

基于流形的光滑曲面构造*

王青⁺, 鲍虎军

(CAD&CG 国家重点实验室(浙江大学), 浙江 杭州 310027)

Construct Smooth Surfaces Based on Manifold

WANG Qing⁺, BAO Hu-Jun

(State Key Laboratory of CAD&CG (Zhejiang University), Hangzhou 310027, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-571-88206681 ext 520, Fax: +86-571-88206680, E-mail: qwang@cad.zju.edu.cn

Wang Q, Bao HJ. Construct smooth surfaces based on manifold. *Journal of Software*, 2006,17(Suppl.):64-69.
<http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/s64.htm>

Abstract: In this paper, the regular domain of traditional parametric surface is generalized to manifold, and a new method is proposed to construct smooth surface based on this domain manifold. This method uses shortest distance to build base function, and creates arbitrary topology smooth surfaces directly without split and joint. The result surfaces based on this method can be controlled easily in locally area, and a lot of algorithms used in NURBS surface also can be applicable here. The experimental results show that the construct method can easily generate complex surface.

Key words: proto-manifold; differential manifold; chart; surfaces modeling

摘要: 将传统参数曲面的规则定义域推广到一般的二维流形上,并基于定义域微分流形提出了一种新的光滑曲面构造方法.该方法运用最短距离构造基函数,从整体上直接构造出任意拓扑结构的光滑流形曲面,无须分片生成后再进行拼接.而且该算法所生成的流形曲面具有很好的局部性和可控性,NURBS 曲面上的很多方法在此曲面上仍然适用.实验结果表明,该构造方法可以构造出非常复杂的曲面.

关键词: 原型微分流形;微分流形;坐标卡;曲面造型

构造任意拓扑结构的光滑曲面一直是计算机辅助设计领域的关键难题,传统的解决方法是把整张曲面割开,分片构造,然后再拼接起来.其中应用最广的还是以 NURBS 为代表的参数曲面造型技术.这种方法的优点是每片曲面都可以很容易地构造出来,但是曲面片之间的光滑拼接难度很大,特别是在涉及到多片拼接的边界点处,要达到二阶或三阶光滑性尤为困难.

为了避免拼接,部分研究者转而考虑从整体上构造曲面,并取得了重要进展,如细分曲面、三角域 NURBS 曲面、T 样条曲面^[1,2]、G 样条曲面^[3]、有理高斯曲面等.

1 相关工作

细分曲面是整体构造曲面的典范,但是细分曲面在奇异点处通常只能达到一阶连续,最多只是一张“几乎处

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60573152 (国家自然科学基金)

Received 2006-03-15; Accepted 2006-09-11

处”二阶连续的三次 B 样条曲面^[4],而且细分曲面是基于离散网格通过反复迭代构造出来的极限曲面,很难进行各种数学分析.

基于多变量单形 B 样条^[5],Dahmen 和 Font 提出了三角域上的 B 样条曲面表示方法^[6,7],把三角域上的 B 样条曲面有理化就得到了三角域上的 NURBS 曲面^[8].多变量单形 B 样条建立在三角形网格上,与单变量 B 样条相比,它提供了更多的灵活性,但是在节点的选取、配置上就要困难得多,而且求值求导计算和域剖分计算也非常复杂、费时,特别在高维高阶的情况下,显得更加困难^[9,10].

另外,Goshtasby 以高斯函数为基函数提出了有理高斯曲面设计方法,可以在任意的非规则网格上构造任意光滑的曲线曲面^[11,12].与三角域上的 NURBS 相比,有理高斯曲线曲面具有计算和设计方法简单、光滑性高等优点.但有理高斯曲线曲面的局限性是很明显的:一方面,高斯函数具有全局性,使得它很难进行精确的局部控制;另一方面,在表示闭合曲面时,运用的是无穷累加的方法,所以无法用它来精确地构造基本图元,比如球、圆锥等;而且,有理高斯曲面需要全局参数化,所以只能构造拓扑同构于球的曲面.

