

K -means 聚类方法下的复数图像群组稀疏编码降噪算法^{*}

刘伯禹, 吴玲达, 郝红星



(航天工程大学 复杂电子系统仿真实验室, 北京 101416)

通讯作者: 刘伯禹, E-mail: liuboyu0108@163.com

摘要: 稀疏编码已经广泛应用于复数图像的降噪问题, 其中, 近些年提出的分组稀疏编码由于能够充分利用同一分组图像块的相似性, 在滤除噪声和提高降噪信噪比方面具有更大的优势. 研究了一种基于 K -means 聚类方法的复数图像分组稀疏降噪算法, 通过改进聚类算法, 验证了 K -means 算法对分组稀疏编码算法的分组有效性. 采用在线复数词典训练算法快速获取编码字典, 并运用分组正交匹配追踪算法, 实现了分组图像块的稀疏编码. 通过限制每一分组图像块中编码的相似性, 有效抑制了对图像块中噪声的编码, 提高了对复数图像的降噪效果. 为验证算法的有效性, 对模拟和真实的干涉合成孔径雷达图像的仿真噪声进行了定量分析, 证明了所提算法相对于以前的分组稀疏编码算法在峰值信噪比指标上有一定的提升. 最后对真实的干涉合成孔径雷达图像进行了降噪, 进一步验证了所提降噪算法对于真实噪声的降噪能力.

关键词: K -means 聚类算法; 分组稀疏; 稀疏编码; 复数图像降噪; 相位解缠

中文引用格式: 刘伯禹, 吴玲达, 郝红星. K -means 聚类方法下的复数图像群组稀疏编码降噪算法. 软件学报, 2019, 30(Suppl. (2)): 17-24. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/19014.htm>

英文引用格式: Liu BY, Wu LD, Hao HX. Complex value image group sparse coding denoising algorithm based on K -means clustering method. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2019, 30(Suppl. (2)): 17-24 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/19014.htm>

Complex Value Image Group Sparse Coding Denoising Algorithm Based on K -means Clustering Method

LIU Bo-Yu, WU Ling-Da, HAO Hong-Xing

(Science and Technology on Complex Electronic System Simulation Laboratory, Space Engineering University, Beijing 101416, China)

Abstract: Sparse coding has been widely used in complex value image demising. In recent years, the proposed block sparse coding has more advantages in noise filtering and noise reduction because it can make full use of the similarity of patches in the same block. In this paper, a K -means clustering method based sparse demising algorithm for complex image grouping is studied. By improving the clustering algorithm, the grouping effectiveness of K -means algorithm for sparse block coding algorithm is verified. The online complex dictionary training algorithm is used to acquire the coded dictionary quickly, and the sparse coding of block image is realized by using the grouping orthogonal matching pursuit algorithm. By inducing the similarity of the coding in each block, the coding of noise in the block is effectively suppressed and the noise reduction of the complex value image is improved. In order to verify the effectiveness of the proposed algorithm, the demising of simulated and real interferometric synthetic aperture radar images is quantitatively analyzed, which proves that the proposed algorithm has a certain improvement in peak signal-to-noise ratio (PSNR) compared with the previous block sparse coding algorithm. Finally, the real interferometric synthetic aperture radar image is demised, which further verifies the de-noising ability of the proposed algorithm for real noise.

Key words: K -means clustering algorithm; grouping sparsity; sparse coding; complex value image denoising; phase unwrapping

* 基金项目: 国家自然科学基金(1801513)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (1801513)

收稿时间: 2019-08-17; 采用时间: 2019-11-04

1 引言

当前,地形测绘、航天侦察和医学诊断等多个领域对复数图像的处理提出了应用需求.在地形测绘领域,使用卫星或飞机搭载的合成孔径雷达系统获取高分辨率地面反射复数影像,每一分辨元的影像信息中不仅含有灰度信息,而且还包含干涉所需的相位信息.在医学领域,磁共振图像(magnetic resonance imaging)利用核磁共振原理,依据所释放的能量在物质内部不同结构环境中不同的衰减,通过外加梯度磁场检测所发射出的电磁波,即可得知构成这一物体原子核的位置和种类,接收到的电磁波信息是以复数形式存储的.但是在诸多应用领域的复数图像的获取过程中会有噪声的干扰.噪声产生的原因主要为在复数图像采集和生成的过程中外部环境的干扰和设备条件的有限性等.因此,研究复数图像的降噪算法对提高测量精度、实现测量数据的高效应用具有重要意义.

