

## 基于三维多项式映射的广义 Julia 集表示与绘制<sup>\*</sup>

程 锦<sup>+</sup>, 谭建荣

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

### Representation and Rendering of General Julia Sets Based on Tri-Dimensional Polynomial Maps

CHENG Jin<sup>+</sup>, TAN Jian-Rong

(State Key Laboratory of CAD & CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-571-87951273, Fax: +86-571-87951899, E-mail: cjinpjun@zju.edu.cn, <http://www.cad.zju.edu.cn/>

**Cheng J, Tan JR. Representation and rendering of general Julia sets based on tri-dimensional polynomial maps. *Journal of Software*, 2006,17(7):1561–1570.** <http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/1561.htm>

**Abstract:** A new approach for the representation of 3D general Julia sets is put forward on the basis of tri-dimensional polynomial maps. The condition for a 3D polynomial map to be equivariant is theoretically analyzed and proved. The equations of two classes of 3D polynomial maps that are equivariant with respect to the rotational symmetries of either a regular tetrahedron group or a regular octahedron group are strictly given, on the basis of which the properties of the general Julia sets created by these 3D polynomial maps are discussed and proved. A ray-tracing volume rendering algorithm, which defines the color and opacity of every discrete point within a Julia set according to its escaping distance, is proposed in order to acquire high quality 3D fractal images. Experimental results demonstrate that the approach of generating 3D Julia sets from 3D polynomial maps not only enables us to predict the characteristics of Julia sets according to the properties of the maps, but also makes it possible for us to obtain various kinds of Julia sets with different rotational symmetries by altering the parameters of the maps. Consequently, drawbacks such as monotone structure of the resulting fractals and inability to predict fractal shape in the existing methods for generating 3D fractal sets can be effectually avoided. Furthermore, the method of generating 3D Julia sets by 3D polynomial maps can be applied to the construction of other 3D fractals, and hence would result in a different perspective for the generation of 3D fractals.

**Key words:** tri-dimensional polynomial map; equivariant map; rotational symmetry; general Julia sets; tetrahedron group; octahedron group; ray-tracing volume rendering algorithm; escaping distance

**摘 要:** 研究了基于三维多项式映射的三维广义 Julia 集表示方法. 从理论上分析并证明了三维多项式映射满足等变的条件, 精确地给出了关于正四面体群和正八面体群具有旋转不变对称性的两类三维等变映射的具体

---

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60375020, 50305033 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant Nos.2004CB719402, 2002CB312106 (国家重点基础研究发展规划(973)); the Specialized Research Foundation for the Doctoral Program of Higher Education of China under Grant No.20020335112 (教育部高等学校博士点专项科研基金)

Received 2004-07-16; Accepted 2005-07-11

公式,在此基础上讨论并证明了三维多项式映射的广义 Julia 集所具有的性质.提出了基于逃逸距离色彩调配的光线跟踪体绘制算法,对给定三维空间中属于 Julia 集的离散点根据其逃逸距离赋予颜色和不透明度,并采用光线跟踪法进行体绘制.实验结果表明,利用三维多项式映射来构造三维 Julia 集,不仅可以根据映射的性质预知 Julia 集的总体结构特征,并且能够通过调控映射的参数来获得多种具有不同旋转对称结构的 Julia 集,因而有效地克服了现有三维分形集生成方法所构造的分形集包含信息量少、形状结构单一和分形形状无法预测等缺陷.进一步地,三维多项式映射可以应用于其他三维分形的构造,从而为三维分形的生成提供一个新的有效途径.

关键词: 三维多项式映射;等变映射;旋转不变对称性;广义 Julia 集;四面体群;八面体群;光线跟踪体绘制算法;逃逸距离

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

自从 B. B. Mandelbrot 创立分形几何学以来,广大学者借助复变函数理论对复平面上 Julia 集(J 集)和 Mandelbrot 集(M 集)的无限精细结构、周期轨道和自相似性等进行了系统、详尽和精确的分析,推动了分形理论不断发展.1982年,Alan Norton 首次将哈密顿四元数应用于三维分形集的生成<sup>[1]</sup>,并采用边界检测法来绘制这些复杂结构,最早观察到了三维分形集的全局图像.1989年,Norton 提出了构造四维空间中具有多种不同结构的 Julia 集的方法<sup>[2]</sup>,并通过边界检测法绘制的 Julia 集图像验证了该法的有效性.边界检测法是一种以对象空间为序的算法,在绘制过程中需保存绘制对象上每个点的信息,因而需要很大的存储空间.为了克服边界检测法的局限性,并获得更真实的三维分形表面,John C. Hart 提出了体光线跟踪法<sup>[3]</sup>,该方法以图像空间为序,直接研究光线通过体数据场时的变化,对内存要求低,并可得到具有不同层次细节结构的高质量三维分形图像.此外,体光线跟踪法还可以在绘制过程中引入漫射、反射、折射等特殊效果,因而能够绘制出比边界检测法更精细的三维分形图,但它的绘制速度比较慢.1990年,John C. Hart<sup>[4]</sup>在前人工作的基础上提出了能实现 Julia 集交互显示的反迭代法.反迭代法虽然简单、快速且占用内存少,但采用该方法所绘制的结果图的质量很差,因而有很大的局限性.文献[5]也采用哈密顿四元数来构造 M 集和 J 集,但由于存在可视化技术上的困难,文中只给出了这些分形集在二维平面上的投影,未能直观地表达高维分形集的真实结构.与文献[1-5]的侧重点不同,文献[6]从理论上比较系统地分析了四元数映射周期轨道的稳定性,并证明了四维空间中 Mandelbrot 集和 Julia 集所具有的性质;文献[7]则从理论上证明了用哈密顿四元数所构造的 Julia 集在三维空间中的投影可以通过其二维 Julia 子集围绕某一特定轴旋转而得到.

