

# 基于样图的排样及其样图检索方法\*

马 建, 腾弘飞, 刘德全

(大连理工大学 机械工程系, 辽宁 大连 116024)

(中国科学院 现代制造 CAD/CAM 技术开放实验室, 辽宁 沈阳 110015)

E-mail: Tenghf@dlut.edu.cn

**摘要:** 为解决不规则图形排样问题, 讨论了基于实例(样图)的推理方法在零件排样问题中的应用, 给出了基于样图的排样系统结构。此方法的一个关键问题是已在知待排的零件组和板材的前提下, 如何从样图库中检索出相应样图的图形匹配方法。为此提出了基于图形(组)简化骨架的模式编码的串间 Findler 距离的图形(组)之间相似性检索算法, 并给出了算例验证。

**关键词:** 排样; 样图; 基于实例; 图形匹配; Findler 距离

**中图法分类号:** TP391      **文献标识码:** A

排样问题是一个 NP 困难问题, 迄今为止, 国内外学者已经提出了许多求解方法, 但是, 对于不规则零件的排样问题仍未能很好地得到解决<sup>[1]</sup>。用计算机辅助排样解决矩形零件排样问题可以提高排样效率和质量, 然而对复杂的不规则零件的排样, 计算机辅助排样还赶不上有经验的人工排样结果<sup>[2]</sup>。实践表明, 当人工进行零件排样时, 在对待排零件做了考察之后, 一般要对工厂中已经完成的大量零件排样施工图进行分析, 看是否有与本次待排零件组在特征上相似的样图, 如果有, 则以此作为参考, 完成排样。这实际上就是人工智能中的基于实例的推理方法<sup>[3]</sup>, 尤其是对经验丰富而理论不完善的问题(例如复杂零件排样问题), 更显示出其强大的问题求解的能力。因此, 基于实例的推理方法应用于零件排样问题就成了一个重要途径, 从而产生了基于样图的布局方法。

文献[2,4]给出了基于样图(实例)的排样方法框架, 但尚显粗略, 本文对此做了改进。这种基于样图的方法的关键是, 在给定待排零件和板材的情况下, 如何解决从排样样图库中检索出相应的样图, 该归结为要给出其样图的相似性检索方法, 目前尚缺乏讨论, 本文将此作为重点。

## 1 基于样图的排样系统结构

目前, 国内外相继出现了一些以基于实例推理为基本方法的面向特定产品的设计求解系统, 在理论研究与实际应用两方面均做了有益的探索和尝试<sup>[5~7]</sup>。这些系统虽然不是用于排样问题, 但同样具有借鉴意义。本文在对基于样图的排样设计行为的基本求解方法和流程进行分析和描述的基础上, 提出一个完整的、较为通用的、以实例推理为主体并综合了启发式推理等演绎推理方法的排样设计问题求解系统框架, 构造了一个基于样图的排样系统。系统的总体结构图如图 1 所示。

基于样图的排样系统由推理机模块、样图图形数据库和用户界面构成。其核心是推理机模块, 由 3 个推理机组成: 元推理机、基于样图的推理机和基于启发式算法的推理机。下面分别对各模块的功能和特点作一介绍。

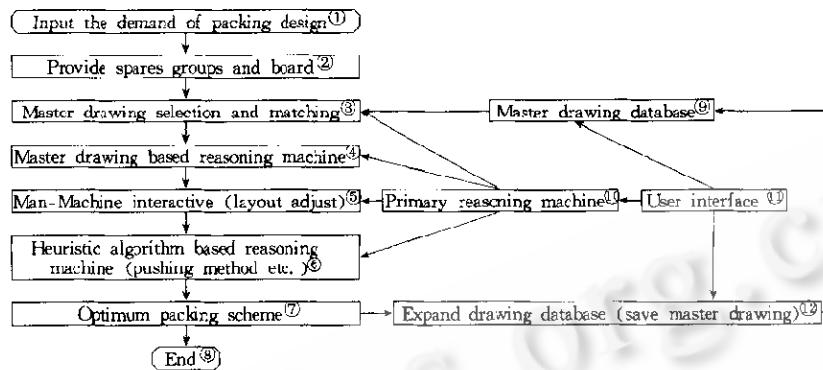
(1) 元推理机: 系统运行的总控机, 它直接与用户界面相连, 管理系统总体运作, 控制系统行为, 调用不同的