目前复数图像降噪的实现方法主要分为两类.第 1 类降噪算法是采用实数域的降噪算法对复数的实部和虚部分别降噪,最后将降噪结果重新组合得到复数图像的降噪结果.该类降噪算法的研究成果较多.文献[1,2]采用了小波降噪的方法处理 InSAR 图像.小波变换降噪可以很好地保护有用的信号尖峰和突变信号.文献[3,4]采用的都是实数域中经典的 BM3D 算法完成对实数图像的降噪,但同时也突出了 BM3D 算法时间复杂度高的缺点.而 Zhang 等人^[5]则使用 BM3D 算法完成了对复数图像的降噪.此外,还有基于概率统计与先验知识的降噪算法^[6]和正则化最优方法^[7,8]等,都是将实数域降噪算法应用到复数域图像降噪的经典实例.这类方法的局限性在于其忽略了实部和虚部之间的联系.

第 2 类降噪算法是将复数作为统一的整体实施降噪.该类降噪算法中具有代表性的是基于非局部图像块相似性的降噪算法和基于复数域自适应稀疏编码的算法.文献[9]提出对复数图像中相似图像块作加权平均的方法实现 MRI 复数图像的降噪,该算法存在计算效率低、运算耗时长的的问题.文献[10]提出将复数域中自适应字典训练和稀疏编码方法应用到复数图像降噪当中,其降噪效果要优于将实部、虚部分别进行实数域稀疏编码降噪算法的降噪效果.

近年来,基于群组稀疏编码对图像实现降噪的算法^[11,12]成为研究热点.这种算法通过对图像分割、分类之后,能够有效地利用需要降噪的图像中各个图像块之间的相似信息,从而获得了相对于基于稀疏编码的降噪算法更好的降噪效果.本文通过研究复数域中的图像块聚类算法和复数图像块群组稀疏编码算法,提出了基于 K-Means 聚类方法的复数图像稀疏编码降噪算法.通过对模拟数据和真实含噪干涉相位图像降噪的实验结果可以得出,本文提出的算法相较于不采用分组的稀疏编码算法和已有的分组稀疏编码算法,在降噪和细节保留上效果更优.

2 图像的分割与聚类

2.1 图像块分割

本文的降噪方法首先要获得编码向量.如果将整幅图像作为一个向量进行编码,由于真实图像的维度较大,其运算时间无法满足要求.通常的方法是对复数图像进行分割降噪,最后将分割的图像块的降噪结果进行合并.假设需要降噪的图像大小是 $N_1 \times N_2$,图像块大小设定为 $n \times n$ 的正方形,对整幅图像进行滑动取块.由此获得的待编码向量大小为 $n^2 \times 1$.

采用上述图像分块方法主要有以下 3 个优点.

- (1) 降低字典原子的维度,从而有效降低稀疏编码降噪算法的复杂度.
- (2) 使用重叠的图像块有利于训练集的丰满,训练出的字典更加准确.
- (3) 在滑动取块过程中每次只滑动一个像素点的做法使得同一个像素点可能分属多个不同的图像块.通过对每一个图像块的降噪,使得在确定一个像素点的最终降噪值时可以通过每个关联图像块的降噪值来进行联合估计,从而进一步提高降噪的效果.

为实现上述图像分割方法,将需要降噪的噪声图像 z 生成列向量,定义分割矩阵 C_i ,从整幅图像生成的列向

量 z 中选择分割出的图像块列向量 z_i , 即:

$$z_i = C_i z \quad (1)$$

所以, 整幅图像的图像块选择过程为

$$[z_1^T, z_2^T, \dots, z_{k_p}^T]^T = [C_1^T, C_2^T, \dots, C_{k_p}^T]^T z \quad (2)$$

其中, k_p 为分割获取的图像块个数.

