

基于拓扑相似性的等距参数曲面求交算法*

林军呈⁺, 唐敏, 董金祥

(浙江大学 人工智能研究所 CAD/CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

(浙江大学 CAD/CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

An Intersection Algorithm for Parametric Offsets Surfaces Based on Topology Similarity

LIN Jun-Cheng⁺, TANG Min, DONG Jin-Xiang

(State Key Laboratory of CAD&CG, AI Institute, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

+ Corresponding author: Phn: 86-571-87987944, Fax: 86-571-87984194, E-mail: Linjc74@yahoo.com.cn

<http://AI.zju.edu.cn/~tm/>

Received 2002-04-10; Accepted 2002-07-01

Lin JC, Tang M, Dong JX. An intersection algorithm for parametric offset surfaces based on topology similarity. *Journal of Software*, 2003,14(8):1456~1462.

<http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/1456.htm>

Abstract: Commonly, surface/surface intersect algorithm is repeatedly used to solve the offset surface/surface intersections. It doesn't make full use of similarity of intersect curve topology to simple offset surface/surface intersection problem. The algorithm presented in this paper pre-processes two parametric surfaces to achieve points, called topology transition points, which produce an effect on intersect curve structure, number and location. According to topology transition points distribution graph, initial point search strategy and intersect curve topology can be fixed. The algorithm is tested, and can be proved to overcome the degenerate conditions such as loop leaking, singularity leaking and can calculate the initial point effectively.

Key words: offset surface; surface intersection; TTP (topology transition point); intersection loop; curvature

摘要: 等距曲面求交算法通常采用曲面求交算法反复迭代计算交线,没有考虑不同 Offset 距离等距曲面交线的相似性进行求交简化.提出了一种基于拓扑相似性的等距曲面求交优化算法.算法首先求取曲面的拓扑特征点,根据拓扑特征点分布图,确定交线环拓扑结构,在交线拓扑结构信息的指导下,确定初始点的搜索策略.采用提出的方法可以有效解决等距曲面的子环、奇点遗漏、分支跳跃、乱序跟踪和初始点求取问题,精确、鲁棒地计算出交线.

关键词: 等距曲面;曲面求交;拓扑特征点;交线环;曲率

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

* Supported by the National Research Foundation for the Doctoral Program of Higher Education of China under Grant No. 2000033554 (国家教育部博士点基金); the Natural Science Foundation of Zhejiang Province of China under Grant No.6001107 (浙江省自然科学基金)

第一作者简介: 林军呈(1974—),男,浙江台州人,博士生,主要研究领域为 CAD,几何造型.

等距曲线和等距曲面在 CAD/CAM 领域中有着重要的作用,例如在数控加工的刀具路径生成、造型中的曲面间常半径过渡时,以上两个应用中都涉及到进行等距曲面的求交问题。

等距曲面求交是广义曲面求交问题的一个子问题,等距曲面的求交可以把等距曲面作为一般的曲面进行求交运算,国内外大量的文献^[1-5]论述了进行有效、精确、鲁棒的曲面求交算法,主要的曲面求交方法可以分为解析法、网格算法、跟踪法、隐函数法以及分割法。Yu Wang^[6]采用了法向量投影法,可以直接在两张基曲面的参数域中得到交线的轨迹,并且不存在对等距曲面进行近似的问题。该算法从一组初始交点出发,采用跟踪迭代法计算交线,但文献对于等距曲面的交线环的分布情况和初始交点的获得没有给出清晰的方法。目前,环检测算法^[7]已成为曲面求交领域的一个热点^[8,9],它可以保证所有分支都被找到,从而成为曲线跟踪法强有力的辅助工具。但是,它并不能保证正确得到交线的拓扑结构。它依赖于曲线跟踪的策略。在这些策略中,跟踪过程从一系列初始点开始,按照一定的步长进行下一个交点的搜索,系统须采用启发式的步长设置方法,才能避免交线环的分支跳跃、乱序跟踪等问题。文献^[10,11]提出拓扑特征点与平面和曲面交线环结构的关系,它揭示了曲面和平面交线环拓扑的内在性质。考虑到等距曲面的空间表达一致性^[12,13],本文通过分析等距曲面拓扑特征点,依据拓扑特征点获得交线环拓扑结构,由交线环拓扑结构确定交线环初始点求取策略,在获取交线环初始点后,在已有拓扑结构信息的指导下,采用跟踪法动态调整步长和搜索方向,减少交线环搜索范围。