\* 收稿日期: 1999-05-24; 修改日期: 1999-09-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69573004, 69974002, 60073036); 国家 863 航天领域高技术资助项目(863-205-8-3 子课题)

作者简介: 马建(1974—), 男, 山东烟台人, 硕士, 主要研究领域为计算机图形学, 图形图像识别; 腾弘飞(1936—), 男, 辽宁大连人, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为智能 CAD 与优化, 演化算法, 人机合作, 机器写作; 刘德全(1965—), 男, 河北清城人, 博士, 副教授, 主要研究领域为智能 CAD 与优化, 计算机图形学。

功能模块以完成相应的动作，并控制系统从一个模块到另一个模块的转化操作以及数据在模块之间的正确转化，监视排样设计的进程。



①输入排样设计技术要求,②给定待排零件组和板材,③样图选择及匹配,④基于样图的推理机,⑤人机交互(布局调整),⑥基于启发式算法的推理机(推挤法等),⑦优化排样方案,⑧结束,⑨样图库,⑩元推理机,⑪用户界面,⑫扩充图库(存储样图).

Fig. 1 The structure of master drawing based layout system

图1 基于样图的布局系统总体结构

(2) 基于样图的推理机:根据排样设计任务,通过检索,从样图库中提取一组与当前排样要求相似的样图,并按它们的相似度排序,提供给用户选择其中的一张样图或自动地由系统认定相似度最高的样图,映射到目标方案.本文提出该相似检索方法,详见下文.

(3) 基于启发式算法的推理机:完成对目标排样方案的知识推理.对经过人机交互的布局调整后的排样图用启发式算法(如推挤法<sup>[2]</sup>、遗传算法<sup>[8,9]</sup>)进行优化,并对排样方案进行约束检查,指出被违反的约束,修改排样方案,直到它满足全部约束.

基于样图的推理机实际上是一个基于实例的推理机,要求输入待排零件的详细信息说明,并且对零件信息进行索引,生成检索关键字,然后根据这些检索关键字对样图库进行检索,返回一张或几张与当前的待排样问题最匹配的样图.对于选出的样图,由元推理机提交人机交互进行布局调整,如果调整成功,当前排样问题就解决了;否则,基于启发式算法的推理机就采用启发式算法<sup>[2,8,9]</sup>对此样图进一步进行修改,生成最终排样图.

样图图形数据库是基于实例推理机的实例库,存储样图及样图索引文件.为了不断地扩充图库,本系统还可以将调整成功的排样图作为新样图存入图库,并且提供对样图库的查询、修改等维护工作.用户界面提供了布局调整过程中人机交互的途径,并直接进行样图库的管理和系统的输入、输出操作.

## 2 零件图形匹配和样图检索

本文所提出方法的难点是,在给定若干待排零件(已知数量、形状、尺寸)和一张或几张矩形板材的前提下,如何从样图图形数据库中检索出优化的排样施工图作为样图.这个问题可以归结为图形组之间的匹配问题.

### 2.1 零件几何图形的描述和特征提取

设零件图形为多边形,在图形匹配中考虑的是图形的匹配特征,分为主特征(包括图形的形状、尺寸等)与辅助派生特征(包括图形的面积等).在样图检索中考虑的是排样样图与待排零件图形组之间的匹配特征,也可分为主特征(包括矩形板材尺寸、待排零件个数、每个零件的形状和尺寸等)与辅助派生特征(包括每个零件面积、零件组总面积等).

关于特征提取,本文给出的方法是基于结构特征的方法<sup>[10]</sup>.本文的图形特征抽取是采用中轴变换方法(又称点火法<sup>[11]</sup>)提取图形简化骨架,整个简化骨架结构表示图形形状(拓扑),简化骨架长度表示图形的几何(尺寸),如图2所示.该图经中轴变换形成3个层次的简化骨架.