在对每个图像块 z_i 完成降噪后, 将降噪后的图像块列向量用 C_i 对其作分割过程的逆操作, 即可获得完整的降噪后图像列向量, 进而获得完整的降噪图像.

2.2 图像块聚类算法

本文采用了 K -Means 聚类算法对分割后的图像块进行聚类. 该算法是一种基于划分的方法, 以各类的均值作为聚类中心, 代表相应的类, 通过循环迭代进行划分, 直到聚类准则函数最优. K -Means 算法遵照聚类算法的统一原则, 最终目标是类内单元紧凑、类之间距离大并且相对较为独立.

为了便于描述 K -Means 算法, 记分割后的图像块聚类分组 $Z = \{Z_i | i = 1, 2, \dots, k\}$, 其中, k 为聚类数. 各类中的样本数分别为 m_1, m_2, \dots, m_k , 分组 Z_i 中的向量为 $\{y_{i,j} | y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,m_i}, j = 1, 2, \dots, m_i\}$.

定义误差平方和:

$$E = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \|y_{i,j} - \bar{z}_i\|_2^2 \quad (3)$$

其中, \bar{z}_i 是第 i 类的类中心:

$$\bar{z}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} y_{i,j} \quad (4)$$

K -Means 算法的最终目的是要最小化误差平方和 E . 算法流程图如图 1 所示.

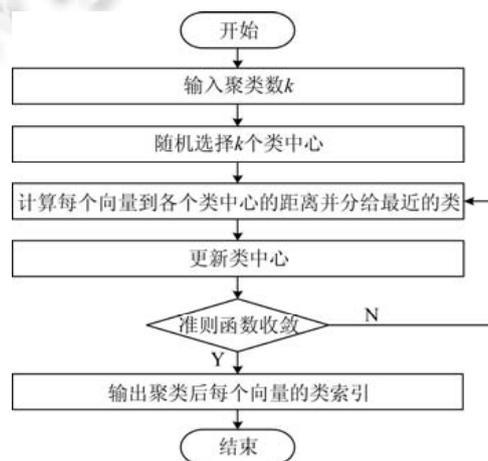


Fig.1 Flow chart of clustering algorithm

图 1 聚类算法流程图

输入: 聚类数 k , 整幅图像构成的向量组;

输出: k 个类的类中心, 每个向量的类索引.

- ① 从待聚类的向量组中任取 k 个向量作为初始聚类中心;
- ② 计算向量组中其他向量到这 k 个初始类中心的欧氏距离, 将其分配给距离最近的类;
- ③ 计算 k 个聚类的平方误差总和, 用准则函数评价聚类效果;
- ④ 以每一类的均值作为新的聚类中心;

⑤ 重复步骤②~④,直到准则函数收敛则停止.从而得到 k 个类最终的类中心和每个向量的类索引.

K -Means 算法的全局性聚类效果较好,并且实现也较为简单.但是 K -Means 算法的缺陷在于 k 的值需要设定.所以 k 值的选择是 K -Means 算法的关键一步.

本文采用轮廓稀疏评估聚类效果,确定 k 值.

定义. 轮廓系数 $S_{i,j}$:

$$S_{i,j} = \frac{b_{i,j} - a_{i,j}}{\max(a_{i,j}, b_{i,j})} \quad (5)$$

其中, $b_{i,j}$ 是向量 $y_{i,j}$ 到非第 i 类的所有向量的平均距离, $a_{i,j}$ 是向量 $y_{i,j}$ 到第 i 类所有其他向量的平均距离.将所有向量的轮廓系数求平均,可以得到总轮廓系数.由公式(5)可知,轮廓系数的取值介于 $[-1, 1]$,越趋近于 1,代表内聚度和分离度相对更优.

