距离大于一个恒定小值 δ ,则将 C 点置于链首.

(4) 在参数域内,把 a, b 依次与 Ns 中的元素的参数域对应点一一相连,形成单元.如果此单元中不包含其他 Ns 成员,且不与所有的活动边界相交,则可生成单元,否则试用 Ns 下一个元素.

(5) 如果所有 Ns 成员都不符合要求,那么需要放大挑选 Ns 的范围,使其再放大 5 倍.

(6) 适时地更新活动边界.

上述算法的特点是,网格的拓扑关系仍在参数域确定,充分利用参数曲面的特点,降三维问题为二维问题;而在确定新结点时,则由空间曲面来衡量,这样就保证了网格的质量.

2 曲面网格的实现

运用推进波前法剖分曲面网格时关键的一步是由曲面上一条边界的两个点向曲面内寻找第 3 个点.如图 1 所示,由已知边 AB ,要在曲面内求得一点 C ,使得 AC =常数 d_1 , BC =常数 d_2 ,此问题进一步可归结为如下问题:已知任意一个参数形式的开曲面 $p=p(u, v)$,先确定 AB 上的一点 O 如下: $OB = (d_2^2 - d_1^2 + AB * AB) / 2AB$. $AO = AB - OB$,给定半径 $r = \sqrt{AC^2 - AO^2}$.以 $p=p(u_0, v_0)$ 为圆心,以向量 AB 为平面法矢可确定一张圆所在的平面,求半径小于曲面尺寸的给定值 r 的圆与曲面的唯一交点 C 及其参数域对应点.

求解此问题一般可有两种方法.

方法 1. 以圆所在平面建立新的坐标系,使圆的方程表示简化,然后将曲面进行坐标变换,形成以 u 与 v 为变量的非线性方程组,进而求解.

方法 2. 从 $p(u_0, v_0)$ 开始,试取增量 Δu 与 Δv ,使 $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ 在参数域内,然后计算距离 $d = |p(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - p(u_0, v_0)|$,使 d 小于上一个循环,当 $d > \varepsilon$ 时,一直进行 Δu 与 Δv 的增减,直到 $d \leq \varepsilon$.

两种方法都能求得交点,但方法 1 中的坐标变换对于 BEZIER, B 样条与 NURBS 曲面简单易行,是可取的,而对于其他基函数不具有规范性的曲面则甚为麻烦.方法 2 无须坐标变换,但往往需要多次修正 Δu 与 Δv ,影响了效率.为此,我们提出如下更为简便、快速和可靠的方法.

建立由圆心和平面法矢决定的圆所在平面的隐方程表示: $A_1x+B_1y+C_1z-D_1=0$,其中 $A_1^2+B_1^2+C_1^2=1$.

求曲面在 $p(u_0, v_0)$ 点的两个单向偏导矢,即 u 向切矢与 v 向切矢.取它们的叉积,单位化,即为曲面在该点的单位法矢,于是得到曲面在 $p(u_0, v_0)$ 点的切平面的隐方程表示: $A_2x+B_2y+C_2z-D_2=0$,其中 $A_2^2+B_2^2+C_2^2=1$.

求出两个平面的交线.取两个单位矢量 $[A_1, B_1, C_1]$ 与 $[A_2, B_2, C_2]$ 的叉积,再使该叉积单位化,得到沿交线方向的单位矢量 a .使该单位矢量指向曲面的内部.因该交线过 $p(u_0, v_0)$ 点,则有交线的参数方程 $p(t) = p(u_0, v_0) + ta$.该交线在圆所在平面内,并与曲面相切,又垂直于曲面边界.取 $t=r$.

由此得到交线上一点 $p(t)$.

取交线上的一个矢量 $T=p(t)-p(u_0, v_0)$.

将矢量 T 表示成曲面在 $p(u_0, v_0)$ 点的切平面内 u 向切矢 p_u 与 v 向切矢 p_v 的线性组合 $T=p_u du+p_v dv$.这样就可以写出含两个未知量 du 与 dv 的 3 个方程构成的一个方程组:

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix},$$

可简写为 $MW=T$.

将方程两边变成 M 的转置 M^T ,得到 $(M^T M)W=M^T T$,或

$$\begin{bmatrix} |p_u|^2 & p_u p_v \\ p_u p_v & |p_v|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_u T \\ p_v T \end{bmatrix}.$$

解该 2×2 的线性方程组,就可以求出 $W=[du \quad dv]^T$.Piegl 称此问题为切矢逆求问题^[14].现在就可以得到曲面上一点 $p(u_0+du, v_0+dv)$.计算距离 $d=|p(u_0+du, v_0+dv)-p(u_0, v_0)|$.

若 $|d-r| \leq \delta$,则认为 $p(u_1, v_1)$ 就是所要求的圆与曲面交点.若 $|d-r| > \delta$,则令 $t=2r-d$,返回.

通过大量实际例子的剖分表明,该方法收敛非常快,跟踪显示一般经过一到两次迭代就可以满足要求.表 1 是对几个模型剖分网格时采用传统方法(方法 2)和切矢逆求法的相关比较数据,从中可见新算法的快速.