以上研究均采用哈密顿四元数作为迭代运算工具,所得到的三维分形集具有相同的形式(即旋转对称结构),S. Bedding 等人<sup>[8,9]</sup>甚至认为,哈密顿四元数乘法的不可交换性决定了利用其所获得的分形集难以具备与复平面分形集相提并论的重要意义.因此,研究者们开始寻求借助其他数学理论或工具生成三维分形集的方法,并先后提出了基于满足乘法交换律的双复数<sup>[10]</sup>和变异的“复数化”四元数<sup>[11]</sup>构造三维分形集的方法.更为重要的是,研究者们突破了利用四元代数来构造三维分形集的传统思想,探索了直接在三维算术空间中构造三维分形集的方法,分别采用二次多项式映射<sup>[12]</sup>、三元数<sup>[13]</sup>和参数化函数<sup>[14]</sup>来构造分形集,不仅丰富了三维分形集的形式,而且有效地避免了四元代数法构造三维分形集时,由四维到三维的投影过程所引起的信息丢失、不直观和不可控,推动了复平面分形集在三维空间中的拓展.

然而,上述三维分形集生成方法在丰富三维分形的研究内容和推动分形理论发展的同时,仍然存在以下不足之处:(1) 生成的三维分形集包含的信息量比较少.采用三元数法、参数化函数法等构造三维分形集虽然避免了四维到三维的投影过程,但所获得的分形集往往是复平面上的分形沿着某一方向进行推移所得到的三维柱状体,并未包含多少复平面分形所不具备的信息;(2) 三维分形集的结构形状取决于相应复平面上分形集的形状,缺乏变化.利用三元数等所构造的三维分形集具有柱状结构,而这些柱状体的底面总是与某个复平面上的分形具备相同的形状特征.因此,用三元数等方法所构造的三维分形集的形状,实际上是由与其相对应的某个复映射分形所唯一确定的,结构形状比较单调;(3) 无法预测分形集的形状和结构特征.在用三元数等方法构造三维分形集时,我们无法在获得分形图像前预测某个映射或函数进行迭代所生成的分形集将会具有何种结构形式.

针对现有三维分形集的构造方法所存在的问题,本文探索了利用三维多项式映射来构造三维分形集的方法.从理论上分析和证明了三维多项式映射满足等变的条件,严格地给出了关于正四面体群和正八面体群具有旋转不变对称性的两类三维等变映射的具体公式,在此基础上,讨论并证明了采用三维多项式映射所构造的三维广义 Julia 集的性质.提出了基于逃逸距离色彩调配的光线跟踪体绘制算法,对给定三维空间中属于 J 集的离散点,根据其逃逸距离赋予颜色和不透明度以标识各点逃逸趋势大小,并采用光线跟踪法进行体绘制.实验结果表明,基于三维多项式映射满足等变条件时所具备的一些优良性质,我们可以获得与现有各种方法所构造的三维分形集有着截然不同的结构和形状特征的三维广义 J 集,而且,三维多项式映射的特殊性使得根据映射的性质来预测其所生成的分形集的形状和结构特征成为可能.

## 1 三维多项式映射的广义 J 集及其性质

### 1.1 三维多项式映射的三维广义 J 集

三维多项式映射  $f(x, y, z): R^3 \rightarrow R^3$  的一般形式为

$$f(x, y, z) = \left( \sum_{0 \leq i, j, k \leq N} a_{ijk} x^i y^j z^k, \sum_{0 \leq i, j, k \leq N} b_{ijk} x^i y^j z^k, \sum_{0 \leq i, j, k \leq N} c_{ijk} x^i y^j z^k \right) \quad (1)$$

其中,  $N$  为映射各子项中  $x, y, z$  坐标的最高次数.

利用以上形式的三维多项式映射,我们可以给出如下三维广义 J 集的定义:

**定义 1.** 令  $X=(x, y, z)$ , 则形如式(1)的三维多项式映射  $f(X)$  的三维广义 J 集为:在参数空间中的某一给定点处(即当映射  $f(X)$  的所有系数均给定时),以动力空间  $R^3$  中各点作为初始点进行无数次迭代后不发散到无穷远的所有点的集合,用公式表示为

$$J = \left\{ X \in R^3 : \left\{ f_p^n(X) \right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \infty \right\} \quad (2)$$

其中,函数  $f$  的下标  $p$  表示在参数空间中选取某一固定点.

### 1.2 三维多项式映射的广义 J 集的性质

由于三维多项式映射的性质往往决定了利用它进行迭代所生成的广义 J 集的性质,因此,在讨论广义 J 集的性质之前,我们有必要先来讨论一下三维多项式映射的性质.

#### 1.2.1 两类具有等变对称性的三维多项式映射

**定理 1.** 设有三维多项式映射  $f(X): R^3 \rightarrow R^3$ ,  $G$  是由一系列作用于  $R^3$  上的三阶右乘方阵形式的对称操作所构成的有限群,则映射  $g(X) = \sum_{\sigma \in G} \sigma^{-1}(f(\sigma(X)))$  是关于有限群  $G$  的等变映射.