考察两个等距曲面的相交的情况,当其中的一个或两个曲面的间距发生变化时,不仅曲面的交线环的几何形状发生变化,同时交线的拓扑结构也发生了改变。如图 1 所示,曲面 S_1^0 是曲面 S_1 的等距曲面,点 P_1 和 P_2 是一对特征点对,当曲面 S_1 和 S_1^0 的 Offset 距离增加时,曲面 S_1^0 和 S_2 出现交线环,根据 P_1P_2 之间距离与 S_1^0 的 Offset 距离可以快速确定特征点对 $\{P_1, P_2\}$ 是否会产生交线环,若产生交线环,交线环参数域包含特征点参数。通过分析曲面上特征点对的一些内在性质,本文提出了一种等距曲面求交的有效方法。

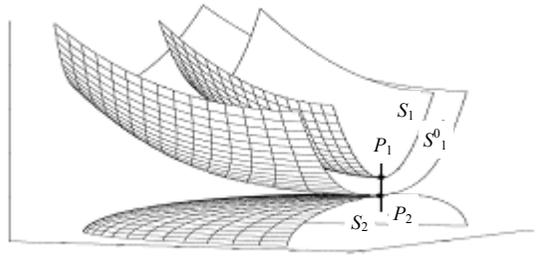


Fig.1 An example of topology transition point

图 1 一个特征点出现的例子

算法包括以下 3 个主要步骤:

- (1) 计算两个曲面上所有的特征点对,根据特征点对距离进行排序。
- (2) 统计交线环的大致分布,并且根据特征点集的属性计算交线环的初始点。
- (3) 采用跟踪法求解整个交线环。

本文主要对算法第(1)步和第(2)步进行讨论,交线环求取方法采用文献^[14,15]提出的方法,该方法采用了基于模拟退火的遗传算法进行交线环的跟踪求交,可以进行准确、有效和鲁棒地求取交线环。本文在第 1 节给出了曲面上特征点的充分必要条件,分析了各种类型特征点对交线环拓扑结构的作用。第 2 节根据交线环的拓扑相似性确定初始点的求取策略。第 3 节和第 4 节给出一些算法实例分析、结论和将来工作的展望。

1 曲面特征点集的属性及求取方法

不妨假设两个间距曲面 $G^0(u,v), F^0(s,t)$ 的原曲面为 $G(u,v)^*, F(s,t)$, 则有

$$G^0(u,v)=G(u,v)+lm(u,v), F^0(s,t)=F(s,t)+hn(s,t),$$

* 本文讨论正则 G^1 连续曲面^[16]的求交问题。对于文中遇到的曲面都假设符合正则 G^1 连续的条件。

其中 $m(u,v)=G_u(u,v)\times G_v(u,v),n(s,t)=F_s(s,t)\times F_t(s,t)$ 为曲面的法向量, l,h 为 Offset 距离.不失一般性,设曲面 $G(u,v),F(s,t)$ 的参数域为 $[0,1]^2$.

定义 1. 曲面 $G(u,v),F(s,t)$ 上 P,Q 点的有向距离 $\vec{d}_{pg}(G(u,v),F(s,t))=\text{sign}(m(u,v)\cdot \vec{QP})\times\|P-Q\|$.其中 $m(u,v)$ 为 $G(u,v)$ 在 P 点的单位法向量.

定义 2. 取不同的 l,h ,曲面 $G^0(u,v),F^0(s,t)$ 产生一系列相切点,相切点沿法向映射到原表面上的点称为 $G(u,v),F(s,t)$ 上的特征点.

根据特征点分布的位置不同,可把它们分为内部特征点和边界特征点,曲面边界和曲面内部之间存在一定的差异,因此这两类特征点的求取和作用也有所不同.

1.1 内部特征点的特性及求取

根据定义 2,易得:

定理 1. 点对 $\{p,q\}$ 为 $G(u,v),F(s,t)$ 上拓扑特征点对的充分必要条件为 p,q 点的法向量同轴并且 \vec{pq} 和法向量平行.