在本文对 K -Means 算法的应用中,将 k 值从 10 到 $n/3$ (n 为向量组中列向量数)遍历一遍,其中,步长取 20,计算轮廓系数,从而得到轮廓系数关于 k 的曲线.在曲线的峰值点处,前后各取 5 个 k 值.通过进一步比较轮廓系数,获得更为精确的最优 k 值.

文献[13]提出了一种基于组稀疏的降噪算法,其中对图像块的分类采用的是最近邻算法.最近邻算法的优点在于简单、易实现,只需设定相似性准则阈值,可以对样本进行在线训练,即中途加入样本不会有影响.但是最近邻算法遵循“贪婪”原则,从而可能导致先分出来的类中样本数量很大,而这其中可能会存在与后面的类中心距离更近的样本,但是因为其已经被分到前面的类中,从而无法正确聚类.因此,从聚类方法的原理上分析, K -Means 算法的聚类效果会优于最近邻算法,从而能够更加有效地利用相似图像块的信息.

3 稀疏编码降噪

3.1 稀疏降噪原理

本文采用的噪声模型是加性高斯白噪声,该模型是磁共振图像和能够采用高斯密度近似的合成孔径雷达系统的噪声模型.

$$z = x + n \quad (6)$$

其中, z 是复数图像的观测值, x 是不含噪声的复数图像, $n = n_R + jn_I$ 是图像的观测噪声. n_R 和 n_I 是满足均值为 0、方差为 $\sigma^2/2$ 的独立高斯随机变量.

运用稀疏编码对图像进行降噪的基本原理参见文献[13],下面主要分析在对图像完成分割和聚类之后的组稀疏降噪的原理和优点.

在噪声干扰下,记信号 x 的观测值为 z ,通过降噪后的降噪估计值为 \hat{x} .运用稀疏编码降噪算法对整张图像的降噪过程可以描述为观测值 z 向信号空间的投影,即:

$$\hat{x} = P(z, S) \quad (7)$$

其中, $S = \text{span}(D(s))$ (s 为编码 α 中非零元素的索引),是字典对应编码中非零索引的元素张成的空间.在理想情况下, S 应该为信号空间.而在实际情况中,空间 S 当中会包含部分由噪声所张成的空间.在对复数图像分割和聚类后,同一类中的图像块所对应的字典所张成的空间则是相同的.

记第 i 个聚类中的图像块对应的字典所张成的空间为 S_i ,其中包含的图像块个数为 m_i ,所以降噪过程为

$$\hat{x}_i = P(z_i, S_i) \quad (8)$$

其中, $S_i = S_{i,1} \cap S_{i,2} \cap \dots \cap S_{i,m_i}$.由于 $S_i \subset S$,即分组后的图像块对应的字典张成的空间要比不分组时更加紧致,使得编码的稀疏度相应降低.文献[10]指出,复数图像的降噪估计误差 $\hat{x} - x$ 与信号稀疏度成正比.故由于分组稀疏编码算法的编码稀疏度小于未分组稀疏编码算法的编码稀疏度,所以前者获得的降噪估计值比后者更为精确,即降噪效果更好.

目前被应用于复数图像降噪的比较先进的降噪算法有 BM3D 算法、WFT 算法、复数稀疏编码.其中, BM3D 算法是通过分别对实部、虚部分别降噪完成对复数图像的降噪,这种方法在复数域的应用效果不佳. WFT 算法的编

码字典则是采用了傅里叶字典.复数稀疏编码算法和本文算法均采用自适应训练获得的字典,字典训练方法参见文献[14].通过自适应训练获得的字典针对性强,而傅里叶字典是一种通用编码字典,所以前者张成的空间是包含于后者张成的空间.通过对分组稀疏编码算法和未分组稀疏编码算法的分析可以得出:由字典张成的空间越紧致且逼近信号空间,降噪效果越好.