**证明:** 设  $\tau \in G$ , 则

$$g(\tau(X)) = \sum_{\sigma \in G} \sigma^{-1}(f(\sigma(\tau(X)))) \quad (3)$$

根据群  $G$  的结合律和逆操作可得

$$\sigma^{-1} = \tau \tau^{-1} \sigma^{-1} = \tau (\tau^{-1} \sigma^{-1}) = \tau (\sigma \tau)^{-1} \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)得

$$g(\tau(X)) = \tau \sum_{\sigma \in G} (\sigma \tau)^{-1} (f((\sigma \tau)(X))) \quad (5)$$

令  $\sigma \tau = \gamma$ , 根据  $G$  的封闭性可知  $\gamma \in G$ , 代入式(5)可得

$$g(\tau(X)) = \tau \sum_{\gamma \in G} \gamma^{-1} (f(\gamma(X))) = \tau(g(X)) \quad (6)$$

因此,映射  $g(X) = \sum_{\sigma \in G} \sigma^{-1}(f(\sigma(X)))$  是关于有限对称操作群  $G$  的等变映射.  $\square$

**推论 1.** 设  $G$  是有限对称操作群,若三维映射  $f(X): R^3 \rightarrow R^3$  对任意  $\sigma \in G$  均满足  $f(\sigma(X)) = \sigma(f(X))$ , 则映射  $f(X)$  为关于对称操作群  $G$  的等变映射.

下面我们讨论关于正四面体群  $T$  和正八面体群  $O$  具有旋转不变对称性的两类等变映射.如图 1 所示为正四面体,它有 4 个角顶、4 个正三角形表面和 6 条棱边.从每个角顶到相对表面中心连线是一个三阶轴( $C_3$ ),两个相对棱边中点连线是一个二阶轴( $C_2$ ).如图 2 所示为正八面体,它有 6 个角顶、8 个正三角形表面和 12 条棱边.两个相对角顶的连线是一个四阶轴( $C_4$ ),两个相对表面中心的连线是一个三阶轴( $C_3$ ),两个相对棱边中点的连线是一个二阶轴( $C_2$ ).从图 2 中我们还可以看出,以正八面体 6 个角顶为正方形表面中心的外接正六面体(即立方体)具有与该正八面体相同的对称操作,这实际上也是由正八面体和立方体的对偶特性所决定的.

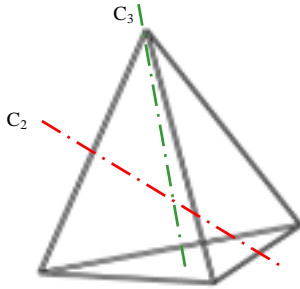


Fig.1 Rotational symmetry of regular tetrahedron  
图 1 正四面体的旋转对称性

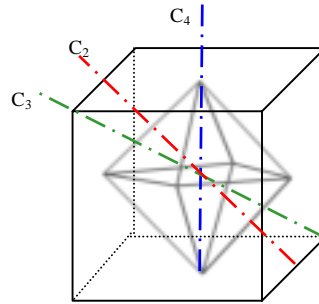


Fig.2 Rotational symmetry of regular octahedron  
图 2 正八面体的旋转对称性

定义 2. 令非负整数变量  $var$  的奇偶性标识函数为  $s(var) = \begin{cases} 0, & \text{当 } var \text{ 为偶数时} \\ 1, & \text{当 } var \text{ 为奇数时} \end{cases}$ .

定理 2. 设  $0 \leq i, j, k \leq N$ , 则当  $s(j)=s(k)$  且  $s(j) \neq s(i)$  时, 三维映射  $T_{ijk}(X) = (x^i y^j z^k, x^k y^i z^j, x^j y^k z^i)$  关于正四面体群  $T$  具有旋转不变对称性.

证明: 根据推论 1, 并考虑到正四面体群  $T$  的所有元素均可以表示为生成元  $\sigma(x, y, z) = (-x, -y, z)$  和  $\tau(x, y, z) = (z, x, y)$  的乘积, 故我们只需证明三维映射  $T_{ijk}(X)$  满足

$$T_{ijk}(\sigma(X)) = \sigma(T_{ijk}(X))$$

和

$$T_{ijk}(\tau(X)) = \tau(T_{ijk}(X))$$

即可.

首先,

$$\begin{aligned} T_{ijk}(\sigma(X)) &= T_{ijk}(\sigma(x, y, z)) = T_{ijk}(-x, -y, z) \\ &= ((-x)^i (-y)^j z^k, (-x)^k (-y)^i z^j, (-x)^j (-y)^k z^i) \\ &= ((-1)^{i+j} x^i y^j z^k, (-1)^{k+i} x^k y^i z^j, (-1)^{j+k} x^j y^k z^i) \end{aligned} \tag{7}$$

当  $s(j)=s(k)$  且  $s(j) \neq s(i)$  时, 显然有

$$(-1)^{i+j} = -1, (-1)^{k+i} = -1, (-1)^{j+k} = 1 \tag{8}$$

代入式(7)可得

$$T_{ijk}(\sigma(X)) = (-x^i y^j z^k, -x^k y^i z^j, x^j y^k z^i) = \sigma(x^i y^j z^k, x^k y^i z^j, x^j y^k z^i) = \sigma(T_{ijk}(x, y, z)) = \sigma(T_{ijk}(X)) \tag{9}$$

故当  $s(j)=s(k)$  且  $s(j) \neq s(i)$  时, 等式 成立.

又因为

$$T_{ijk}(\tau(X)) = T_{ijk}(\tau(x, y, z)) = T_{ijk}(z, x, y) = (z^i x^j y^k, z^k x^i y^j, z^j x^k y^i) = (x^j y^k z^i, x^i y^j z^k, x^k y^i z^j) \tag{10}$$

$$\tau(T_{ijk}(X)) = \tau(T_{ijk}(x, y, z)) = \tau(x^i y^j z^k, x^k y^i z^j, x^j y^k z^i) = (x^j y^k z^i, x^i y^j z^k, x^k y^i z^j) \tag{11}$$

由式(10)和式(11)可知, 对任意  $0 \leq i, j, k \leq N$ , 等式 均成立.