对于特征点对 $\{p,q\}$,其中 $p(u_0,v_0)\in G(u,v),q(s_0,t_0)\in F(s,t)$,不妨设 $G^0(u,v),F^0(s,t)$ 在参数 $(u_0,v_0),(s_0,t_0)$ 相切时两曲面 Offset 距离为 l_0,h_0 ,则

$$G^0(u_0,v_0)=F^0(s_0,t_0), \tag{1}$$

从而使得 l_0,h_0 满足下式

$$\delta = \vec{d}_{pg}(G(u_0,v_0),F(s_0,t_0))+l_0-h_0\times\text{sign}(m(u_0,v_0)\cdot n(s_0,t_0))=0. \tag{2}$$

特征点、曲面的主曲率共同作用产生了曲面交线环的结构.表 1 归纳了特征点有向距离和曲面主曲率对交线环的作用.

Table 1 Relationship between TTP's directed distance, surface curvature and intersection curve structure

表 1 特征点有向距离、曲面主曲率和交线环之间的关系

δ	Relation of principal curvature	Effect to intersect curve topology	Kind of TTP
$\delta>0$	$Gk_u(u,v)^*Gk_v(u,v)>0$ and $Fk_s(s,t)Fk_t(s,t)>0$	Add a close intersect curve	①
$\delta>0$	One of $Gk_u(u,v)Gk_v(u,v)$ and $Fk_s(s,t)Fk_t(s,t)$ at least less than zero	Two intersect curve turn into one intersect curve	②

1.2 边界特征点的属性及求取

由于 $G(u,v),F(s,t)$ 之间具有对称性,本文只讨论 $G(u,v)$ 边界和 $F(s,t)$ 之间的特征点,其结论同样适用于 $F(s,t)$ 边界和 $G(u,v)$ 之间的特征点.

位于边界曲线上,满足定理 1 条件的点组成边界特征点的一个子集,记为 $BTTP_1$.表 2 归纳了 $BTTP_1$ 点集对交线拓扑的作用.

Table 2 Relationship between $BTTP_1$ and intersection curve structure

表 2 $BTTP_1$ 点集和交线环之间的关系

δ	Relation of principal curvature	Effect to intersect curve topology	Kind of TTP
$\delta>0$	$Gk_u(u,v)Gk_v(u,v)>0$ and $Fk_s(s,t)Fk_t(s,t)>0$	Add an open intersect curve	③
$\delta>0$	One of $Gk_u(u,v)Gk_v(u,v)$ and $Fk_s(s,t)Fk_t(s,t)$ at least less than zero	One close intersect curve turn into an open curve	④

不妨设 $G(u,v)$ 的边界曲线为 $b(t),b_i(t)$ 是边界曲线关于参变量的导数,则边界特征点满足

$$b_i(t)\cdot n(s,t)=0. \tag{3}$$

式(3)表述了边界特征点的充分条件,设满足式(3)的点在参数表面上的参数为 $(u_1,v_1),(s_1,t_1)$.对符合式(3)的点分以下两种情况进行讨论:

- I. $m(u_1,v_1),n(s_1,t_1)$ 平行

** $Gk_u(u,v),Gk_v(u,v),Fk_s(s,t),Fk_t(s,t)$ 分别为 $G(u,v),F(s,t)$ 的主曲率.

若 $G(u_1, v_1), F(s_1, t_1)$ 的连线和 $m(u_1, v_1)$ 平行, 那么该点是边界特征点, 但其属于 $BTTP_1$ 点集. 否则, 点对 $G(u_1, v_1), F(s_1, t_1)$ 不是边界特征点对.

II. $m(u_1, v_1), n(s_1, t_1)$ 不平行

由于 $m(u_1, v_1), n(s_1, t_1)$ 不平行, 必存在 Offset 距离 l_1 , 使得 $G^0(u_1, v_1)$ 和 $F(s_1, t_1)$ 连线平行于 $n(s_1, t_1)$, 使 $G^0(u_1, v_1), F^0(s_1, t_1)$ 在参数 $(u_1, v_1)(s_1, t_1)$ 相切, 只要满足下式即可,

$$\delta = \bar{d}_{pg}(F(s_1, t_1), G^0(u_1, v_1)) - h. \quad (4)$$

满足条件 II, 式(3)、式(4)的点集记为 $BTTP_2$, 表 3 归纳了 $BTTP_2$ 点集对交线拓扑结构的作用.