3.2 分组稀疏编码算法

记第 i 个分组中的元素 $z_i = [z_{i,1}, z_{i,2}, \dots, z_{i,N_i}]$ (N_i 为该分组中的图像块数量),则在分组稀疏编码的过程中,需要解决的是如下最优化问题:

$$\begin{cases} \min(|\alpha_{i,1}| + |\alpha_{i,2}| + \dots + |\alpha_{i,N_i}|) \\ \text{s.t.} \sum_{j=1}^{N_i} \|D\alpha_{i,j} - z_{i,j}\|_2^2 \leq \varepsilon \end{cases} \quad (9)$$

其中, D 为复数编码字典, $\alpha_{i,j}$ 是对应于 $z_{i,j}$ 在字典 D 下的复数稀疏编码.本文采用贪婪算法求解上述优化问题.算法流程如下所示.

输入:第 i 个分组 Z_i 的图像块向量 $z_{i,1}, z_{i,2}, \dots, z_{i,N_i}$; 最大迭代次数 N , 初始字典 D , 编码 α_i , 误差参数 τ , 最大迭代次数 N , $\varepsilon_0 = Z_i$;

输出:计算对应的稀疏编码 $\alpha_i = [\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,N_i}]$.

- ① 寻找字典中的最优原子 D_{t_i} , $\varepsilon_{i-1} = [\varepsilon_{i-1,1}, \varepsilon_{i-1,2}, \dots, \varepsilon_{i-1,N_i}]$, t_i 为 $\max_{t_i} (|D_{t_i}^H \varepsilon_{i-1,1}| + |D_{t_i}^H \varepsilon_{i-1,2}| + \dots + |D_{t_i}^H \varepsilon_{i-1,N_i}|)$ 的解.
- ② 将 D_{t_i} 添加到已选字典原子集合 $D(S_i)$, 并且更新索引 $S_i = S_{i-1} \cup \{t_i\}$;
- ③ 令 $P_i = D(S_i)(D^H(S_i)D(S_i))^{-1}D^H(S_i)$, 更新残差 $\varepsilon_i = Z_i - P_i Z_i$;
- ④ 残差 $\varepsilon_i < \tau_0$, 算法结束, 否则, $i = i + 1$, 并返回步骤②.

算法流程图如图 2 所示.

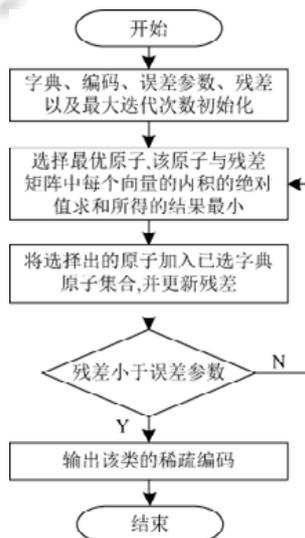


Fig.2 Flow chart of group sparse coding algorithm

图 2 分组稀疏编码算法流程图

4 实验验证

4.1 模拟曲面降噪仿真

在本节中,将对模拟复数图像进行实验,验证本文算法的有效性.根据干涉合成孔径雷达测量原理,构造出

能模拟真实地形高程信息的曲面,根据本文中的噪声模型添加噪声生成含噪复数图像.所使用的曲面模型引自文献[15].

文献[10]已经通过实验验证了复数稀疏编码算法^[10]比复数图像实部和虚部分别降噪的 BM3D 算法更优.所以下面将对本文算法、分组稀疏编码算法^[13]和复数稀疏编码算法^[10].如图 3 所示,图 3(a)~图 3(c)这 3 种是模拟生成的曲面,图 3(d)为真实地形的高程信息,数据引自文献[16].

在本文实验中,当噪声水平为 0.3 时, $n=8$;当噪声水平为 0.5 或 0.7 时, $n=10$.根据轮廓系数的计算,获得曲面图 3(a)~图 3(d)在不同噪声水平下对应的最佳估计值.