样图库中存储的是样图的物理图像或图形信息,其几何特征信息是通过物理的图像或图形的方式表达和存

储的,而样图的相似性检索则需要进行样图之间几何特征信息的数值比较和计算,这就需要将样图的几何特征信息提取出来以数值的方式存储,以便进行零件图间的匹配判断和样图的相似性检索。我们称样图的几何特征的抽取过程为索引,抽取出来的特征信息则存储于索引文件中(文件名为\*.INX)。

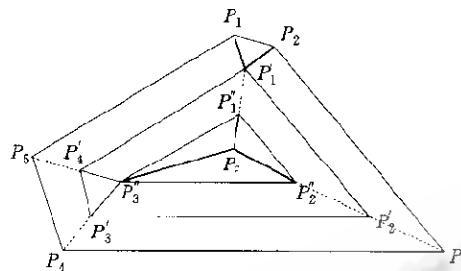


Fig. 2 The formation of simplified skeletons of convex polygon  
图2 凸多边形简化骨架集的生成

在本文中,索引文件采用域的存储方式,不同的域存储不同的域值,以关键字为标识符对索引文件进行读写及检索操作。索引文件的结构包括域名关键字、域值关键字和域值数据3部分。

## 2.2 图形几何特征提取的骨架集的编码

我们把多边形在进行中轴变换时每次产生的一对骨架作为图形简化骨架集的模式基元,整个骨架表示图形的形状(拓扑),骨架的长度数值表示图形的几何(尺寸)。简化骨架集中所有具有不同长度数值的骨架表达了图形的尺寸等几何特征信息。这里,对骨架线条长度用合适的字符表示,形成编码串,方法如下:

采用编码字母表方法,用英文字母表中前n个小写字母(这里取10,即a到j)。当然,也可以用其他字符集作为编码字母表中的字母元素,字母表中的字母元素数量也是可以变化的。需要指出的是,字母表中的字母元素越多,则用来代表骨架就越精确,计算费用相应地也就越高。但是,不管采用由多少个字母元素组成的字母表,编码时都要保证编码串中的字符均来自同一个字母表。

选出两个或两组图形的简化骨架,集中骨架长度的最大值 $L_{\max}$ 与最小值 $L_{\min}$ ,分别对应到数轴上相应的位置。把数轴上从骨架长度最小值 $L_{\min}$ 到最大值 $L_{\max}$ 的区间等分成n等份(本文取为10),每一个小区间的长度是 $(L_{\max} - L_{\min})/n$ 。把骨架长度数值 $L_i$ 落在最小值区间,即 $L_i \in [L_{\min}, L_{\min} + (L_{\max} - L_{\min})/n)$ 的骨架,以字母表中第一个字母(本文为a)表示;把骨架长度数值 $L_i$ 落在最大值区间,即 $L_i \in [L_{\min} + (n-1) \times (L_{\max} - L_{\min})/n, L_{\max}]$ 的骨架,以字母表中最后一个字母(本文为j)表示。依此类推,根据骨架长度数值在数轴上的不同区间,分别以字母表中不同的字母表示。为了更精确地描述每一条骨架,骨架的长度数值将作为属性描述补充到结构符号中。

用以上方法对简化骨架集进行编码,编码串中的每一个字符,是由英文字母表示的骨架线条的归一化长度。本文给出编码串的有关定义。

**定义1**(编码串中的基本元素). 我们称简化骨架集中骨架的归一化长度 $l_i$ 为编码串中的基本元素(这里, $l_i$ 为英文字母)。

**定义2**(编码串中的属性元素). 我们称简化骨架集中骨架的精确长度 $D_i$ 为编码串中的属性元素(这里, $D_i$ 为实数值)。

**定义3**(编码串 $L$ ). 编码串 $L$ 为编码串基本元素( $l_i$ )与属性元素( $D_i$ )的一个序列,表示为

$$L = l_1(D_1)l_2(D_2)l_3(D_3)l_4(D_4)\dots l_{n-2}(D_{n-2})l_{n-1}(D_{n-1})l_n(D_n) = S_{i=1}^n l_i(D_i), \quad L_{\min} \leq D_i \leq L_{\max}.$$

其中 $L_{\min}, L_{\max}$ 分别为简化骨架集中骨架长度可能具有的最小值与最大值。为简便起见,可以直接用基本元素( $l_i$ )的一个序列组成编码串,表示为

$$L = l_1l_2l_3l_4\dots l_{n-2}l_{n-1}l_n = S_{i=1}^n l_i.$$

这里,n是简化骨架集中骨架元素的数量,S表示骨架元素的一个序列,编码串中基本元素按简化骨架产生的先后顺序排列。

**定义4.** 如果两个编码串之间存在一一对应相等的关系,我们称两个编码串序列相等:

$$S_{i=1}^n a_i = S_{i=1}^m b_i, \quad \text{如果 } m=n, a_i=b_i,$$

这种情况下可以认为两个图形完全匹配.