Table 3 Relationship between $BTTP_2$ and intersection curve structure

表 3 $BTTP_2$ 点集和交线环结构之间的关系

δ	Relation of principal curvature	Effect to intersect curve topology	Kind of TTP
$\delta > 0$ and $l = l_1$	$Gk_u(u, v)Gk_v(u, v) > 0$ and $Fk_s(s, t)Fk_t(s, t) > 0$	Add an open intersect curve	⑤
$\delta > 0$ and $l = l_1$	One of $Gk_u(u, v)Gk_v(u, v)$ and $Fk_s(s, t)Fk_t(s, t)$ at least less than zero	A close intersect curve turn into an open intersect curve	⑥

以上在讨论拓扑特征点对交线环的影响时只考虑了孤立特征点对交线环的影响, 实际上特征点也可以是一组孤立点组成的直线、曲线等. 为了讨论方便, 本文只讨论孤立点的情况, 对于连续特征点的情况, 将另文阐述.

2 根据拓扑相似性求取交线环初始点

拓扑特征点表征了不同 Offset 距离曲面之间交线的拓扑转化的内在规律. 通过拓扑特征点的求取, 可以计算出不同 Offset 距离曲面之间交线的拓扑差异和相似性. 根据交线环的拓扑相似性进行简化交线环求取过程.

曲面拓扑和几何复杂性将令等距曲面交线环拓扑的变化非常复杂, 令初始曲面的 Offset 距离为 0, 需求曲面的 Offset 距离为 l_1, h_1 , 当等距曲面 Offset 距离发生变化时, 对交线拓扑变化起作用的可能有一个、两个或多个拓扑特征点, 下文把 Offset 距离在 $0 \sim l_1, 0 \sim h_1$ 变化时特征点作用变化情况归纳为 6 种情况进行讨论. 其中第 6 种情况是把多个拓扑特征点同时出现的情况分解为单个特征点的情况进行处理. 图 2 显示了一个间距曲面的原曲面的交线环的分布情况, 其中 1, 2, 3, 4, 5 为 ①类特征点, 8 为 ②类特征点, 6 为 ③类特征点, 7 为 ④类特征点.

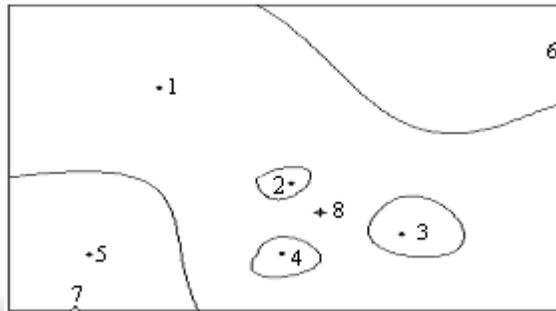


Fig.2 Surface TTP distribute graph

图 2 曲面特征点分布实例

下文将根据图 2 特征点分布来分析等距曲面的交线环的拓扑变化和初始点的求取.

(1) Offset 距离在 $[0, l_1] \times [0, h_1]$ 之间变化时没有新的特征点出现和失效

在这种情况下, 因为曲面的特征点数目没有发生变化, 所以交线环的结构没有发生变化, 新的交线环只是原交线环的外扩或收缩. 如果交线环包含的特征点的 δ 增大, 交线环外扩, 起始点可以在原有交线环沿法向向外查找, 否则沿相反方向查找.

(2) Offset 距离在 $[0, l_1] \times [0, h_1]$ 之间变化时增加或失效一个 ①类特征点

其他特征点对交线环的作用按照(1)的方法进行交线环求取, 对于新增加的特征点在原有的交线环结构中增加一个封闭交线环. 新交线环起始点可以从特征点开始, 向一个确定方向进行寻找. 如果一个特征点失效, 包含 ①类特征点的交线环消失, 则不再计算消失特征点附近的交线情况.