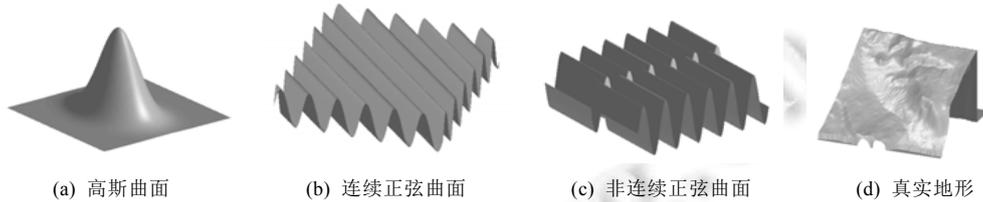


Fig.3 Simulated surface

图 3 模拟曲面

由于图像在降噪后需要进行解缠,所以本文在评价指标方面,除了选用峰值信噪比 PSNR 之外,还定义了一个新的指标 NoE.NoE 是解缠后相位图像中值大于 π 的数目(number of error).用复数值的幅值和相位角计算峰值信噪比 PSNR 的定义如下:

$$PSNR = 10 \lg(4\pi^2 N_1 N_2 / \|W(\text{angle}(\hat{x}) - \text{angle}(x))\|_F^2) \quad (10)$$

其中, \hat{x} 为复数图像的降噪估计值, x 为原始不含噪的复数值, $\|\bullet\|_F$ 是指求矩阵的 F 范数.

本文仿真中对模拟曲面所加的噪声水平分别是 0.3、0.5、0.7 和 0.9.在 4 种不同的噪声水平下验证复数稀疏编码算法^[10]、分组稀疏编码算法^[13]和本文算法的降噪效果.由峰值信噪比的定义可知,PSNR 数值越大,算法的降噪效果越好.

仿真结果见表 1.根据峰值信噪比 PSNR 的对比结果,算法 3(本文算法)优于算法 2(分组稀疏编码^[10]).由于分组稀疏编码^[10]算法中的分组算法存在相似性判断不准确的可能,所以在某些情况下分组效果较差,从而影响了降噪效果.而本文算法中使用的 K -Means 算法全局性聚类效果较好,所以降噪结果能够基本保持稳定地高于算法 1(复数稀疏编码^[13]算法).本文算法的解缠错误率较算法 1 和算法 2 略低.当噪声水平较高时,本文算法的运算速度比算法 1 和算法 2 更具一定优势.

Table 1 Comparison of noise reduction results

表 1 降噪结果对比

	噪声水平	k 值	PSNR(dB)			NoE			时间(s)		
			算法 1	算法 2	算法 3	算法 1	算法 2	算法 3	算法 1	算法 2	算法 3
曲面 a	0.3	1 712	43.260	44.005	44.101	0	0	0	72.80	65.56	71.55
	0.5	1 466	39.183	38.522	39.657	0	0	0	67.43	69.74	86.16
	0.7	1 255	36.815	36.808	36.867	0	0	0	70.56	74.46	69.73
	0.9	1 196	34.460	35.325	35.960	0	0	0	62.15	65.56	52.58
曲面 b	0.3	1 509	48.977	49.174	49.455	0	0	0	64.95	60.25	55.52
	0.5	1 413	42.900	43.368	43.668	0	0	0	61.02	71.45	80.44
	0.7	1 152	39.913	40.061	41.179	0	0	0	69.46	70.21	66.61
	0.9	1 012	37.582	37.590	37.698	0	0	0	79.05	81.24	67.67
曲面 c	0.3	1 208	44.110	44.560	45.520	0	0	0	69.66	62.59	69.44
	0.5	1 050	39.975	40.365	40.458	0	0	0	65.29	70.25	80.32
	0.7	931	35.879	35.967	36.162	0	0	0	68.89	70.34	66.70
	0.9	852	34.128	34.732	35.063	7	7	5	67.45	72.13	60.50
曲面 d	0.3	1 813	34.840	35.098	35.269	17	17	11	145.22	122.54	135.90
	0.5	1 632	31.283	31.623	31.760	19	19	18	98.72	108.56	93.89
	0.7	1 450	28.920	28.715	29.272	19	20	19	102.33	90.36	87.60
	0.9	1 384	27.496	27.386	27.238	20	18	20	92.00	80.26	71.24

表 2 为曲面 d 在噪声水平为 0.5 时 3 种算法的分组时间和编码时间.由表 2 可知,当噪声水平较高时,本文算法的分组时间较算法 2 更短.图 4 为在噪声水平=0.5 时,关于曲面 d 的降噪结果对比.从图中可以发现,在图像中出现地形交汇的区域时,本文算法的处理效果优于复数稀疏编码^[10]和分组稀疏编码^[13]的处理效果.