### 3 待排零件组与排样样图的匹配计算

设待排零件组为  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $a_i (i=1, \dots, n)$  为待排零件,  $n$  为待排零件个数, 所需板材为  $A_0$ . 排样样图上零件组  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ,  $b_i (i=1, \dots, m)$  为样图中已排好的零件,  $m$  为样图中零件个数, 板材为  $B_0$ . 设待排样零件组总面积为  $S_A$ , 排样样图上零件组总面积为  $S_B$ , 则两个零件组面积需满足条件  $S_A \leq S_B$ , 零件个数  $n \leq m$ .

待排零件组  $A$  与排样样图  $B$  的匹配判断依以下优先序列进行: 首先, 进行图形组总面积和零件图形个数的比较, 若  $A$  和  $B$  之间相近, 则认为两图形组可能匹配, 否则不匹配. 然后, 计算骨架编码串之间的 Findler 距离, 作为图形组相似性度量的数值.

骨架编码串之间的 Findler 距离的判断方法是, 零件组中的零件按面积递减的次序排序, 然后把排序后的不同零件的简化骨架编码串连接起来, 组成一个长编码串作为零件组的编码串, 进而计算不同零件组编码串间的 Findler 距离<sup>[12]</sup>, 作为零件组间匹配性度量. 这种 Findler 距离判断方法过去用来判断字符串的相似程度, 而不曾用于图形匹配判断.

本文对编码字符串的 Findler 相似性度量方法进行了改进, 使其适用于简化骨架特征编码串的相似性度量问题. 这种方法的基本原则是在两个线性有序集上进行数字比较, 也就是说, 在两个串中进行数字比较, 其中, 串的长度可以不同, 而元素必须来自同一个字母表. 一个元素在串中可以出现多次. 比较的结果给出两个串间的相似性度量, 而总值总在 0 与 1 之间变化. 当两个串完全不同时, 取 0 值; 当两个编码串完全相同时, 取 1 值.

设有两个编码串  $x$  和  $y$ , 分别由  $m$  和  $n$  个有序元素组成, 元素来自同一个字母表, 每个元素及元素的子串在串中均可任意多次地出现.

令

$$F(x, y) = T(x, y) / N(x, y), \quad (1)$$

其中  $T(x, y)$  是同一子串在  $x$  和  $y$  中出现的次数及其长度的函数,  $N(x, y)$  是一个使得  $F(x, y)$  满足值在  $[0, 1]$  区间内的正规化函数.

设  $P(S; \alpha)$  表示子串  $\alpha$  在  $S$  中发生(包括重叠部分)的次数. 如果  $|\alpha|$  表示串  $\alpha$  的长度, 则可能选择的式(1)中的  $T(x, y)$  为

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \sum_{\alpha} \min\{P(x; \alpha), P(y; \alpha)\} |\alpha|, \\ T_2 &= \sum_{\alpha} \max\{P(x; \alpha), P(y; \alpha)\} |\alpha|, \\ T_3 &= T_1 / T_2 = \sum_{\alpha} \min\{P(x; \alpha), P(y; \alpha)\} |\alpha| / \sum_{\alpha} \max\{P(x; \alpha), P(y; \alpha)\} |\alpha|, \\ T_4 &= \sum_{\alpha} [\min\{P(x; \alpha), P(y; \alpha)\} / \max\{P(x; \alpha), P(y; \alpha)\}] |\alpha|, \\ T_5 &= \sum_{\alpha} [\min^2\{P(x; \alpha), P(y; \alpha)\} / \max\{P(x; \alpha), P(y; \alpha)\}] |\alpha|. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