(3) Offset 距离在 $[0, l_1] \times [0, h_1]$ 之间变化时增加或失效一个②类特征点

根据以上分析可知,新增加特征点可以使两个交线区域合并为一个交线区域,但是并不知道具体对哪些区域进行合并,如图 2 所示,特征点 8 不能确定合并特征点 2,3,4 周围 3 个区域中的哪两个.因此,新交线环应该通过 1,2,3 方法对原有特征点进行交线环的求取,在求得的交线环中进行对特征点 2,3,4 的包含性测试,以确定交线环的合并规律.比如,先取 2 号特征点的交线环根据 1 的方法计算起始点,然后跟踪产生一个交线区域,对新产生的交线区域进行包含性测试^[16].确定交线环是否包含了 8 和 3,4 特征点,若求得的交线区域不包含 8,3,4 的任何一个特征点,则 2 号特征点不参加交线区域的合并,则特征点 8 对特征点 3,4 起作用.否则,若交线区域包含了 8,3,则特征点 8 合并特征点 2,3 产生的交线区域.否则,对于失效的特征点,由于包含失效特征点的交线环包含两个以上的其他类型的特征点,起始点可以从各个特征点和失效特征点连线上寻找.

(4) Offset 距离在 $[0, l_1] \times [0, h_1]$ 之间变化时增加或失效一个③类特征点

对于增加一个特征点,新交线环起始点从新特征点开始沿着边界向一个确定方向寻找.否则,包含失效特征点的开环消失.

(5) Offset 距离在 $[0, l_1] \times [0, h_1]$ 之间变化时增加一个④类特征点

起始点从新特征点开始沿着边界进行寻找.对得到的交线环,进行包含性测试,对新交线环包含的特征点不再求取交线环.

(6) Offset 距离在 $[0, l_1] \times [0, h_1]$ 之间变化时增加、失效两个或多个类特征点

这种情况比较复杂,但是可以把多个特征点分开进行处理,首先根据 δ 值对特征点进行排序,然后求取在每个特征点刚好产生交线环时曲面交线环的结构,因此在处理每一个特征点时可以采用 1~8 所述的方法进行处理.当所有的新增特征点处理完毕时,曲面的交线环也已经求得.

3 算法流程和实验结果分析

通过以上讨论可以确定等距曲面交线在原曲面参数空间上交线轨迹的拓扑,根据拓扑结构确定交线环初始点的求取策略.下面是算法的主要流程:

- (1) 根据 $G(u, v), F(s, t)$ 的高斯映射^[17],计算所有法向同轴的点,在同轴点集合中,取出所有符合定理 1 条件的点,根据式(2)、式(3)和表 1 进行分类存储.
- (2) 计算所有的边界特征点集.
- (3) 采用文献[14,15]的方法,计算原曲面的交线,并利用第(1),(2)两步得到的特征点集进行检验.
- (4) 对不同的 l, h 计算新出现和失效的特征点,根据第 2 节的讨论,进行起始点的寻找.
- (5) 采用跟踪法,在交线环拓扑特征信息和初始点的指导下,动态设置跟踪法^[18,19]的步长,计算所有的交线环.
- (6) 对拓扑特征点和交线环进行包含性验证,利用拓扑特征点进行交线环正确性验证.

以上算法在一台 PIII677 微机进行了算法实现.如图 3 所示曲面为矩形域上的 B 样条曲面,如图 4 所示的曲面为矩形域上的 B 样条曲面.图 5 是两曲面 $G(u, v), F(u, v)$ 对应拓扑特征点分布情况,图中有 24 个拓扑特征点,在图 6~图 10 中分析了特征点的作用.程序对 5 组不同 Offset 距离的曲面进行求交运算求取交线环.