Table 2 A comparison between the efficiency of grouping and coding for surface d

表 2 曲面 d 分组效率和编码效率比较

噪声水平:0.7	分组时间(s)	编码时间(s)
算法 1	未分组	26.54
算法 2	35.56	9.68
算法 3	23.61	10.15

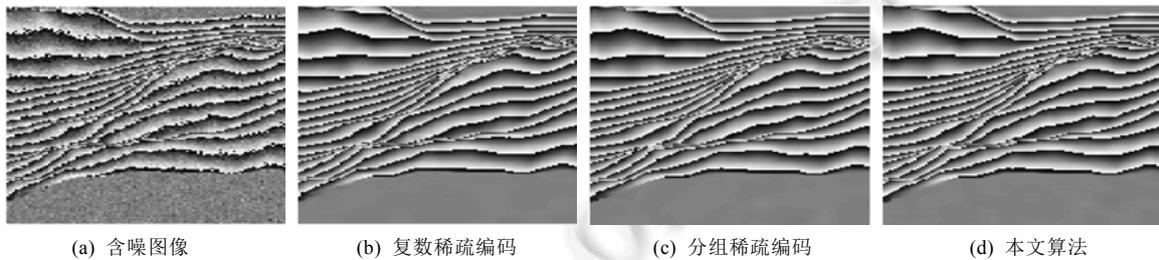


Fig4 Comparison of noise reduction results of real terrain complex image under simulated noise

图 4 模拟噪声下真实地形复数图像降噪结果对比图

4.2 真实含噪复数图像降噪仿真

在本节中,选择真实的含噪干涉相位图像对复数稀疏编码^[10]、分组稀疏编码^[13]和本文算法分别进行仿真实验.本节实验采用的是由欧洲航天局(ESA)发布的 InSAR 图像数据,具体位置是东经 23°01'55" 到 23°04'24", 北纬 38°18'30" 到 38°19'32" 的希腊埃瓦格利斯特里亚城附近.图 5 为真实干涉相位图像和 3 种算法降噪后的结果.

从图 5 的框中区域可以看出,本文算法在降噪效果上优于复数稀疏编码^[13],在图像的细节保留上优于复数稀疏编码^[13]和分组稀疏编码^[10].

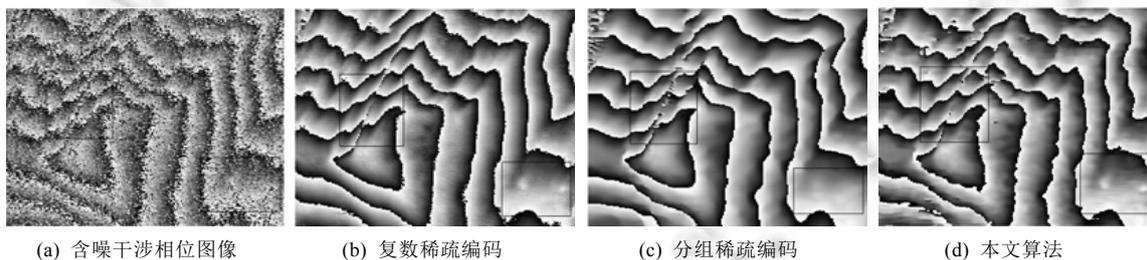


Fig.5 Comparison of noise reduction effect of real interference phase image

图 5 真实干涉相位图像降噪效果对比图

5 总结与展望

本文将聚类思想应用到复数域图像降噪问题的解决中.从实验结果看,对图像进行分割和聚类,并运用稀疏编码实现降噪的方法比现有基于稀疏编码算法降噪峰值信噪比效果更优.本文的稀疏编码算法中采用了“贪婪”算法的思想,存在局部最优而非全局最优的问题,在下一步的研究中,需要改进.