最近,基于流形的曲面表示和造型方法逐渐被研究者所关注^[13,14].这种方法能直接在微分流形上构造曲面,避免了在任意拓扑结构上直接作整体参数化的难点.Grimm 等人首先将曲面作为流形来进行构造,这种方法把控制网格的每一个图元(点、边、面)都做成坐标卡,把这些小的坐标卡用流形的概念拼接起来就得到了与控制网格同胚的微分流形,然后运用细分的方法为每一坐标卡生成控制顶点,形成曲面上的一个小面片,进而由这些小曲面片整体重构出光滑曲面^[15].但这种方法的坐标卡非常多,计算效率比较低.

Navau 等人则提出了另一种基于流形的曲面构造方法.他们把开网格一致映射到正方形上,在正方形上建立坐标卡和基函数,利用这些平面坐标卡来构造流形体^[16].后来,他们进一步把这种方法推广到任意拓扑上^[17],首先把控制网格运用 Catmull-Clark 细分规则进行重新剖分,把奇点隔离开来,然后将顶点和面的邻域做成坐标卡,使得坐标卡之间的重叠部分为矩形,这样就能把坐标卡粘合起来得到目标曲面了,但是重新剖分使得控制网格上的点大量增加,而且在奇点处的计算非常复杂.另外,Gu 等人通过构造定义域微分流形的仿射结构,提出了流形上的三角样条曲面^[18],但是曲面存在奇异点.

考虑到拓扑结构的任意性和曲面的光滑性,本文也将运用流形来构造参数曲面.其曲面构造的核心思想是:把传统 NURBS 曲面的定义域扩展为光滑流形,即构建一个与控制网格拓扑同胚的微分流形作为曲面的定义域,并在此定义域上为每个控制顶点构造相应的基函数,最后类似于 NURBS 曲面的定义将基函数和控制顶点复合就可以构造出具有任意拓扑结构的光滑曲面.容易证明,所得曲面的连续性仅由定义域的连续性和基函数的连续性决定.与以往的建立在流形上的曲面设计方法相比,本文的优点在于:

- 无须对控制网格进行再剖分;
- 控制网格的顶点是曲面的真正控制顶点;
- 算法容易实现,不是直接构造流形曲面,而且先构造微分流形定义域再生成曲面;
- 与传统的 NURBS 方法相兼容.

2 流形曲面的基本概念

首先引入一些关于流形的基本定义.

定义 1. 一个 n 维 C^k 原型微分流形(proto-manifold) K 是下列这些元素的集合:

- (1) A 是有限个坐标卡(chart)的集合,坐标卡是 R^n 中的连通开集;
- (2) 开子集的集合 $U = \{U_{ij} \mid U_{ij} \subset c_i, c_i \subset A\}$,其中 $U_{ii} = c_i$;
- (3) 转换函数的集合 $\Phi = \{\varphi_{ij} : U_{ij} \rightarrow U_{ji} \mid U_{ij} \subset c_i, U_{ji} \subset c_j\}$,其中 φ_{ij} 是 C^k 连续的双射,且满足以下条件:
 - (a) $\varphi_{ij}^{-1} = \varphi_{ji}$;
 - (b) $\varphi_{ii}(x) = x, \forall x \in c_i$;
 - (c) $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}(x) = \varphi_{ik}(x), \forall x \in U_{ik} \cap U_{ij}$.

在上面的定义中, U_{ij} 描述了坐标卡 c_i 中与坐标卡 c_j 重叠的部分, U_{ij} 和 U_{ji} 是两个不同的子集, 如图1 所示, 转换函数 φ_{ij} 精确定义了 U_{ij} 和 U_{ji} 之间的点的对应关系, 而且转换函数的连续阶决定了 K 的连续阶.