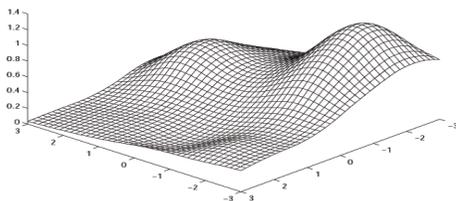


Fig.3 Surface $G(u, v)$
图 3 曲面 $G(u, v)$

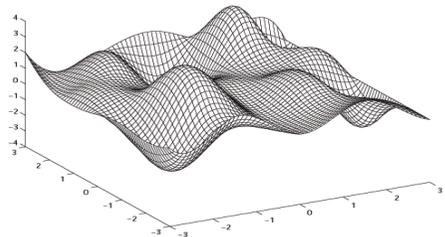


Fig.4 Surface $F(s, t)$
图 4 曲面 $F(s, t)$

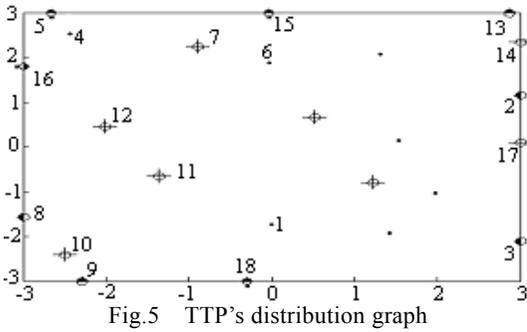


图 5 特征点分布图

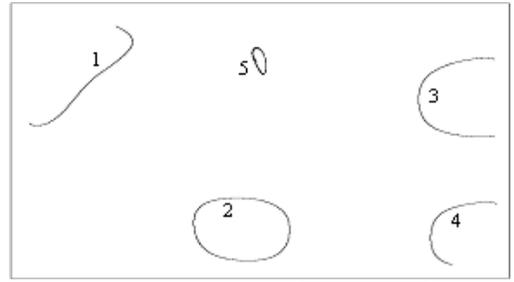


Fig.6 $h=-1, l=-0.5$, 2nd and 4th together with 5th TTP create 1st intersection loop, 1st and 6th TTP create enclosed intersection loop, 2nd and 3rd TTP create 3rd and 4th open curves

图 6 $h=-1, \lambda=-0.5$, 特征点 2,4,5 共同作用产生开环 1, 特征点 1 起作用产生闭环 2, 特征点 2,3 分别产生 3,4 开环

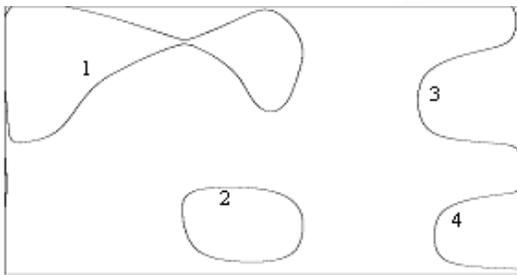


Fig.7 $h=0, l=0$, 7th TTP merge 1st and 5th curve into 1 intersection curve

图 7 $h=0, l=0$, 特征点 7 合并交线环 1 与 5 环于 1

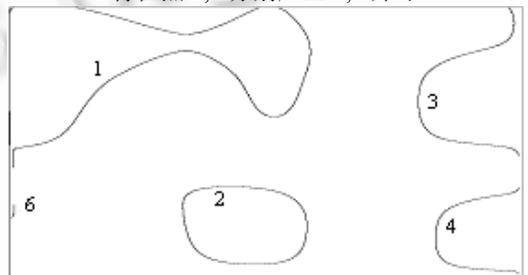


Fig.8 $h=0.1, l=0.05$, 8th TTP create 5th open curve

图 8 $h=0.1, l=0.05$, 出现新特征点 8, 产生新开环 5

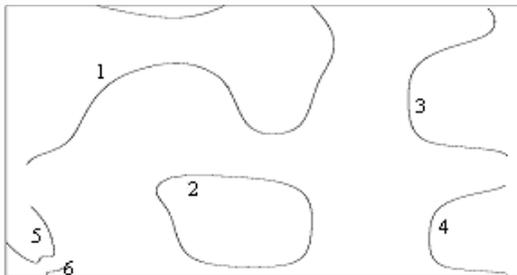


Fig.9 $h=0.6, l=0.3$, 9th TTP creates 6th open curve

图 9 $h=0.6, l=0.3$, 特征点 9 产生新的开环 6

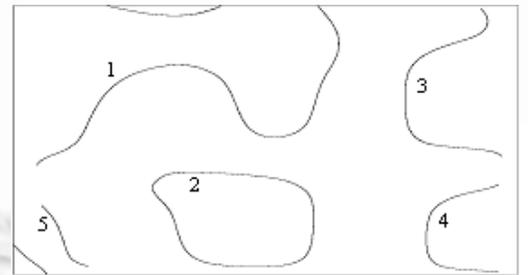


Fig.10 $h=0.7, l=0.35$, 10th TTP merge 5th and 6th intersection curve into 5th intersection curve

图 10 $h=0.7, l=0.35$, 特征点 10 使交线环 5,6 合并为一个开环 5

4 结论与展望

等距曲面通常采用曲面求交算法反复迭代计算交线,没有考虑不同 Offset 距离等距曲面交线的相似性进行求交简化,采用本文的基于拓扑相似性的等距曲面求交优化算法.可以根据原表面上的特征点和不同 Offset 距离等距曲面交线环之间的拓扑相似性简化交线求取过程.算法首先求取对曲面交线拓扑起决定作用特征点,根据特征点分布图,确定交线环拓扑结构和初始点的搜索策略,减少交线环的搜索范围.