References:

- [1] Chang L, He X, Li J. A wavelet domain detail compensation filtering technique for InSAR interferograms. Int'l Journal of Remote Sensing. 2011,32(23):7985-7995.

- [2] Islam MS, Chong U. Noise reduction of continuous wave radar and pulse radar using matched filter and wavelets. *Nederlands Tijdschrift voor Urologie*, 2014,2014(1):1–9.
- [3] Abubakar A, Xiaojin Z, Shiting L, *et al.* A block-matching and 3-D filtering algorithm for gaussian noise in DoFP polarization images. *IEEE Sensors Journal*, 2018,18(18):7429–7435.
- [4] Chen G, Luo G, Tian L, *et al.* Noise reduction for images with non-uniform noise using adaptive block matching 3D filtering. *Chinese Journal of Electronics*, 2017,26(6):1227–1232.
- [5] Wenge Z, Qin Z, Chaoying Z, *et al.* Noise reduction for InSAR phase images using BM3D. *Chinese Journal of Electronics*, 2014,23(2):329–333.
- [6] Baselice F, Ferraioli G, Pascazio V, *et al.* Bayesian MRI denoising in complex domain. *Magnetic Resonance Imaging*, 2017,38(Complete):112–122.
- [7] Luo XM, Wang XF, Suo ZY, *et al.* Efficient InSAR phase noise reduction via total variation regularization. *Science China (Information Sciences)*, 2015,58(8):1–13.
- [8] Long C, Liu L, Chen CLP. A robust bi-sparsity model with non-local regularization for mixed noise reduction. *Information Sciences*, 2016,354:101–111.
- [9] Klosowski J, Frahm J. Image denoising for real-time MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2017,77(3).
- [10] Hao HX, Wu LD, Huang W. Denoising of complex valued images by sparse representation. *Jisuanji Fuzhu Sheji Yu Tuxingxue Xuebao/Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, 2015,27(2):264–270 (in Chinese with English abstract).
- [11] Li S, Yin H, Fang L. Group-sparse representation with dictionary learning for medical image denoising and fusion. *IEEE Trans. on Bio-medical Engineering*, 2012,59(12):3450–3459.
- [12] Sun Y, Quan Y, Fu J. Sparse coding and dictionary learning with class-specific group sparsity. *Neural Computing and Applications*, 2018,30:1265–1275.
- [13] Hao HX, Wu LD, Song XR. A complex image denoising algorithm based on group sparse coding. *Chinese Journal of Computers*, 2019,(9):1991–2003 (in Chinese with English abstract).
- [14] Hao HX, Wu LD, Huang W. Fast complex valued dictionary learning method for sparse representation. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2015,26(8):1960–1967 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4677.htm> [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004677]
- [15] Ghiglia DC, Pritt MD. *Two-dimensional Phase Unwrapping: Theory, Algorithms, and Software*. Wiley, 1998. 41–55.
- [16] Qian KM. Two-dimensional windowed Fourier transform for fringe pattern analysis: Principles, applications and implementations. *Optics and Lasers in Engineering*, 2007,45(2):304–317.

附中文参考文献:

- [10] 郝红星,吴玲达,黄为.复数图像去噪算法的稀疏编码实现. *计算机辅助设计与图形学学报*,2015,27(2):264–270.
- [13] 郝红星,吴玲达,宋晓瑞.一种基于分组稀疏编码的复数图像降噪算法. *计算机学报*,2019,(9):1991–2003.
- [14] 郝红星,吴玲达,黄为.一种进行稀疏编码的复数数据词典快速训练方法. *软件学报*,2015,26(8):1960–1967. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4677.htm> [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004677]



刘伯禹(1996—),男,江苏扬州人,硕士生,主要研究领域为干涉相位图像的降噪与解缠.



郝红星(1987—),男,博士,讲师,主要研究领域为复数域稀疏编码算法,复数图像降噪技术,遥感图像处理.



吴玲达(1962—),女,博士,研究员,教授,博士生导师,主要研究领域为信息系统建模与仿真,多媒体,虚拟现实技术.