同样地, 可能选择的  $N(x, y)$  为

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 1, \\ N_2 &= \sum_{\alpha} \min\{P(x; \alpha), P(y; \alpha)\} |\alpha|, \\ N_3 &= \sum_{\alpha} \max\{P(x; \alpha), P(y; \alpha)\} |\alpha|, \\ N_4 &= \left[ \sum_{\alpha} P(x; \alpha) |\alpha| \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{\alpha} P(y; \alpha) |\alpha| \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} [m(m+1)(m+2)n(n+1)(n+2)]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

从上述  $T_i$  及  $N_j$  ( $i=1, 2, \dots, 5; j=1, 2, \dots, 4$ ) 中挑选出满足要求的搭配<sup>[12]</sup>:

$$\left. \begin{array}{l} F_{13}=T_1/N_3, \quad F_{14}=T_1/N_4, \quad F_{31}=T_3/N_1, \quad F_{43}=T_4/N_3, \\ F_{44}=T_4/N_4, \quad F_{53}=T_5/N_3, \quad F_{54}=T_5/N_4 \end{array} \right\} \quad (4)$$

作为串  $x$  与串  $y$  之间的相似性度量。

本文取 7 个度量的加权平均值作为编码串相似性度量的数值,这样,编码串  $x$  与  $y$  的相似性度量公式定义为

$$F_{(x,y)} = \alpha_1 F_{13} + \alpha_2 F_{14} + \alpha_3 F_{31} + \alpha_4 F_{43} + \alpha_5 F_{44} + \alpha_6 F_{53} + \alpha_7 F_{54}, \quad (5)$$

其中  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$  为 7 个度量的权重值,且要满足条件  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = 1.0$ 。

在零件组编码串中不但含有每个零件的简化骨架线条信息,还含有每个图形的整体几何特征信息。在计算零件组之间的距离时,简化骨架信息与图形的整体几何特征信息会同时被考虑,这样就保证了在进行图形组之间的匹配计算时不会丢失每一个图形的特征信息(形状和尺寸)。

#### 4 算例

为了验证本算法,构造在一个给定的矩形板材上切割出 7 种 21 个零件,板材空间利用率为 100% 的算例样图 A(如图 3 所示),然后再构造出两个空间利用率低于 100% 的排样图 B 和 C 的算例(如图 4 和图 5 所示)。现在的问题已知一组待排样零件(由样图 A 矩形板中切割出的零件,如图 3(b)所示),在样图库中(已存样图 A,B,C,分别如图 3(a)、图 4(a)和图 5(a)所示)找出一张最优排样的样图。很明显,此样图为图 3(a),现在相当于已知最优解,用本文方法去验证是否能找到此最优解。