Table 1 Five models' mesh generation data

表 1 5 个模型的网格生成数据

Model	IGS size	Trimmed surface	Open file (s)	Mesh generation using traditional method	Mesh generation using tangent vector inversion (s)	Element	Node
Model-1	6.015 MB	350	14	1m35s	19	5 420	2 837
Model-2	10.32 MB	756	56	6m33s	79	13 144	6 815
Model-3	1.97 MB	192	7	2m5s	26	6 344	3 399
Model-4	1.833 MB	162	7	53s	11	4 048	2 112
Model-5	994 KB	153	4	1m1s	12	3 604	1 872

3 结束语

本文用推进波前法对多裁剪自由曲面进行网格剖分.先在曲面的参数域内用 Delaunay 方法使边界点产生粗网格,由这些粗网格来控制单元密度.然后用推进波前法进行曲面网格的生成:在参数域进行网格的排列存储,及其对网格拓扑关系的确认.而新单元的形状则在三维的曲面上确定.通过切矢逆求法,可以迅速求得新结点及其对应的参数域点.测试表明:该方法速度快,网格质量好.图 2 和图 3 给出了该方法生成网格的实例.

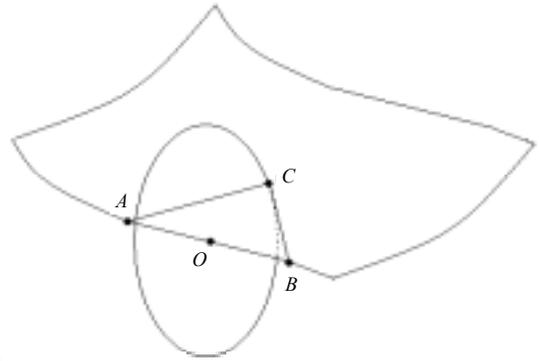


Fig.1 Finding point C on surface

图 1 求曲面上一点 C

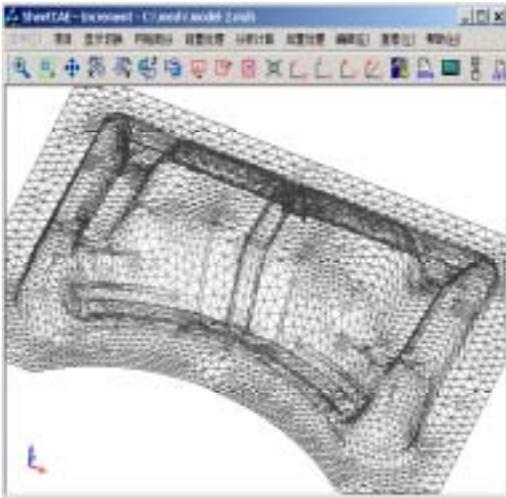


Fig.2

图 2

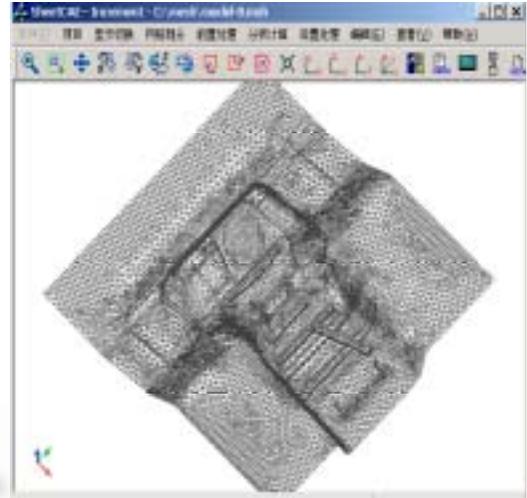


Fig.3

图 3

References:

- [1] Guan ZQ, Song C, Gu YX, Sui XF. Recent advances of research on finite element mesh generation methods. *Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, 2003,15(1):1-14 (in Chinese with English abstract).
- [2] Owen SJ. Non-Simplicial unstructured mesh generation [Ph.D. Thesis]. Carnegie Mellon University, 1999.
- [3] Sheng X, Hirsch BE. Triangulation of trimmed surfaces in parametric space. *Computer-Aided Design*, 1992,24(8):437-444.
- [4] Li MC, Luo HZ, Zhou Ji. Triangulation of arbitrary curved surfaces using improved advancing front method. *Journal of Wuhan Institute of Chemical Technology*, 1999,21(2):57-61 (in Chinese with English abstract).
- [5] Lau TS, Lo SH, Lee CK. Generation of quadrilateral mesh over analytical curved surfaces. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1997,27(6):251-272.
- [6] Moller P, Hansbo P. On advancing front mesh generation in three dimensions. *Int'l Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995,38(21):3551-3569.
- [7] Guan ZQ, Sui XF, Gu YX, Li YP. Automatic finite element mesh generation over 3D combined surfaces. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003,20(4):409-416 (in Chinese with English abstract).
- [8] Borouchaki H, George PL, Hecht F, Laug P, Saltel E. Delaunay mesh generation governed by metric specifications, Part I, algorithms. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1997,25(1):61-83.
- [9] Xiong Y, Hu YJ, Zhao JJ. An algorithm of surface triangulation based on mapping and Delaunay method. *Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, 2002,14(1):57-60 (in Chinese with English abstract).
- [10] Zhang S, Shi FZ. Implement of repairing and stitch in multiple trimmed free surfaces. *Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, 2005,17(4):699-703 (in Chinese with English abstract).
- [11] Peraire J, Vahdati M, Morgan K, Zienkiewicz OC. Adaptive remeshing for compressible flow computations. *Journal of Computational Physics*, 1987,72(4):449-466.
- [12] Lo SH. A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains. *Int'l Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1985, 21(9):1403-1426.
- [13] Bonet J, Peraire J. An alternating digital tree (ADT) algorithm for 3D geometric searching and intersection problems. *Int'l Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991,31(1):1-17.
- [14] Piegl L, Tiller W. *The NURBS Book*. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1995. 235-236.

附中文参考文献:

- [1] 关振群,宋超,顾元宪,隋晓峰.有限元网格生成方法研究的新进展. *计算机辅助设计与图形学学报*,2003,15(1):1-14.