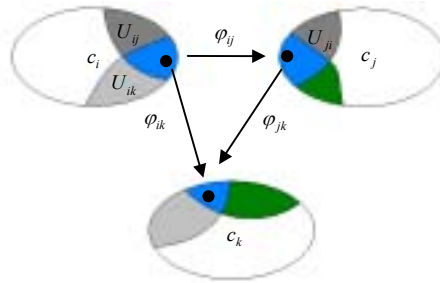


Fig.1 Chart overlaps and transition functions

图1 坐标卡重叠区域和转换函数

设 K 是 n 维 C^k 原型微分流形, 在 K 上定义关系 \sim : 如果 $x \in c_i, y \in c_j$, 且 $y = \varphi_{ij}(x)$, 那么 $x \sim y$. 由于 φ_{ij} 满足条件(a)~(c), 所以关系 \sim 是 K 上的等价关系. 等价关系 \sim 的意义是, c_i 上的点 x 如果能通过 φ_{ij} 变换到 c_j 上的点 y , 那么这两个点表示的是同一个点, 就像地图册上第 i 页的某个点和第 j 页上的某个点都表示地球上的同一个地点. 所以应用等价关系, K 上的坐标卡虽然有很多重叠, 却可以表示一个单一物体.

定义 2. 设 K 是 n 维 C^k 原型微分流形, K 上的等价关系 \sim 定义如上, 定义 N 为 K 关于 \sim 的等价类, 即 $N = K / \sim$.

不难证明定义 1 所给出的 N 是一个 C^k 微分流形^[15]. 取投影映射 $\Psi: K \rightarrow N$, 对任意 $x \in K$, 使 $\Psi(x) = [x]$, 其中 $[x]$ 表示 x 在等价关系 \sim 下的等价类, 那么 N 实际上就是 K 的等价类的集合. 实际上, N 可以看作是 A 中的所有坐标卡通过转换函数在重叠处粘合起来所形成的一个流形体.

3 基于流形的光滑曲面构造

3.1 流形曲面的构造过程

本文将以所有单连通可定向的二维拓扑流形为控制网格, 控制网格可以有边界, 可以有多个环柄, 即亏格可以大于 0. 因为任意控制网格都可以剖分为三角网格, 所以不失一般性, 本文以三角网格作为流形曲面的控制网格.

流形曲面的构造过程可以描述为: 对每个控制网格的每一条边 E_i , 展平与它相邻的两个三角形(在边界处可能只有一个)得到坐标卡 c_i , 建立转换函数 φ_{ij} , 把各个坐标卡用转换函数粘结起来得到 C^k 微分流形 N . 然后以 N 为定义域, 在 N 上为每个控制顶点建立基函数 G_i , 把 G_i 归一化后得到 N 上的单位分解 $\{g_i\}$:

$$g_i(p) = w_i G_i(p) / \sum_{i=1}^n w_i G_i(p), \quad p \in N \tag{1}$$

最后生成流形上的曲面:

$$S(p) = \sum_{i=1}^n V_i g_i(p), \quad p \in N \tag{2}$$

类似于 NURBS 曲面, 其中 w_i 是控制顶点 V_i 的权因子. 如果 G_i 是 C^{k_i} 连续的, 那么 S 就是 C^l 连续的, 其中 $l = \min\{k, k_1, \dots, k_n\}$.

3.2 建立定义域微分流形

设控制网格为 $M = (V, E, F)$, 其中 $V = \{V_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ 为顶点集, E 为边集, F 为面集. 为说明方便, 这里以顶点的下标来标识边和面, 即 $E = \{E_{ij} \mid E_{ij} = (V_i, V_j), V_i, V_j \in V\}$, $F = \{F_{ijk} \mid F_{ijk} = (V_i, V_j, V_k), V_i, V_j, V_k \in V\}$.

本文以边为单位构造坐标卡集. 任取控制网格的一条边 E_{ij} , 通过适当的旋转和平移, 将 E_{ij} 及其相邻的三角形 F_{ijk} 和 F_{ijl} 等距映射到平面上, 就得到坐标卡 c_{ij} . 如果 E_i 在边界上, 那么只有一个三角形与其相邻. 设这个等距

映射为 ψ_{ij} , 那么记 $e_{ij} = \psi_{ij}(E_{ij}), f_{ijk} = \psi_{ij}(F_{ijk}), f_{ijl} = \psi_{ij}(F_{ijl})$. 在这个等距映射下三角形的边长保持不变, 边的相邻性也保持不变, 如图 2 所示, 映射 ψ_{ij} 相当于把两三角形沿着公共边直接摊平. 取 $c_{ij} = \{e_{ij}, f_{ijk}, f_{ijl}\}$, 那么, 坐标卡集 $A = \{c_{ij} \mid \exists E_{ij} \in E, e_{ij} = \psi_{ij}(E_{ij})\}$.