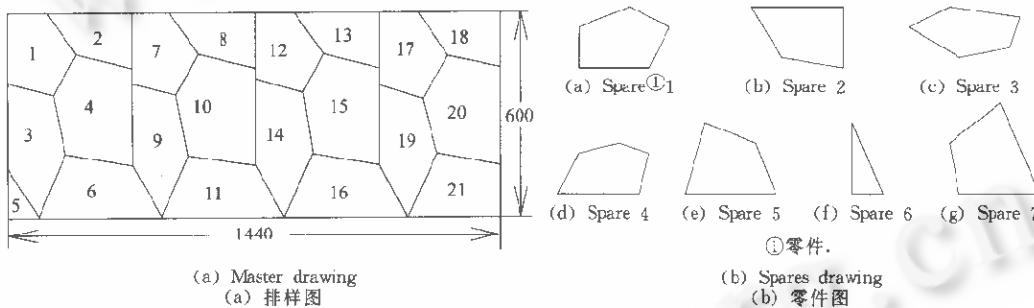


Fig. 3 Master drawing A with 100% coverage

图3 板材利用率为100%的样图A

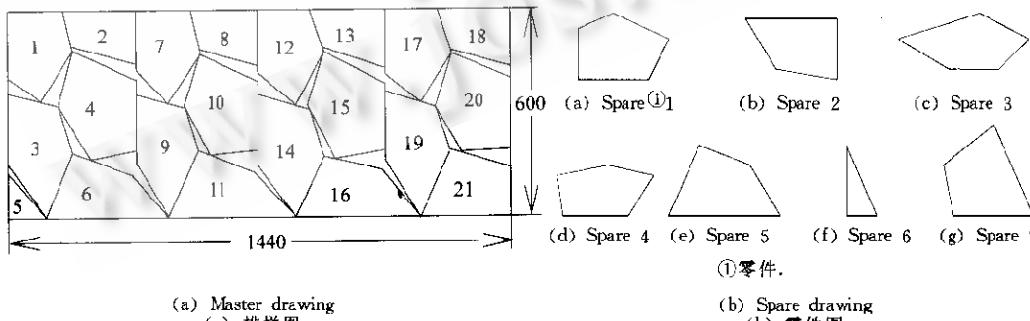


Fig. 4 Master drawing B with 91.76% coverage

图4 板材利用率为91.76%的样图B

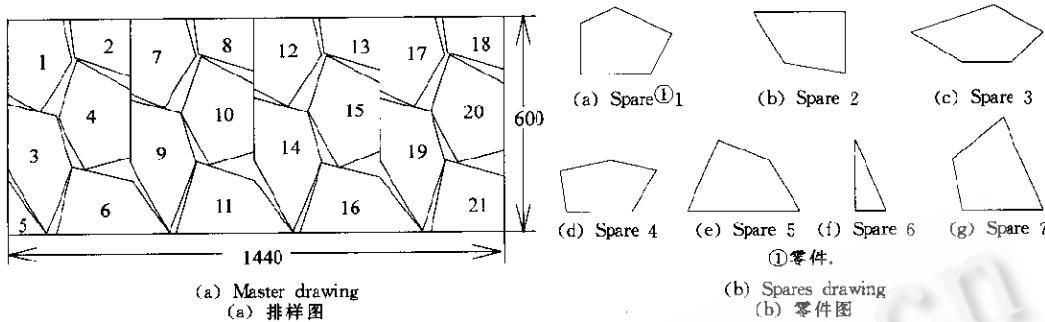


Fig. 5 Master drawing C with 88.74% coverage

图5 板材利用率为88.74%的样图C

样图B与样图C(如图4(a)、图5(a)所示)的板材利用率分别为91.76%和88.74%。表1为待排样零件组(样图A、样图B、样图C零件组)的编码串,表2为待排样零件组分别与样图B与样图C的相似性度量结果。由结果可以看出,待排样零件组与样图B和样图C的相似性均小于与样图A的相似性(Findler距离为1.0),这样就从样图库中找出了适用于当前待排样零件组的最优排样样图(样图A),最后参照样图A对给定的待排样零件组进行排样(本例中板材利用率为100%)。本文所提出的方法有以下几个优点:对过去较优的排样求解结果直接复用,而不是从头再次推导,可以提高对复杂排样问题的求解效率;不必建立数学模型或仅建立简单的数学模型;有自学习能力,每设计完一个排样方案,系统就多了一个排样设计实例,其推理能力也就得到增强。

Table 1 The strings of spares groups

表1 各样图零件组编码串

Spare group <sup>①</sup>	String <sup>②</sup>
Packing spares group $S_d$ (master drawing A) <sup>③</sup>	hjaaaaabfiaaeghaadegaaabcfgaaaaabdhaaccdh
Spares group $S_1$ in master drawing B <sup>④</sup>	fgaaaaabhhaaaabejaaaejaaaaabfhuuudgaabceg
Spares group $S_2$ in master drawing C <sup>⑤</sup>	ihabaaaafiaaeghaaccgaaabcdejaabciaaccdg

①零件组,②编码串,③待排样零件组  $S_d$ (样图A),④样图B零件组  $S_1$ ,⑤样图C零件组  $S_2$ 。

Table 2 The similarity measure between packing spares group and those in master drawing B and C

表2 待排样零件组分别与样图B和样图C零件组的相似性度量

Items <sup>①</sup>	$(S_d, S_1)$	$(S_d, S_2)$	Items	$(S_d, S_1)$	$(S_d, S_2)$
$T_1$	219	189	$F_{13}$	0.011 0	0.008 9
$T_2$	19 859	21 074	$F_{14}$	0.016 2	0.011 5
$T_3$	0.011 0	0.008 9	$F_{31}$	0.011 0	0.008 9
$T_4$	71.58	56.46	$F_{43}$	0.003 6	0.002 8
$T_5$	148.5	138.65	$F_{44}$	0.005 1	0.003 5
$N_1$	1	1	$F_{53}$	0.005 3	0.006 9
$N_2$	219	189	$F_{54}$	0.011 2	0.008 5
$N_3$	198.59	20 121	$F$	0.008 6	0.007 3
$N_4$	13 483	16 325			