综上所述, 当  $0 \leq i, j, k \leq N$ , 且满足  $s(j)=s(k)$ ,  $s(j) \neq s(i)$  时, 等式 和等式 同时成立, 从而映射  $T_{ijk}(X) = (x^i y^j z^k, x^k y^i z^j,$

$x^i y^k z^l$ 关于正四面体群  $T$  具有旋转不变对称性. □

**推论 2.** 当  $0 \leq i, j, k \leq N$ , 且满足  $s(j)=s(k), s(j) \neq s(i)$  时, 任意形如  $T_{ijk}(X)=(x^i y^j z^k, x^k y^i z^j, x^j y^k z^i)$  的三维映射的线性组合映射关于正四面体群  $T$  均具有旋转不变对称性.

**定理 3.** 设  $0 \leq i, j, k \leq N$ , 则当  $s(j)=s(k)$  且  $s(j) \neq s(i)$  时, 三维多项式映射  $O_{ijk}(X)=(x^i y^j z^k + (-1)^j x^i y^k z^j, x^k y^i z^j + (-1)^j x^i y^j z^k, x^j y^k z^i + (-1)^j x^k y^j z^i)$  关于正八面体群  $O$  具有旋转不变对称性.

**证明:** 根据推论 1, 并考虑到正八面体群  $O$  的所有元素均可以表示为生成元  $\sigma(x, y, z)=(-y, x, z)$  和  $\tau(x, y, z)=(-z, -y, -x)$  的乘积, 故我们只需证明三维映射  $O_{ijk}(X)$  满足等式

$$O_{ijk}(\sigma(X)) = \sigma(O_{ijk}(X))$$

和

$$O_{ijk}(\tau(X)) = \tau(O_{ijk}(X))$$

即可.

首先,

$$O_{ijk}(\sigma(X)) = O_{ijk}(\sigma(x, y, z)) = O_{ijk}(-y, x, z) = \begin{pmatrix} (-y)^i x^j z^k + (-1)^j (-y)^i x^k z^j \\ (-y)^k x^i z^j + (-1)^j (-y)^j x^i z^k \\ (-y)^j x^k z^i + (-1)^j (-y)^k x^j z^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^i x^j y^i z^k + (-1)^{i+j} x^k y^i z^j \\ (-1)^k x^i y^k z^j + x^i y^j z^k \\ (-1)^j x^k y^j z^i + (-1)^{j+k} x^j y^k z^i \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\sigma(O_{ijk}(X)) = \sigma(O_{ijk}(x, y, z)) = \sigma \begin{pmatrix} x^i y^j z^k + (-1)^j x^i y^k z^j \\ x^k y^i z^j + (-1)^j x^j y^i z^k \\ x^j y^k z^i + (-1)^j x^k y^j z^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^k y^i z^j + (-1)^{j+1} x^j y^i z^k \\ x^i y^j z^k + (-1)^j x^i y^k z^j \\ x^j y^k z^i + (-1)^j x^k y^j z^i \end{pmatrix} \quad (13)$$

当  $s(j)=s(k)$  且  $s(j) \neq s(i)$  时, 显然有

$$(-1)^i = (-1)^{j+1}, (-1)^{i+j} = -1, (-1)^j = (-1)^k, (-1)^{j+k} = 1 \quad (14)$$

由式(12)~式(14)可知, 当  $s(j)=s(k)$  且  $s(j) \neq s(i)$  时, 等式 成立.

又因为

$$\begin{aligned} O_{ijk}(\tau(X)) &= O_{ijk}(\tau(x, y, z)) = O_{ijk}(-z, -y, -x) \\ &= \begin{pmatrix} (-z)^i (-y)^j (-x)^k + (-1)^j (-z)^j (-y)^k (-x)^i \\ (-z)^k (-y)^j (-x)^j + (-1)^j (-z)^j (-y)^j (-x)^k \\ (-z)^j (-y)^k (-x)^j + (-1)^j (-z)^k (-y)^j (-x)^j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{i+j+k} x^k y^j z^i + (-1)^{i+k+2j} x^j y^k z^i \\ (-1)^{i+j+k} x^j y^i z^k + (-1)^{i+k+2j} x^k y^i z^j \\ (-1)^{i+j+k} x^i y^k z^j + (-1)^{i+k+2j} x^i y^j z^k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tau(O_{ijk}(X)) = \tau(O_{ijk}(x, y, z)) = \tau \begin{pmatrix} x^i y^j z^k + (-1)^j x^i y^k z^j \\ x^k y^i z^j + (-1)^j x^j y^i z^k \\ x^j y^k z^i + (-1)^j x^k y^j z^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^j y^k z^i + (-1)^{j+1} x^k y^j z^i \\ -x^k y^i z^j + (-1)^{j+1} x^j y^i z^k \\ -x^i y^j z^k + (-1)^{j+1} x^i y^k z^j \end{pmatrix} \quad (16)$$

当  $s(j)=s(k)$  且  $s(j) \neq s(i)$  时, 显然有

$$(-1)^{i+j+k} = (-1)^i = (-1)^{j+1}, (-1)^{i+k+2j} = -1 \quad (17)$$

由式(15)~式(17)可知, 当  $s(j)=s(k)$  且  $s(j) \neq s(i)$  时, 等式 成立.