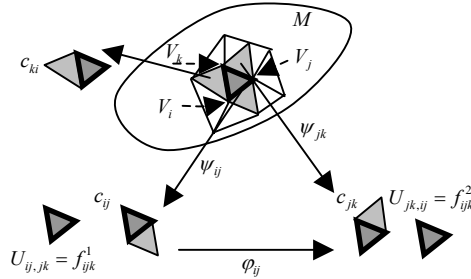


Fig.2 Construct domain manifold

图 2 构造定义域微分流形

控制网格上的每个三角形 F_{ijk} 相对于它的 3 条边 (E_{ij}, E_{jk}, E_{ki}) 可以映射到 3 个坐标卡 (c_{ij}, c_{jk}, c_{ki}) 上, 显然有 3 个不同的像: $f_{ijk}^1 \subset c_{ij}, f_{ijk}^2 \subset c_{jk}, f_{ijk}^3 \subset c_{ki}$ (如图 2 所示). 现在需要构造转换函数 φ 把这 3 个像粘在一起, 即 $\varphi_{pq}: f_{ijk}^p \mapsto f_{ijk}^q (p, q=1,2,3)$, 且 φ 必须满足定义 1 中的 3 个条件, 即 $\varphi_{pq} = \varphi_{qp}^{-1}, \varphi_{pp}(f_{ijk}^p) = f_{ijk}^p, \varphi_{qr} \circ \varphi_{pq} = \varphi_{pr}$. 本文以简单的重心坐标法来构造 φ , 设 $V \in f_{ijk}^p = (V_i^p, V_j^p, V_k^p)$ 的重心坐标为 (u, v, w) , 那么 $\varphi_{pq}(V) = uV_i^q + vV_j^q + wV_k^q \in f_{ijk}^q$. 容易证明 φ 满足定义 1 中的 3 个条件, 且 $\varphi \in C^\infty$, 所以根据定义 1 坐标卡集 A 和所有的转换函数形成了原型微分流形 K , 再按照定义 2 形成定义域微分流形 N , 显然 N 也是 C^∞ 连续的.

3.3 基函数

对投影映射 $\Psi: K \rightarrow N$ (见定义 2), 设 c_i 在 Ψ 映射下的像为 D_{c_i} , 那么 D_{c_i} 表示在坐标卡粘合后 c_i 在 N 上相对应的一块区域. 对控制网格上一个顶点 V_i , 我们的目标是在 N 上建立 C^k 连续的基函数 G_i . 在控制网格上取 V_i 的 r 环领域, 设 $\alpha_i = \cup c_j$ 为这 r 环领域中所有的边所对应的坐标卡的集合, 那么 $\{D_{\alpha_i} = \Psi(\alpha_i), 1 \leq i \leq n\}$ 构成了 N 的一个开覆盖. 再设 r_i 为 G_i 的控制半径, $h(u)$ 为 C^k 连续的单峰函数, 在 $u=0$ 处最大, 当 $u \geq 1$ 时 $h(u)=0$, 那么 G_i 可以取为

$$G_i = h(\| \Psi^{-1}(p) - v_i \|_K / r_i), p \in N \tag{3}$$

其中 v_i 为 V_i 在 K 中的对应点, $\|q - v_i\|_K$ 表示 q 和 v_i 在 K 上的最短距离. 显然 q 和 v_i 都可以出现在 K 的有限多个坐标卡上, 如果它们不在同一个坐标卡上, 通过转换函数将两个坐标卡连接起来再求最短距离. 也就是说, 若 $v_i \in c_i, q \in c_k$, 总能找到一系列的 c_{j1}, \dots, c_{jl} , 运用转换函数 $\varphi_{k,jl}$ 可以将 c_k 转换到 c_{jl} 处形成连通区域, 再用转换函数 $\varphi_{j1,jl-1}$ 将这个结果区域转换到 c_{j1} 处形成一个更大的连通区域, 依次类推, 可以在最后形成的连通区域内求出 q 和 v_i 之间的最短路径和距离. 而 $\|q - v_i\|_K$ 表示所有这些距离中的最小值. 由于控制顶点的影响范围局限在它的 r 环领域内, 一般取 V_i 的 2 环领域进行设计, 所以要遍历的坐标卡是非常有限的.