①项目。

## 5 结束语

本文讨论基于实例的推理方法在零件排样问题中的应用,给出了基于样图的排样系统结构,提出了基于图形(组)简化骨架模式编码串间Findler距离的样图实例相似性检索算法,并给出了算例验证,用以解决传统的排样过程中对于凸多边形形状(对于非凸多边形零件问题需用凸包方法先将其转化为凸多边形)零件排样材料利用率不高的问题。

**References:**

- [1] Dowsland, K. A., Dowsland, W. B. Packing problems. *European Journal of Operational Research*, 1992, 56(1): 2~14.
- [2] Li, Z., Milenkovic, V. Compaction and separation algorithms for non-convex polygons and their applications. *European Journal of Operational Research*, 1995, 84(3): 539~561.
- [3] Koloder, J., Mark, W. Case-Based reasoning. *IEEE Expert*, 1992, 7(5): 5~6.
- [4] Teng Hong-fei, Gao Xuan, Yu Zhi-cheng. Engineering application of manual of Chinese go to packing problem. *Journal of Dalian University of Technology*, 1995, 35(4): 487~492 (in Chinese).
- [5] Slator, B. A case-based advisor. *International Journal of Expert System*, 1991, 4(2): 117~140.
- [6] Pearce, M. Case-Based design support: a case study in architectural design. *IEEE Expert*, 1992, 7(5): 14~20.
- [7] Cai Ni-shui, Zou Hui-jun, Wang Shi-gang, et al. Application of analogical reasoning in the conceptual design CAD system. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 1997, 31(3): 70~73 (in Chinese).
- [8] Liu De-quan. Theory and method for packing problem of two-dimensional irregular shapes [Ph. D. Thesis]. Dalian: Dalian University of Technology, 1998 (in Chinese).
- [9] Liu De-quan, Teng Hong-fei. An improved BL-algorithm for genetic algorithm of the orthogonal packing of rectangles. *European Journal of Operational Research*, 1999, 112(2): 413~420.
- [10] Loncaric, S. A survey of shape analysis techniques. *Pattern Recognition*, 1998, 31(8): 983~1001.
- [11] Blum, H. A transformation for extracting new descriptors of shape, in editor, *Models for the Perception of Speech and Visual Form*. Cambridge, MA: MIT Press, 1967. 362~380.
- [12] Findler, N. V., Leuwen, J. V. A family of similarity measures between two strings. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1979, PAMI-1(1): 116~118.

**附中文参考文献:**

- [4] 腾弘飞,高轩,郁志诚.中国围棋棋谱在表填布局中的工程应用.大连理工大学学报,1995,35(4):487~492.
- [7] 蔡逆水,邹慧君,王石刚,等.类比推理在智能化概念设计中的应用.上海交通大学学报,1997,31(3):70~73.
- [8] 刘德全.计算机辅助排样的理论方法及其实现[博士学位论文].大连:大连理工大学,1998.

**A Nesting Method Based on Master Drawings and Their Similarity Retrieval**

MA Jian, TENG Hong-fei, LIU De-quan

(Department of Mechanic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China);

(Open Laboratory of CAD/CAM Technology for Advanced Manufacturing, The Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110015, China)

E-mail: Tenghf@dlut.edu.cn

Received May 24, 1999; accepted September 30, 1999

**Abstract:** The nesting problem of irregular shapes has not been solved completely so far. This paper introduces case (master drawing) based reasoning method for solving nesting problem and presents the structure frame of nesting system based on the master drawings. The key aspect of this method is shape matching, which can be described as when the spare groups and board are provided, how to retrieve corresponding master drawing from drawing database. A similarity retrieval algorithm for master drawings is proposed in this paper based on the Findler distance between pattern strings of the shapes' simplified skeletons. A numerical example shows the method is effective.

**Key words:** nesting; master drawing; case-based reasoning; shape matching; Findler distance