综上所述, 当  $0 \leq i, j, k \leq N$ , 且满足  $s(j)=s(k), s(j) \neq s(i)$  时, 等式 和等式 同时成立, 从而映射  $O_{ijk}(X)=(x^i y^j z^k + (-1)^j x^i y^k z^j, x^k y^i z^j + (-1)^j x^j y^i z^k, x^j y^k z^i + (-1)^j x^k y^j z^i)$  关于正八面体群  $O$  具有旋转不变对称性. □

**推论 3.** 当  $0 \leq i, j, k \leq N$ , 且满足  $s(j)=s(k), s(j) \neq s(i)$  时, 任意形如  $O_{ijk}(X)=(x^i y^j z^k + (-1)^j x^i y^k z^j, x^k y^i z^j + (-1)^j x^j y^i z^k, x^j y^k z^i + (-1)^j x^k y^j z^i)$  的三维映射的线性组合映射关于正八面体群  $O$  均具有旋转不变对称性.

### 1.2.2 基于三维等变映射的广义 J 集的性质

**性质 1.** 当三维多项式映射  $f(X)$  满足推论 2 的条件, 即当映射可以表示为

$$f(X) = \sum a_{i_n j_n k_n} \cdot T_{i_n j_n k_n}(X), s(j_n) = s(k_n), s(j_n) \neq s(i_n) \quad (18)$$

时,其三维广义 J 集关于正四面体群  $T$  具有旋转不变对称性.

证明:根据推论 2,当  $s(j_n)=s(k_n),s(j_n)\neq s(i_n)$ 时,映射  $f(X) = \sum a_{i_n j_n k_n} \cdot T_{i_n j_n k_n}(X)$  关于正四面体群  $T$  具有旋转不变对称性,即对  $\forall \omega \in T$  均有  $f(\omega(X)) = \omega(f(X))$ ,从而  $f^n(\omega(X)) = \omega(f^n(X))$ .于是,当  $X \in J$  时,必有  $\omega(X) \in J$ .

因此,形如式(18)的三维多项式映射的三维广义 J 集关于正四面体群  $T$  具有旋转不变对称性.  $\square$

性质 2. 当三维多项式映射  $f(X)$  满足推论 3 的条件,即当映射可以表示为

$$f(X) = \sum a_{i_n j_n k_n} \cdot O_{i_n j_n k_n}(x, y, z), s(j_n) = s(k_n), s(j_n) \neq s(i_n) \quad (19)$$

时,其三维广义 J 集关于正八面体群  $O$  具有旋转不变对称性.

证明:根据推论 3,当  $s(j_n)=s(k_n),s(j_n)\neq s(i_n)$ 时,映射  $f(X) = \sum a_{i_n j_n k_n} \cdot O_{i_n j_n k_n}(X)$  关于正八面体群  $O$  具有旋转不变对称性,即对  $\forall \omega \in O$  均有  $f(\omega(X)) = \omega(f(X))$ ,从而  $f^n(\omega(X)) = \omega(f^n(X))$ .于是,当  $X \in J$  时,必有  $\omega(X) \in J$ .

因此,形如式(19)的三维多项式映射的三维广义 J 集关于正八面体群  $O$  具有旋转不变对称性.  $\square$

## 2 三维广义 J 集的体绘制算法

在现有的三维分形集绘制算法中,体光线跟踪法既不需要像边界检测法那样具有巨大的存储空间,又可以获得比采用边界检测法和反迭代法绘制时更高质量的三维分形图.因此,本文拟采用光线跟踪法对三维 J 集进行体绘制.

为了避免判断当前点是否属于三维广义 J 集时所进行的三维映射迭代运算过程发生溢出,算法首先定义一个逃逸距离函数,以标识当前考察点逃逸趋势大小:

- 若经过一定次数迭代后,逃逸距离函数值趋于无穷,则认为当前点不属于 J 集,并定义其颜色为黑色;
- 若经过最大次数迭代后,逃逸距离函数值仍未超出给定的逃逸半径,则认为当前点属于 J 集,并根据最后一次迭代所得到的逃逸距离函数值,来定义该点的颜色和透明度等属性.

在找出给定动力空间内所有属于 J 集的点并定义其颜色等属性后,即可用文献[3]所提出的光线跟踪法进行体绘制.由于算法在生成 J 集的过程中根据各点逃逸距离的大小来定义其颜色等属性,因此,它实际上是一个基于逃逸距离色彩调配的光线跟踪体绘制算法.具体算法描述如下:

算法 1. 基于逃逸距离色彩调配的光线跟踪体绘制算法.

Step 1. 设定初始化参数,包括所考察的动力空间范围、逃逸半径  $R$  和最大迭代次数  $IT_{\max}$ .

Step 2. 定义逃逸距离函数

$$D(X) = \begin{cases} \infty, & \exists n < IT_{\max}, \text{使得} |f^n(X)| > R; \\ d, & |f^n(X)| \leq R, n = 1, 2, \dots, IT_{\max}. \end{cases} \quad (20)$$

其中,  $d = |f^{IT_{\max}}(X)|$ .

Step 3. 对所考察动力空间范围内的点  $X$  计算  $D(X)$ .

Step 4. 根据 Step 3 中所计算出的逃逸距离函数值  $D(X)$  定义当前考察点的颜色和透明度等属性:

- (a) 若  $D(X) = \infty$ , 则  $X \notin J$ , 将该点的颜色定义为黑色(背景色), 并设其不透明度为 1.
- (b) 若  $D(X) = d$ , 则  $X \in J$ , 将该点的不透明度设为 1, 并根据  $d$  的大小定义其颜色以标识该点的逃逸趋势:
  - 当  $d$  值非常接近逃逸半径  $R$  时, 定义其颜色为红色;
  - 当  $d$  值接近 0 时, 定义其颜色为玫瑰色;
  - 在实验过程中, 我们所采用的调色板见表 1.