记 G_i 的支撑域为 Ω_i , 即 $\Omega_i = \{p \mid G_i(p) > 0, p \in N\}$, 显然 $\{\Omega_i\}$ 也必须构成 N 的一个开覆盖. Ω_i 主要通过 r_i 来进行控制, r_i 越大流形曲面的光顺性越强, r_i 越小流形曲面越能体现控制网格的局部特征. 特别的, 当取 r_i 取到最小, $\{\Omega_i\}$ 刚好覆盖 N , 流形曲面退化为控制网格本身. 一般情况下, 取 r_i 为 α_i 中离 v_i 最远的点到 v_i 的距离, 而 h 取为以 $\{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$ 为节点的均匀 3 次 B 样条基函数, 这样 G_i 就是 C^2 连续的.

3.4 一致性

本文介绍的曲面构造方法和传统的曲面方法是完全一致的. 从定义域来看: 传统的参数曲线是以一维光滑微分流形直线或圆作为定义域; 传统的参数曲面是以平面、球面或柱面等二维光滑微分流形作为定义域; 而这里则是直接构造微分流形作为定义域, 并且这些作为定义域的微分流形 N 均同胚于控制网格 M . 从基函数来

看:基函数都是单峰函数,都是通过调节基函数的支撑域来调节控制顶点的影响范围.从构造过程来看:都是将定义域所在的微分流形通过控制顶点的几何信息(坐标)和影响范围(基函数)进行变形.

本文生成的流形曲面可以看成是 NURBS 曲面的推广,具有良好的局部性.关于 NURBS 曲面的许多控制和编辑方法同样适用于此流形曲面,而且通过控制基函数的支撑域,不难实现表面上的尖点和楞边设计.

4 实现

给定控制网格后,按照上文中的步骤和方法即可生成流形曲面了.但为了对流形曲面进行绘制,还需要将它采样成三角形网格.采样的方法是:首先把控制网格的每个面进行均匀剖分或自适应剖分,然后对剖分后三角网格 Π 上的每一点 P , 求出其所在三角形的重心坐标,根据重心坐标和所在的三角形求出定义域 K 上相应的点 p ,找出对 p 有影响的控制顶点集 $V_p, V_p = \{V_i \mid \|p - v_i\|_K < r_i\}$, 就可以得到在表面上的相应采样点 P' :

$$P' = \sum_{V_i \in V_p} g_i(p) V_i.$$

把所有 Π 上的点都映射到表面上后,利用 Π 上点的连接关系连接表面上的对应点,就得到了流形曲面的采样网格.例如,图 3~图 6 分别显示了亏格为 0,1,2,5 的控制网格及其生成的流形曲面,这些例子在 CPU 2G,内存 512M 的机器上实现,生成时间均不超过 1 秒.