等距曲面不同交线之间存在着内在的必然的联系,本文通过大量的实验数据进行了算法的可行性分析,并根据交线环内在性质研究方面提出了基于拓扑相似性的等距曲面求交算法,算法可以有效地解决等距曲面求交的子环和奇点遗漏,高效地求解交线环的起始点.

本文围绕孤立特征点进行曲面交线求取过程的详尽讨论,但对于连续特征点属性的性质和它对交线环的

影响没有进行讨论,对连续特征点性质是将来研究需要解决的问题.

致谢 浙江大学人工智能研究所的童若锋副教授对本文的工作给予了细心的指导,刘生礼博士、欧阳应秀博士、宓晓峰硕士、陈勇硕士、张良俊硕士和英正明硕士等人对本文的完成提出了很多有益的建议,在此一并表示感谢.

References:

- [1] Abdel-Malek K, Yeh H-J. On the determination of starting points for parametric surface intersections. *Computer Aided Design*, 1997,29(1):21~35.
- [2] Chang LC, Bein WW, Angel E. Surface intersection using parallelism. *Computer Aided Geometric Design*, 1994,11(1):39~69.
- [3] Grandine T, Klein IV FW. A new approach the surface intersection problem. *Computer Aided Design*, 1997,30(14):111~134.
- [4] Ma Y, Lee YS. Detection of loops and singularities of surface intersections. *Computer Aided Design*, 1998,30(14):1059~1067.
- [5] Mullenheim G. On determining start points for a surface/surface intersection algorithm. *Computer Aided Design*, 1991,8(5):401~408.
- [6] Wang Y. Intersection of offsets parametric surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 1996,13(5):453~465.
- [7] Ma YW, Lee YS. Detection of loops and singularities of surface intersections. *Computer Aided Design*, 1998,30(14):1059~1067.
- [8] Hohmeyer ME. Robust and efficient intersection for solid modeling [Ph.D. Thesis]. Department of Electrical Engineering and Computer Science, Computer Science Division, University of California, Berkeley, 1992.
- [9] Krishnan S, Manocha D. An efficient surface intersection algorithm based on lower dimensional formulation. Technical Report, TR94-064, Department of Computer Science, University of North Carolina, 1994.
- [10] Cha SJ, Dong SK, Deok Sk, Hyun CL, Jiseon Hwang. Surface slicing algorithm based on topology transition. *Computer Aided Design*, 2001,33(11):825~838.
- [11] Tait SS, Rada TF, Mohammad AK, Helmut P. Optimal slicing of free-form surfaces. *CAGD*, 2002,19(1):43~64.
- [12] Kulkarni P, Dutta, D. Adaptive slicing of parameterizable algebraic surfaces for layered manufacturing. In: Azrarm S, *et al.*, eds. *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conferences*. New York: ASME, 1995,(1):211~217.
- [13] Nackman LR. Two-Dimensional critical point configuration graphs. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1984,8(5):401~408.
- [14] Tang M, Dong, JX, Li HL, He ZJ. Boolean operation of non-regular precise geometric models. *Journal of Software*, 1999,10(12):1291~1297 (in Chinese with English abstract).
- [15] Tang M, Dong JX. An accurate intersection method for sculptured solids. *Chinese Journal of Computers*, 2000,23(4):434~439 (in Chinese with English abstract).
- [16] O'Rourke J. *Computational Geometry in C*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [17] Tait SS, Rida TF. Gauss map computation for free-form surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 2001,18(9):831~850.
- [18] Grandine TA, Klein IV FW. A new approach to the surface intersection problem. *Computer Aided Geometric Design*, 1997,14(2):111~134.
- [19] Wu ST, Andrade LN. Marching along a regular surface/surface intersection with circular steps. *Computer Aided Geometric Design*, 1999,16(4):249~268.

附中文参考文献:

- [14] 唐敏,董金祥,李海龙,何志均,非正则精确模型的布尔操作. *软件学报*,1999,10(12):1291~1297.
- [15] 唐敏,董金祥.雕塑实体的精确求交算法. *计算机学报*,2000,23(4):434~439.