Table 1 Colormap employed in our experiments

表 1 实验中所采用的调色板

Color id	Color	RGB value		
		Red	Green	Blue
0	Rosiness	255	0	153
1	Green	26	204	26
2	Yellow	230	230	26
3	Blue	26	26	204
4	Cyan	26	204	204
5	Red	204	26	26
-1	Black	0	0	0

Step 5. 重复执行 Step 3~Step 4,直至遍历给定动力空间范围内的所有点.

Step 6. 光线跟踪法体绘制三维广义 J 集.

### 3 三维广义 J 集实例

为了得到三维空间中具有旋转对称特性的三维广义 J 集,本文以形如式(18)和式(19)的两类三维等变映射为例,分别构造了关于正四面体和正八面体具有旋转对称性的三维广义 J 集.在实验过程中,我们所考察的动力空间均为  $x \in [-1, 1], y \in [-1, 1], z \in [-1, 1]$ .

图 3 是由等变映射  $T_{100}(X), T_{031}(X)$  和  $T_{011}(X)$  的线性组合映射进行迭代所生成的三维广义 J 集(其中:图 3(a)中,  $f(X) = -1.072379872T_{100}(X) - 0.988455548T_{031}(X) + 0.202610368T_{011}(X)$ ;图 3(b)中,  $f(X) = -1.072379872T_{100}(X) - 0.888455548T_{031}(X) + 0.202610368T_{011}(X)$ ;图 3(c)中,  $f(X) = -1.172379872T_{100}(X) - 0.988455548T_{031}(X) + 0.202610368T_{011}(X)$ ).图 3(a)具有明显的关于正四面体的旋转对称结构,三维 J 集的中心是某种类似于球状体的结构,但在该球状体的表面却生长着一些关于正四面体对称分布的柱状小芽,而球状体周围所环绕的四块小云团更是准确地位于正四面体的 4 个顶点上(其中有一块云团被中心的类球体遮挡了).图 3(b)中所采用的等变映射仅仅是将生成图 3(a)中 J 集的等变映射的子项  $T_{031}(X)$  前的系数增大了 0.1,但所得到的结果却有不小的差异:不仅三维 J 集中心类球体上的柱状对称芽体长大了很多,而且球状体周围除了原先所环绕的 4 块云团外,与中心类球体上 4 个稍大的柱状芽体相对应的部位又长出了 4 个更小的云块.图 3(c)中所采用的等变映射仅将构造图 3(a)中 J 集的等变映射的子项  $T_{100}(X)$  前的系数减小了 0.1,所得结果却与图 3(a)中的 J 集大相径庭:球状中心与周围所环绕的云团几乎被一些对称分布的带状离散点连成一体,同时也使得关于正四面体的旋转对称性更直观地显现出来.

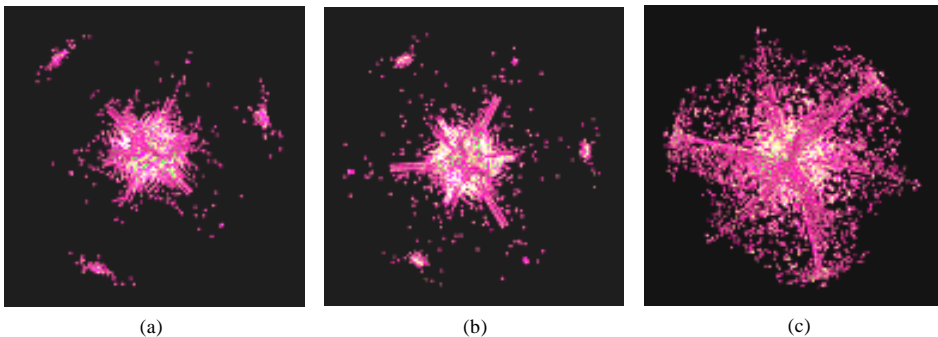


Fig.3 General J sets of linear combination of equivariant maps  $T_{100}(X), T_{031}(X)$  and  $T_{011}(X)$

图 3 等变映射  $T_{100}(X), T_{031}(X)$  和  $T_{011}(X)$  的线性组合映射的广义 J 集

图 4 是由 3 个关于正四面体群具有旋转不变对称性的等变映射的线性组合映射所构造的三维广义 J 集(其中:图 4(a)中,

$$f(X) = -1.131395052T_{100}(X) - 0.543411644T_{231}(X) + 0.26954932T_{053}(X);$$

图 4(b)中,

$$f(X)=-1.131395052T_{100}(X)-1.243411644T_{031}(X)+0.36954932T_{011}(X);$$

图 4(c)中,

$$f(X)=-1.131395052T_{100}(X)-0.643411644T_{031}(X)+0.36954932T_{011}(X).$$

为了使所生成的三维 J 集的中心在笛卡尔坐标原点(0,0,0),生成图 4(a)~图 4(c)中三维 J 集的映射都包含了  $T_{100}(X)$  这一项.值得一提的是,我们在实验中发现:在线性组合映射的其他两个子项  $T_{ijk}(X)$  中,当  $j$  和  $k$  为奇数、 $i$  为偶数时,能够获得比较令人满意的三维 J 集图像.仔细观察图 4(a)~图 4(c)我们可以看到,其中的三维广义 J 集中均包含了两种具有不同结构的对称子元,这两种对称子元交替分布,并各自都体现出了关于正四面体的旋转对称性.