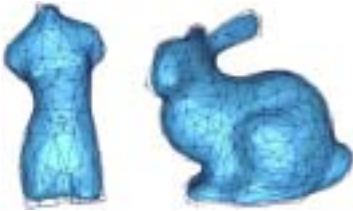


Fig.3 Example manifold surface for genus 0
图 3 亏格为 0 的流形曲面



Fig.4 Example manifold surface for genus 2
图 4 亏格为 2 的流形曲面

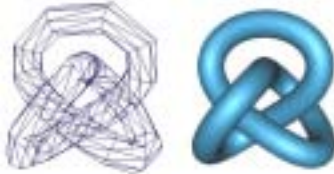


Fig.5 Example manifold surface for knob
图 5 纽结流形曲面

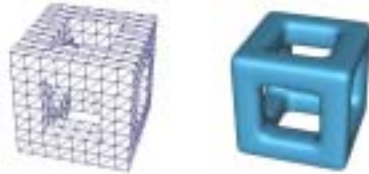


Fig.6 Example manifold surface for genus 5
图 6 亏格为 5 的流形曲面

5 总结

本文提出了一种新的方法来建立与控制网格拓扑同胚的微分流形定义域,并详细讨论了在此定义域上构造流形曲面的详细过程,这个构造过程是简单流形上曲面构造过程的推广,使控制网格拓广到任意有向二维拓扑流形,更具有一般性和统一性.最后讨论了流形曲面的采样和绘制方法,并给出了实验结果.

References:

- [1] Silveti A, Delrieux C, Castro S. T-Splines: A new schema for C^2 spline interpolation. In: Ricardo BY, ed. SCCC'97. Valpariso: IEEE Computer Society, 1997. 240-245.
- [2] Sederberg TW, Jianmin Z, Bakenov A, Nasri A. T-Splines and T-NURCs. ACM Trans. on Graphics, 2003,22(3):477-484.
- [3] Klaus H, Harald M. G-Splines. Computer Aided Geometric Design, 1990,7(1):197-207.
- [4] Zorin D. Subdivision for modeling and animation. In: Zorin D, Schröder P, eds. SIGGRAPH'99 Course Notes#37. Los Angeles: Publications Dept., ACM Inc., 1999. 65-87.

- [5] Thomas S. Multivariate B-splines with (almost) arbitrary knots. *Approximation Theory VIII*, 1995,1(2):477–488.
- [6] Dahmen W, Micchelli C, Seidel HP. Blossoming begets B-spline bases built better by B-patches. *Mathematics of Computation*, 1992,59(199):97–115.
- [7] Fong P, Seidel HP. An implementation of triangular B-spline surfaces over arbitrary triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, 1993,34(10):267–275.
- [8] Qin H, Demetri T. Triangular NURBS and their dynamic generalizations. *Computer Aided Geometric Design*, 1997,14(4):325–347.
- [9] Grandine T. The stable evaluation of multivariate simplex splines. *Mathematics of Computation*, 1988,50(181):197–205.
- [10] Frannsen M, Veltkamp RC, Wesselink W. Efficient evaluation of triangular B-spline surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 2000,17(9):863–877.
- [11] Goshtasby A. Design and recovery of 2-D and 3-D shapes using rational Gaussian curves and surfaces. *Int'l Journal of Computer Vision*, 1993,10(3):233–256.
- [12] Goshtasby A. Geometric modeling using rational Gaussian curves and surfaces. *Computer Aided Design*, 1995,27(5):363–375.
- [13] Grimm C, Zorin D. Surface modeling and parameterization with manifolds. In: John F, Anthony A, eds. *SIGGRAPH 2005 Course Notes#21*. Los Angeles: Publications Dept., ACM Inc., 2005. 8–68.
- [14] Paton JL. Modeling surfaces of arbitrary topology using complex manifolds [Ph.D. Thesis]. Providence: Brown University, 1997.
- [15] Grimm C, Hughes J. Modeling surfaces of arbitrary topology using manifolds. *ACM Trans. on Graphics*, 1995,29(2):359–368.
- [16] Navau JC, Garcia NP. Modeling surfaces from planar irregular meshes. *Computer Aided Geometric Design*, 2000,17(1):1–15.
- [17] Navau JC, Garcia NP. Modeling surfaces from meshes of arbitrary topology. *Computer Aided Geometric Design*, 2000,17(7):643–671.
- [18] Gu XF, He Y, Qin H. Manifold splines. In: Kobbelt L, ed. *ACM Symp. on Solid and Physical Modeling*. Cambridge: ACM Press, 2005. 27–38.



王青(1976 -),男,浙江杭州人,博士,助理研究员,主要研究领域为计算机图形学,计算机辅助几何设计,虚拟现实.



鲍虎军(1966 -),男,博士,研究员,博士生导师,主要研究领域为数字几何处理,可视计算,交互式图形,虚拟现实.