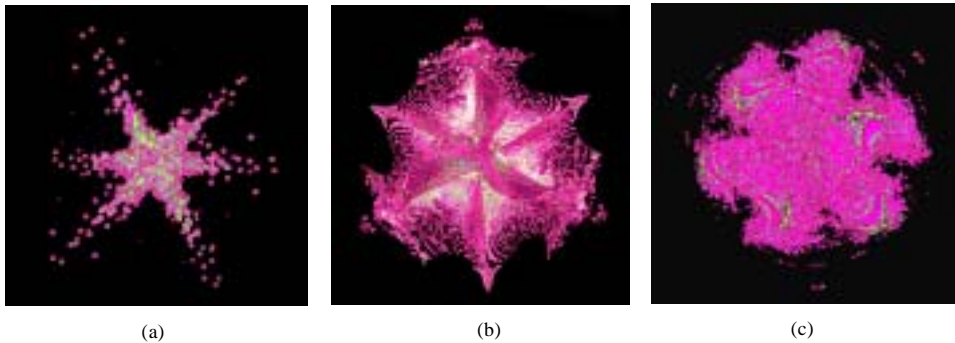


Fig.4 General J sets of equivariant maps with rotational symmetry about regular tetrahedron group  
图 4 关于正四面体群具有旋转不变对称性的等变映射的广义 J 集

图 5 是由等变映射  $O_{100}(X), O_{120}(X), O_{102}(X)$  和  $O_{011}(X)$  的线性组合映射进行迭代所生成的三维广义 J 集(其中:图 5(a)中  $f(X)=-0.831395052O_{100}(X)+0.143411644O_{120}(X)+0.46954932O_{102}(X)+0.82987O_{011}(X)$ ;图 5(b)中  $f(X)=-0.731395052O_{100}(X)+0.243411644O_{120}(X)+0.46954932O_{102}(X)+1.12987O_{011}(X)$ ;图 5(c)中  $f(X)=-0.831395052O_{100}(X)+0.143411644O_{120}(X)+0.46954932O_{102}(X)-0.398798O_{011}(X)$ ).在构造图如 5(a)和图 5(b)所示的三维 J 集时,映射中子项  $O_{100}(X), O_{120}(X)$  和  $O_{011}(X)$  前的系数分别有 0.1,0.1 和 0.3 的差异,这种差异导致三维 J 集的结构发生了微妙的变化:在构造图如 5(b)所示 J 集时采用的映射中,上述 3 个子项前系数的微小增量,一方面使得 J 集轮廓的弯曲程度变得平滑;另一方面,在如图 5(a)所示的 J 集各枝状对称结构中,位于正八面体旋转对称轴同侧的两个小孔洞在图 5(b)中变成了一个连通的大孔洞.构造图 5(c)中 J 集所采用的映射,仅将生成图 5(a)中 J 集所采用的映射子项  $O_{011}(X)$  前的系数由 0.82987 改为  $-0.398798$ ,但这一改变却使得生成三维 J 集的结构发生了极大的变化:图 5(a)和图 5(b)中的三维 J 集,似乎仅在中心部位具有关于正八面体的旋转对称结构;而图 5(c)中的 J 集,却充分体现了关于正八面体的旋转对称性.

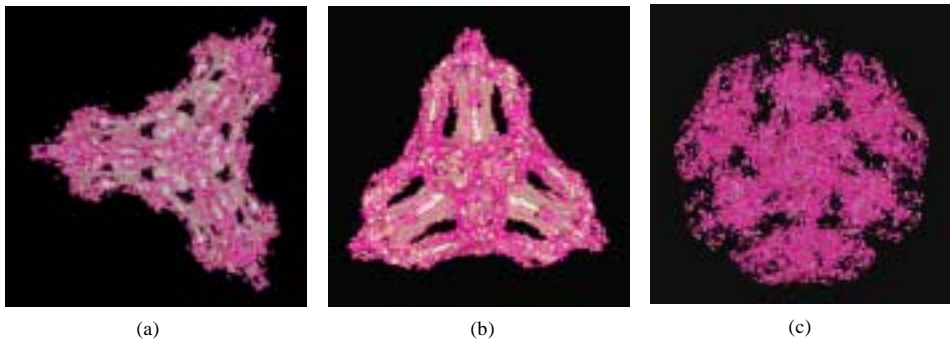


Fig.5 General J sets of linear combination of equivariant maps  $O_{100}(X), O_{120}(X), O_{102}(X)$  and  $O_{011}(X)$   
图 5 等变映射  $O_{100}(X), O_{120}(X), O_{102}(X)$  和  $O_{011}(X)$  的线性组合映射的广义 J 集



图 6 是由 3 个关于正八面体群具有旋转不变对称性的等变映射的线性组合映射所构造的三维广义 J 集(其中:图 6(a)中,

$$f(X)=-0.831395052O_{100}(X)+0.543411644O_{011}(X)+0.36954932O_{102}(X);$$

图 6(b)中,

$$f(X)= -1.131395052O_{100}(X)+0.643411644O_{211}(X)+1.06954932O_{102}(X);$$

图 6(c)中,

$$f(X)= -0.831395052O_{100}(X)+0.143411644O_{120}(X)+0.46954932O_{102}(X).$$

基于与构造图 4 中 J 集时相同的出发点,即为使三维 J 集的中心在坐标原点,构造图 6(a)~图 6(c)中三维 J 集的映射都包含了  $O_{100}(X)$  这一项.显而易见,图 6 中的三维 J 集(尤其是图 6(c)中的 J 集)展现了比图 5 中 J 集更鲜明的关于正八面体的旋转对称特征.此外,图 6(a)和 6(b)中的三维广义 J 集均包含了两种不同结构的对称子元,这两种对称子元交替分布,并各自都体现出了关于正八面体的旋转对称性.

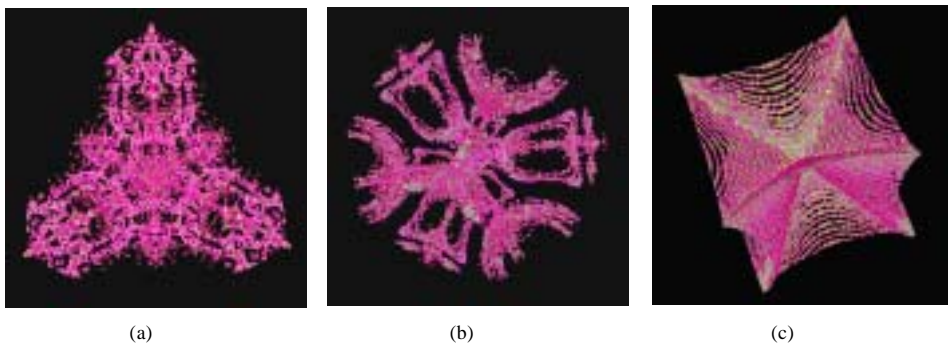


Fig.6 General J sets of equivariant maps with rotational symmetry about regular octahedron group

图 6 关于正八面体群具有旋转不变对称性的等变映射的广义 J 集

## 4 结 论

研究了基于三维多项式映射的三维广义 Julia 集表示方法.从理论上分析和证明了三维多项式映射满足等变的条件,精确地给出了关于正四面体群和正八面体群具有旋转不变对称性的两类三维等变映射的具体公式.在此基础上,讨论并证明了利用三维多项式映射所生成的广义 Julia 集的性质.提出了基于逃逸距离色彩调配的光线跟踪体绘制算法,对给定三维空间中属于 J 集的离散点根据其逃逸距离赋予颜色和透明度,并采用光线跟踪法进行体绘制.

实验结果表明,基于三维多项式映射构造三维广义 J 集,不仅可以依据映射的性质预知分形集的结构特征,而且还可以通过调控映射的各个参数来获得多种具有不同旋转对称结构的分形集,从而有效地克服了现有三维分形集生成方法所构造的分形集包含信息量少、形状结构单一和无法预测分形形状等缺陷.进一步地,三维多项式映射构造三维 J 集的方法可以应用于其他三维分形集的构造,相信可以取得较好的效果.

致谢 在此,我们向对本文的工作给予支持和建议的同行,以及国家重点基础研究发展规划(973)、国家自然科学基金和教育部高等学校博士点专项科研基金的资助表示衷心的感谢.

## References:

- [1] Norton A. Generation and display of geometric fractals in 3D. Computers Graphics, 1982,16(3):61-67.
- [2] Norton A. Julia sets in the quaternions. Computers and Graphics, 1989,13(2):267-278.
- [3] Hart JC, Sandin DJ, Kauffman LH. Ray tracing deterministic 3D fractals. Computer Graphics, 1989,23(3):289-296.

- [4] Hart JC, Kauffman LH, Sandin DJ. Interactive visualization of quaternion Julia sets. In: Kaufman A, ed. Proc. of the 1st Conf. on Visualization'90. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1990. 209–218.
- [5] Qian XF, Li MC. On constructing Julia set and Mandelbrot set in four-dimensional space. Journal of Kunming University of Science and Technology, 2000,25(3):107–110 (in Chinese with English abstract).
- [6] Gomatam J, Doyle J, Steves B, Mcfarlane I. Generalization of the Mandelbrot set: Quaternionic quadratic maps. Chaos, Solitons & Fractals, 1996,5(6):971–986.
- [7] Bogush A, Gazizov AZ, Kurochkin YA, Stosui VT. On symmetry properties of quaternionic analogs of Julia sets. In: Babichev L, Kuvshinov V, eds. Proc. of the 9th Annual Seminar NPCS-2000. Minsk: Belarus, 2000. 304–309.
- [8] Bedding S, Briggs K. Iteration of quaternion maps. Int'l Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Science and Engineering, 1995,5(3):877–881.
- [9] Bedding S, Briggs K. Iteration of quaternion functions. American Mathematical Monthly, 1996,103(8):654–664.
- [10] Rochon D. A generalized Mandelbrot set for bicomplex numbers. Fractals, 2000,8(4):355–368.
- [11] Gintz TW. Artist's statement CQUATS—A non-distributive quad algebra for 3D rendering of Mandelbrot and Julia sets. Computers & Graphics, 2002,26(2):367–370.
- [12] Nikiel S, Goinski A. Generation of volumetric escape time fractals. Computers & Graphics, 2003,27(6):977–982.
- [13] Cheng J, Tan JR. Representation of 3D general Mandelbrot sets based on ternary number and its rendering algorithm. Chinese Journal of Computers, 2004,27(6):729–735 (in Chinese with English abstract).
- [14] Liu CY. Model for generating Julia and Mandelbrot sets in 3D. He'nan Science, 1995,13(2):99–103 (in Chinese with English abstract).

#### 附中文参考文献:

- [5] 钱晓凡,李茂材.在四维空间中构造 Julia 集和 Mandelbrot 集.昆明理工大学学报,2000,25(3):107–110.
- [13] 程锦,谭建荣.基于三元数的三维广义 M 集表示及其绘制算法.计算机学报,2004,27(6):729–735.
- [14] 柳朝阳.3D Julia 集和 Mandelbrot 集的生成模型.河南科学,1995,13(2):99–103.



程锦(1978 - ),女,浙江永康人,博士,讲师,主要研究领域为工程图形学.



谭建荣(1954 - ),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为产品信息学,CAX 方法学,工程图形学.